文章编号: 1000-8152(2004)04-0591-04

离散区间系统的二次稳定性及其稳定裕度分析

毛维杰

(浙江大学 工业控制技术国家重点实验室, 先进控制研究所, 浙江 杭州, 310027)

摘要: 研究了动态离散区间系统的鲁棒稳定性问题, 提出了系统二次稳定的充分与必要条件, 以及相应的稳定裕度的计算方法, 并推广到离散参数不确定系统. 所有结论以线性矩阵不等式(LMI)的形式给出. 利用功能强大的 LMI 工具, 求解非常方便. 所给实例表明, 该方法用于确定动态离散区间系统的鲁棒稳定性及其稳定裕度, 非常有效.

关键词: 离散区间系统; 二次稳定性; 稳定裕度; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Quadratic stability and stability margin analysis of discrete interval systems

MAO Wei-jie

(National Key Lab of Industrial Control Technology and Institute of Advanced Process Control, Zhejiang University, Hangzhou Zhejiang 310027, China)

Abstract: The robust stability problem of dynamic discrete interval systems is considered. A necessary and sufficient condition for the quadratic stability and a related calculation method of stability margin are proposed. This condition is also extended to the quadratic stability of linear systems with uncertain parameters. All of the results are obtained in terms of LMIs. With the powerful LMI toolbox, it is very convenient to solve these problems. The illustrative examples show that this method is effective to determine the robust stability and related stability margin of dynamic discrete interval systems.

Key words: discrete interval systems; quadratic stability; stability margin; linear matrix inequality

1 引言(Introduction)

近年来关于区间系统的鲁棒稳定性研究已引起了国内外控制界的广泛关注, 取得了许多成果^[1~13]. 当然, 大部分都是保证区间矩阵鲁棒稳定的充分条件. 其中的充分必要条件, 可分为两类. 一是基于区间矩阵的有限划分, 但在每一子区间上应用的仍然是充分条件(如文献[4,5]). 二是基于所有顶点或棱面矩阵的判别(如文献[6]提出了区间矩阵鲁棒稳定, 当且仅当所有的二维棱面稳定). 文献[7]基于顶点矩阵的适当变换, 提出了充分必要条件. 通过关键顶点矩阵的引入, 表面上似乎减少了顶点判别数, 但事实上其关键顶点的标识过程已经把所有顶点都处理了一遍. 这些基于顶点或棱面的判据, 计算量都相当庞大, 通常仅具理论意义. 例如, 对于 4×4 维区间矩阵, 其顶点个数为 65536, 二维棱面数达到 1966080. 因此, 寻求简单而有效的区间矩阵鲁棒稳定性判据仍然具有深远的理论和实际意义. 由

于二次稳定性原理在处理不确定系统鲁棒稳定性问题时的方便性和有效性, 已有学者把其应用于区间系统的研究中, 如文献[11~13]基于二次稳定性原理分别给出了区间矩阵鲁棒稳定的充分条件. 虽然有些文献同时研究了连续与离散区间系统的稳定性问题, 但两者之间还是存在较大的差别. 本文在上述文献的基础上, 研究了离散区间系统的二次稳定性问题, 提出了动态离散区间系统二次稳定的充分与必要条件, 结论以线性矩阵不等式的形式给出.

2 问题描述(Problem formulation)

考虑动态离散区间系统

$$x(k+1) = Ax(k), \quad (1)$$

其中 $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 分别为系统(1)的状态和系统矩阵, 记 $A^m = [a_{ij}^m]_{n \times n}$, $A^M = [a_{ij}^M]_{n \times n}$, 则

$$[A^m, A^M] = \{[a_{ij}]: a_{ij}^m \leq a_{ij} \leq a_{ij}^M, 1 \leq i, j \leq n\}, \quad (2)$$

其中 A^m, A^M 是已知的实矩阵. 若令

$$A_0 = \frac{1}{2}[A^m + A^M], \quad (3)$$

$$\Delta A = \frac{1}{2}[A^M - A^m], \quad (4)$$

则区间矩阵 A 可表示为

$$A = A_0 + \sum_{i,j=1}^n e_i f_{ij} e_j^T, \quad |f_{ij}| \leq \Delta a_{ij}, \quad (5)$$

其中 $e_i \in \mathbb{R}^n$ 表示第 i 元素为 1, 其余元素为 0 的列矢量. 本文研究动态离散区间系统(1)的二次稳定性问题, 这里不妨假定 A_0 稳定, 否则研究系统(1)的稳定性没有意义.

定义 1 如果存在对称正定矩阵 P , 使得对于所有 $A \in [A^m, A^M]$, 满足 Lyapunov 不等式

$$A^T P A - P < 0, \quad (6)$$

则称动态离散区间系统(1)是二次稳定的.

引理 1 动态离散区间系统(1)是二次稳定的, 当且仅当存在对称正定矩阵 P , 使得对于所有 $A \in [A^m, A^M]$, 满足线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} -P & A^T P \\ P A & -P \end{bmatrix} < 0. \quad (7)$$

证 由 Schur 补条件可知, 式(6)与(7)等价.

对于动态离散区间系统(1), 在研究其稳定性问题时, 还经常需要考虑其稳定裕度问题. 为此, 引入 σ -稳定的概念.

定义 2 给定 $0 < \sigma \leq 1$, 如果存在对称正定矩阵 P , 使得对于所有 $A \in [A^m, A^M]$, 满足 Lyapunov 不等式

$$\frac{1}{\sigma^2} A^T P A - P < 0, \quad (8)$$

则称动态离散区间系统(1)是二次 σ -稳定的, 相应的稳定裕度为 $M = 1 - \sigma$.

注 1 显然, 二次稳定只是二次 σ -稳定在 $\sigma = 1$ 时的特例.

引理 2 给定 $0 < \sigma \leq 1$, 动态离散区间系统(1)是二次 σ -稳定的, 当且仅当存在对称正定矩阵 P , 使得对于所有 $A \in [A^m, A^M]$, 满足线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} -\sigma^2 P & A^T P \\ P A & -P \end{bmatrix} < 0, \quad (9)$$

相应的稳定裕度为 $M = 1 - \sigma$.

引理 3^[14] 设 X, Y, F 为具有合适维数的实矩阵, 其中 $F^T F \leq I$, 则对任意参数 $\lambda > 0$, 满足

$$X F Y + Y^T F^T X^T \leq \lambda X X^T + \frac{1}{\lambda} Y^T Y. \quad (10)$$

定义 3 矩阵 A 称为 M -矩阵, 如果其非对角元素均非负; 矩阵 A 称为拟 M -矩阵, 如果存在符号

矩阵

$$S = \text{diag}\{s_1, s_2, \dots, s_n\}, \quad s_i = \pm 1, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (11)$$

使得 SAS 为 M -矩阵. 矩阵 A 称为非负矩阵, 如果其所有元素均非负; 矩阵 A 称为拟非负矩阵, 如果存在符号矩阵 S , 使得 SAS 为非负矩阵.

引理 4 设对称矩阵 $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 对所有容许的不确定性 δ 满足

$$Y = Y_0(\delta) + \delta_{ij}(e_i e_j^T + e_j e_i^T) < 0, \quad |\delta_{ij}| \leq \bar{\delta}_{ij}. \quad (12)$$

若 $Y_0(\delta)$ 是拟 M -矩阵, 则存在参数 $\lambda > 0$, 使得

$$Y_0(\delta) + \lambda \delta_{ij}^2 e_i e_i^T + \frac{1}{\lambda} e_j e_j^T < 0. \quad (13)$$

证 只需证明 Y 与

$$\bar{Y} = Y_0(\delta) + \lambda \delta_{ij}^2 e_i e_i^T + \frac{1}{\lambda} e_j e_j^T$$

具有相同的最大特征值. 不失一般性, 可假定 $Y_0(\delta)$ 是 M -矩阵, 否则, 若 $Y_0(\delta)$ 是拟 M -矩阵, 则存在符号矩阵 S , 使得 $S Y_0(\delta) S$ 是 M -矩阵. 因此只需证明 $S Y S$ 与 $S \bar{Y} S$ 具有相同的最大特征值.

设 $\lambda_{\max}$ 是 Y 的最大特征值, $v \in \mathbb{R}^n (v^T v = 1)$ 为相应的特征向量, 则

$$\lambda_{\max} = v^T Y v = v^T Y_0(\delta^*) v + 2\bar{\delta}_{ij} v_i v_j.$$

由于 $Y_0(\delta^*)$ 是 M -矩阵, 所以 v 是非负向量(即所有元素均非负). 而且, 当 $\bar{\delta}_{ij}$ 非零时, v_i, v_j 也非零. 取

$\lambda_{ij} = \frac{v_j}{\bar{\delta}_{ij} v_i}$, 则很容易确定 $\lambda_{\max}, v$ 是 $\bar{Y}$ 的特征值与相应的特征向量. 由于 $\bar{Y}$ 是 M -矩阵, 因此进一步可确定 $\lambda_{\max}, v$ 也是 $\bar{Y}$ 的最大特征值与相应的特征向量.

3 主要结果(Main results)

定理 1 给定 $0 < \sigma \leq 1$, 动态离散区间系统(1)是二次 σ -稳定的, 如果存在对称正定矩阵 P , 参数 $\lambda_{ij} > 0, i, j = 1, 2, \dots, n$, 满足

$$\begin{bmatrix} -\sigma^2 P + \sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij} \Delta a_{ij}^2 e_j e_j^T & A_0^T P & 0 \\ P A_0 & -P & U \\ 0 & U^T & -V \end{bmatrix} < 0, \quad (14)$$

其中

$$U = [P e_1 \cdots P e_n \quad \cdots \quad P e_1 \cdots P e_n] = [P \cdots P], \quad (15)$$

$$V = \text{diag}\{\lambda_{11} \cdots \lambda_{n1} \cdots \lambda_{1n} \cdots \lambda_{nn}\}. \quad (16)$$

相应的稳定裕度为 $M = 1 - \sigma$. 该条件也是必要的,

如果 A 或 $-A$ 是拟非负矩阵.

证 充分性. 利用引理 3, 对任意参数 $\lambda_{ij} > 0$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, 有

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -\sigma^2 P & A^T P \\ PA & -P \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\sigma^2 P & A_0^T P \\ PA_0 & -P \end{bmatrix} + \\ \sum_{i,j=1}^n \left(\begin{bmatrix} 0 \\ Pe_i \end{bmatrix} f_{ij} [e_j^T \ 0] + \begin{bmatrix} e_j \\ 0 \end{bmatrix} f_{ij} [0 \ e_i^T P] \right) &\leq \\ \begin{bmatrix} -\sigma^2 P & A_0^T P \\ PA_0 & -P \end{bmatrix} + \sum_{i,j=1}^n \left(\lambda_{ij} \Delta a_{ij}^2 \begin{bmatrix} e_j \\ 0 \end{bmatrix} [e_j^T \ 0] + \right. \\ \left. \frac{1}{\lambda_{ij}} \begin{bmatrix} 0 \\ Pe_i \end{bmatrix} [0 \ e_i^T P] \right) &< 0, \end{aligned}$$

由引理 2 可知, 动态离散区间系统(1)是二次 σ -稳定的.

必要性. 考虑到 A 满足式(8)或(9)等价于 $-A$ 满足式(8)或(9), 故只考虑 A 是拟非负矩阵的情形.

设动态离散区间系统(1)是二次 σ -稳定的, 则由引理 2 可知, 存在对称正定矩阵 P (进一步, 由于 A 是拟非负矩阵, P 可取为对角矩阵, 即 $P = \text{diag}\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, $p_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$) 满足线性矩阵不等式

$$\begin{aligned} S_{00} = \begin{bmatrix} -\sigma^2 P & A^T P \\ PA & -P \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\sigma^2 P & A_0^T P \\ PA_0 & -P \end{bmatrix} + \\ \sum_{i,j=1}^n \left(\begin{bmatrix} 0 \\ Pe_i \end{bmatrix} f_{ij} [e_j^T \ 0] + \begin{bmatrix} e_j \\ 0 \end{bmatrix} f_{ij} [0 \ e_i^T P] \right) &< 0. \end{aligned}$$

定义

$$T_{11} = S_{00} - \left(\begin{bmatrix} 0 \\ Pe_1 \end{bmatrix} f_{11} [e_1^T \ 0] + \begin{bmatrix} e_1 \\ 0 \end{bmatrix} f_{11} [0 \ e_1^T P] \right),$$

很容易确定 T_{11} 为拟 M -矩阵. 利用引理 4, 存在参数 $\lambda_{11} > 0$, 满足

$$S_{11} = T_{11} + \lambda_{11} \Delta a_{11}^2 \begin{bmatrix} e_1 \\ 0 \end{bmatrix} [e_1^T \ 0] + \frac{1}{\lambda_{11}} \begin{bmatrix} 0 \\ Pe_1 \end{bmatrix} [0 \ e_1^T P] < 0.$$

定义

$$T_{12} = S_{11} - \left(\begin{bmatrix} 0 \\ Pe_1 \end{bmatrix} f_{12} [e_2^T \ 0] + \begin{bmatrix} e_2 \\ 0 \end{bmatrix} f_{12} [0 \ e_1^T P] \right),$$

很容易确定 T_{12} 也为拟 M -矩阵. 利用引理 4, 存在参数 $\lambda_{12} > 0$, 满足

$$S_{12} =$$

$$T_{12} + \lambda_{12} \Delta a_{12}^2 \begin{bmatrix} e_2 \\ 0 \end{bmatrix} [e_2^T \ 0] + \frac{1}{\lambda_{12}} \begin{bmatrix} 0 \\ Pe_1 \end{bmatrix} [0 \ e_1^T P] < 0.$$

以此类推, 最终可得

$$S_{nn} =$$

$$\begin{bmatrix} -\sigma^2 P & A_0^T P \\ PA_0 & -P \end{bmatrix} + \sum_{i,j=1}^n \left(\lambda_{ij} \Delta a_{ij}^2 \begin{bmatrix} e_j \\ 0 \end{bmatrix} [e_j^T \ 0] + \frac{1}{\lambda_{ij}} \begin{bmatrix} 0 \\ Pe_i \end{bmatrix} [0 \ e_i^T P] \right) < 0.$$

必要性得证.

通过对式(5)的观察, 不难发现, 上述结果可推广到离散参数不确定系统, 即

$$x(k+1) = (A_0 + \sum_{i=1}^r \epsilon_i A_i) x(k), \quad (17)$$

其中不确定参数 $|\epsilon_i| \leq \bar{\epsilon}_i, A_0, A_i$ 均为已知的实矩阵. 这里不妨假定 A_0 稳定, 否则研究系统(17)的稳定性没有意义.

针对离散参数不确定系统(17), 套用二次 σ -稳定的概念, 可得到如下结论.

定理 2 给定 $0 < \sigma \leq 1$, 离散参数不确定系统(17)是二次 σ -稳定的, 如果存在对称正定矩阵 $P, \Lambda_i, i = 1, 2, \dots, r$, 满足

$$\begin{bmatrix} -\sigma^2 P + \sum_{i=1}^r \bar{\epsilon}_i^2 \Lambda_i & A_0^T P & 0 & \dots & 0 \\ PA_0 & -P & PA_1 & \dots & PA_r \\ 0 & A_1^T P & -\Lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & A_r^T P & 0 & \dots & -\Lambda_r \end{bmatrix} < 0, \quad (18)$$

相应的稳定裕度为 $M = 1 - \sigma$.

注 2 离散参数不确定系统(17)中, 若 $A_i (i = 1, 2, \dots, r)$ 具有秩-1 型分解, 则可得到与定理 1 结论类似的充分与必要条件, 具体描述可参照定理 1, 这里不再赘述.

4 算法与实例 (Algorithm and examples)

本文基于二次稳定性原理提出了动态离散区间系统的鲁棒稳定性条件, 其结果以线性矩阵不等式的形式给出. 算法可利用成熟的 LMI 工具, 求解非常方便. 下面列举了一些典型实例, 来说明本文中所给方法的有效性.

例 1 考虑文献[8, 9]所给实例, 其中

$$A^m = \begin{bmatrix} -0.20 & -0.34 \\ -0.24 & -0.16 \end{bmatrix}, \quad A^M = \begin{bmatrix} 0.16 & 0.02 \\ 0.12 & 0.20 \end{bmatrix}.$$

利用定理 1, 直接就可判定该离散区间系统二次 σ -稳定, $\sigma = 0.4690$, 进而稳定裕度 $M = 0.5310$. 线性矩阵不等式(14)的一个可行解为

$$P = \begin{bmatrix} 4.5609 & 0.0923 \\ 0.0923 & 6.5347 \end{bmatrix}, \quad \lambda = \begin{bmatrix} 11.9915 & 14.3231 \\ 13.9204 & 17.5778 \end{bmatrix}.$$

为了比较本文与文献[8, 9]中的结果, 特将所得稳定

裕度列于表1.由表1可见,本文所得稳定裕度 M 明显大于文献[8,9],具有较少的保守性.

表1 本文方法与其他方法结果比较
Table 1 Comparison between the proposed method and other methods

方法	文献[8]	文献[9]	本文
稳定裕度 M	0.11	0.144	0.5310

例2 考虑如下离散参数不确定系统

$$A(\epsilon) = \begin{bmatrix} 0.5+0.2\epsilon_1 & -0.25 & 0 & 1+0.2\epsilon_1 \\ 0.8 & 0 & 1 & 0 \\ 0.3\epsilon_2 & 0 & -0.5 & -0.2+0.3\epsilon_2 \\ 0 & 0.25 & 0.5 & 0 \end{bmatrix},$$

当 $|\epsilon_1| \leq 1, |\epsilon_2| \leq 1$ 时,判定其鲁棒稳定性.

上述参数不确定系统可描述为秩-1型分解,即

$$A(\epsilon) = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.25 & 0 & 1 \\ 0.8 & 0 & 1 & 0 \\ 0.3 & 0 & -0.5 & -0.2 \\ 0 & 0.25 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \epsilon_1 [1 \ 0 \ 0 \ 1] + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.3 \\ 0 \end{bmatrix} \epsilon_2 [1 \ 0 \ 0 \ 1].$$

根据定理1的类似结论,可直接判定该参数不确定系统二次 σ -稳定, $\sigma = 0.9354$,进而得稳定裕度 $M = 0.0646$. 线性矩阵不等式(14)的一个可行解为

$$P = \begin{bmatrix} 3.5197 & -0.5288 & 0.5061 & 2.9800 \\ -0.5288 & 1.0746 & 0.4415 & -0.8289 \\ 0.5061 & 0.4415 & 3.3067 & 1.4595 \\ 2.9800 & -0.8289 & 1.4595 & 8.2416 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_1 = 0.5576, \lambda_2 = 0.4994.$$

5 结论(Conclusions)

本文基于二次稳定性原理提出了动态离散区间系统鲁棒稳定的充分与必要条件.尽管具有二次稳定性本身所固有的保守性,但与现有文献的其它充分条件相比较,仍显示出其有效性.该结果还可推广到离散参数不确定系统的鲁棒稳定性分析.本文中的所有结论均以线性矩阵不等式的形式给出,目前LMI的解法已非常成熟,例如可直接利用Matlab的LMI工具箱求解.

参考文献(References):

[1] MANSOUR M. Robust stability of interval matrices [C]// *Proc of*

the 28th IEEE Conf on Decision and Control. Tampa, Florida, USA: IEEE Control Systems Society, 1989:46-51.

- [2] SEZER M E, SILJAK D D. On stability of interval matrices [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(2): 368-371.
- [3] MAO W J, SUN Y X. Criteria for robust stability of dynamic interval systems [C]// *Proc of the 35th IEEE Conf on Decision and Control*. Kobe, Japan: IEEE Control Systems Society, 1996: 45-46.
- [4] ROHN J. An algorithm for checking stability of symmetric interval matrices [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1996, 41(1): 133-136.
- [5] WANG K, MICHEL A N, LIU D. Necessary and sufficient conditions for the Hurwitz and Schur stability of interval matrices [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(6): 1251-1255.
- [6] XIAO Y, UNBEHAUEN R. Robust Hurwitz and Schur stability test for interval matrices [C]// *Proc of the 39th IEEE Conf on Decision and Control*. Sydney, Australia: IEEE Control Systems Society, 2000: 4209-4214.
- [7] YEDAVALLI R K. An improved extreme point solution for checking robust stability of interval matrices with much reduced vertex set and combinatorial effort [C]// *Proc of American Control Conference*. Arlington, VA, USA: American Automatic Control Council, 2001: 3902-3907.
- [8] YUANG Y T, SHAO C S. Stability analysis of dynamic interval systems [J]. *Int J Control*, 1989, 49(4): 1401-1408.
- [9] XU S J, RACHID A. Generalized Gerschgorin disc and stability analysis of dynamic interval systems [C]// *Proc of UKACC Int Conf on Control*. Exeter, UK: IEE Conference Publication, 1996, 1: 276-280.
- [10] 年晓红. 离散区间动力系统稳定性的新判据[J]. *控制理论与应用*, 1999, 16(4): 558-561.
(NIAN Xiaohong. New criteria on the stability of interval discrete dynamic systems [J]. *Control Theory & Applications*. 1999, 16(4): 558-561.)
- [11] HAN H S, LEE J G. Stability analysis of interval matrices by Lyapunov function approach including ARE [J]. *Control Theory & Advanced Technology*, 1993, 9(3): 745-757.
- [12] PADMANABHAN P, HOLLOT C V. Quadratic stability of interval matrices [C]// *Proc of the 32nd IEEE Conf on Decision and Control*. San Antonio, Texas, USA: IEEE Control Systems Society, 1993: 2010-2011.
- [13] GAROFALO F, CELENTANO G, GLIELMO L. Stability robustness of interval matrices via Lyapunov quadratic forms [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1993, 38(2): 281-284.
- [14] PETERSEN I R. A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems [J]. *Systems & Control Letters*, 1987, 8(3): 351-357.

作者简介:

毛维杰 (1969—),男,1991年毕业于浙江大学,1996年获浙江大学工学博士学位,现为浙江大学副教授,主要研究方向为电气传动与控制、时滞系统控制、解耦控制、鲁棒控制等理论与应用, E-mail: wjmao@ipc.zju.edu.cn.