

不确定离散时间马尔可夫切换时滞系统的保成本控制

陈武华^{1,2}, 关治洪², 卢小梅¹

(1. 广西大学 数学与信息科学学院, 广西 南宁, 530004; 2. 华中科技大学 控制科学与工程系, 湖北 武汉, 430074)

摘要: 研究了一类不确定具有模式依赖时滞马尔可夫切换系统的保成本控制问题. 首先将系统变换为等价的奇异系统, 并对等价的奇异系统, 构造出一个新型随机 Lyapunov 泛函. 然后运用此 Lyapunov 泛函, 基于线性矩阵不等式, 得到了无记忆状态反馈保成本控制器存在的与时滞相关的充分条件. 举例结果表明, 与现有方法相比, 用本文方法可以使成本指标取得较小的成本上界.

关键词: 保成本控制; 马尔可夫切换系统; 离散时间系统; 时滞相关; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP13, TP273 **文献标识码:** A

Guaranteed cost control for uncertain discrete-time Markovian jump systems with mode-dependent time-delays

CHEN Wu-hua^{1,2}, GUAN Zhi-hong², LU Xiao-mei¹

(1. College of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning Guangxi 530004, China

2. Department of Control Science and Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan Hubei 430074, China)

Abstract: The problem of guaranteed cost control for a class of uncertain discrete-time Markovian jump systems with mode-dependent time-delays is studied. First, by representing the system in the equivalent form of descriptor system, a new type of stochastic Lyapunov functional for the equivalent descriptor system was constructed. Then, using this new Lyapunov functional, a novel delay-dependent sufficient condition for the existence of memoryless state feedback guaranteed cost controller was derived based on linear matrix inequalities. Finally, a numerical example was presented to show that the proposed method can produce a lower guaranteed cost than the existing methods.

Key words: guaranteed cost control; Markovian jump system; discrete-time system; delay-dependent criteria; linear matrix inequality

1 引言(Introduction)

马尔可夫切换系统是一类重要的混合系统, 由于该系统可描述系统结构的突然变化, 因而受到了人们的普遍关注^[1]. 近年来, 对带有时滞的马尔可夫切换系统的研究也取得了很大进展^[2~6]. 最近, 文献[4]研究了离散时间马尔可夫切换时滞系统的保成本控制问题. 值得注意的是, 尽管文献[4]采用的是与时滞无关的设计方法, 但得到的成本上界却依赖于时滞的大小. 这启发我们采用具有较少保守性的与时滞相关的设计方法可能取得较小的成本上界.

本文通过奇异系统变换方法, 构造出了新型随机 Lyapunov 泛函, 得到了离散时间马尔可夫切换时滞系统状态反馈保成本控制器存在的与时滞相关的充分条件. 数值例子显示, 相对于文献[4]的方法, 本文的方法可以使成本指标取得较小的成本上界.

2 主要结果(Main results)

记 $\{r_k, k \geq 0\}$ 为一马尔可夫链, 状态集为 $S = \{1, \dots, N\}$, 转移矩阵 $P = (p_{ij}), i, j \in S$, 即

$$\Pr \{r_{k+1} = j \mid r_k = i\} = p_{ij}, i, j \in S.$$

考虑具有 N 个模式的离散时间混合系统, 假设系统模式间的切换由马尔可夫链 $\{r_k, k \geq 0\}$ 控制, 且系统参数具有范数有界的不确定性. 设系统描述为

$$\begin{cases} x_{k+1} = A(k, r_k)x_k + A_d(k, r_k)x_{k-\tau(r_k)} + B(k, r_k)u_k, \\ x_s = \phi(s), s = -\bar{\tau}, -\bar{\tau} + 1, \dots, -1, 0, \end{cases} \quad (1)$$

这里 $x_k \in \mathbb{R}^n$ 为系统状态, $\tau(r_k)$ 为正整数, 表示系统在模式 r_k 时的时滞, $\bar{\tau} = \max \{\tau(i), i \in S\}$, $u_k \in \mathbb{R}^p$ 为系统控制输入向量. 对每个 $i \in S, A(k, i) = A(i) + \Delta A(k, i), A_d(k, i) = A_d(i) + \Delta A_d(k, i),$

$B(k, i) = B(i) + \Delta B(k, i)$, 这里 $A(i), A_d(i)$ 与 $B(i)$ 为已知的具有合适维数的常矩阵, $\Delta A(k, i), \Delta A_d(k, i), \Delta B(k, i)$ 为未知矩阵函数, 表示系统的不确定性. 假定 $[\Delta A(k, i) \Delta A_d(k, i) \Delta B(k, i)] = E(i)F(k, i)[H_1(i) H_2(i) H_3(i)]$, $E(i), H_j(i), j = 1, 2, 3$, 为具有合适维数的常矩阵, $F(k, i)$ 为未知矩阵函数, 且满足 $F^T(k, i)F(k, i) \leq I$. 定义系统(1)的成本函数为

$$J = E\left[\sum_{k=0}^{\infty} x_k^T Q(r_k) x_k + u_k^T R(r_k) u_k\right], \quad (2)$$

这里 $E[\cdot]$ 表示数学期望, $Q(i), R(i), i \in S$ 为给定的正定阵.

本文的目标是设计无记忆状态反馈控制器 $u_k = K_{r_k} x_k$, 使得相应闭环系统随机稳定^[2] 且成本函数(2) 的值小于某个上界 J_0 .

为方便起见, 我们引入下列记号:

$$\underline{p} = \min \{p_{ii}, i \in S\},$$

$$\underline{\tau} = \min \{\tau(i), i \in S\}, \quad \tau_a(i) = \sum_{j=1}^N p_{ij} \tau(j),$$

$$\mu = 1 + (1 - \underline{p})(\bar{\tau} - \underline{\tau}),$$

$$\rho_i = \tau_a(i) + (1 - \underline{p})(\bar{\tau} - \underline{\tau})(\bar{\tau} + \underline{\tau} - 1)/2.$$

首先分析系统(1)当 $u_k = 0$ 时的鲁棒性能.

定理 1 考虑不确定时滞系统(1), 设 $u_k = 0$. 若对每个 $i \in S$, 存在常数 $\alpha_i, n \times n$ 矩阵 $P_i > 0, P_{1i}, P_{2i}, W_{1i}, W_{2i}, W_{3i}, M_{1i}, M_{2i}$ 及 $S_1 > 0, S_2 > 0$, 使得下列线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \Omega_{1i} & \Omega_{2i} & P_{1i}^T A_d(i) - M_{1i} + \alpha_i H_1^T(i) H_2(i) & P_{1i}^T E(i) \\ * & \Omega_{3i} & P_{2i}^T A_d(i) - M_{2i} & P_{2i}^T E(i) \\ * & * & \alpha_i H_2^T(i) H_2(i) - S_2 & 0 \\ * & * & 0 & -\alpha_i I \end{bmatrix} < 0,$$

$$\begin{bmatrix} W_{1i} & W_{2i} & M_{1i} \\ W_{2i}^T & W_{3i} & M_{2i} \\ M_{1i}^T & M_{2i}^T & S_i \end{bmatrix} \geq 0,$$

这里 I 为单位矩阵, 且有

$$\Omega_{1i} = P_{1i}^T (A(i) - I) + (A^T(i) - I) P_{1i} + \alpha_i H_1^T(i) H_1(i) + \tau(i) W_{1i} + M_{1i} + M_{1i}^T + \bar{P}_i - P_i + \mu S_2 + Q(i),$$

$$\Omega_{2i} = (A^T(i) - I) P_{2i} + \bar{P}_i - P_{1i}^T + \tau(i) W_{2i} + M_{2i}^T,$$

$$\Omega_{3i} = -P_{2i} - P_{2i}^T + \bar{P}_i + \tau(i) W_{3i} + \rho_i S_1,$$

其中 $\bar{P}_i = \sum_{j=1}^N p_{ij} P_j$. 则对所有不确定性, 系统(1) 随

机稳定且成本函数(2)满足

$$J \leq J_0(P_{r_0}, S_1, S_2) =$$

$$\begin{aligned} & \phi^T(0) P_{r_0} \phi(0) + \sum_{\theta=-\tau(r_0)+1}^0 \sum_{l=-1+\theta}^{-1} y_l^T S_1 y_l + \\ & \sum_{l=-\tau(r_0)}^{-1} \phi^T(l) S_2 \phi(k) + (1 - \\ & p) \sum_{\theta=-\tau+1}^{-\tau} \sum_{l=\theta}^{-1} [y_l^T S_1 y_l (l - \theta + 1) + \phi^T S_2 \phi_l], \end{aligned}$$

其中 $y_l = x_{l+1} - x_l$.

证 将系统(1) ($u_k = 0$) 表示为等价的奇异系统

$$x_{k+1} = x_k + y_k, \quad (3)$$

$$0 = -y_k + (A(k, r_k) + A_d(k, r_k) - I)x_k -$$

$$A_d(k, r_k) \sum_{l=k-\tau(r_k)}^{k-1} y_l. \quad (4)$$

对系统(3), (4)构造随机 Lyapunov 泛函

$$V(X_k, Y_k, r_k) =$$

$$\begin{aligned} & V_0(X_k, r_k) + \sum_{\theta=-\tau(r_k)+1}^0 \sum_{l=-1+\theta}^{-1} y_l^T S_1 y_l + \sum_{l=k-\tau(r_k)}^{k-1} x_l^T S_2 x_l + \\ & (1 - p) \sum_{\theta=-\tau+1}^{-\tau} \sum_{l=\theta}^{k-1} [y_l^T S_1 y_l (l - k - \theta + 1) + x_l^T S_2 x_l], \end{aligned}$$

其中 $V_0(X_k, r_k) = x_k^T P_{r_k} x_k, X_k = (x_k, \dots, x_{k-\tau(k)}), Y_k = (y_k, \dots, y_{k-\tau(k)})$. 设在时间 k 系统模式为 i , 即 $r_k = i$, 由于在时间 $k+1$, 系统可能转移到任何模式 $r_{k+1} = j$, 故

$$E[V_0(X_{k+1}, Y_{k+1}, r_{k+1}) | X_k, Y_k, r_k = i] - V_0(X_k, i) =$$

$$E[(x_k + y_k)^T P_{r_{k+1}} (x_k + y_k) | X_k, Y_k, r_k = i] - x_k^T P_i x_k =$$

$$\sum_{j=1}^N p_{ij} (x_k + y_k)^T P_j (x_k + y_k) - x_k^T P_i x_k =$$

$$2\eta_k^T G_i^T [y_k^T \quad 0]^T + x_k^T (\bar{P}_i - P_i) x_k + y_k^T \bar{P}_i y_k,$$

其中 $\eta_k^T = [x_k^T \quad y_k^T], G_i = \begin{bmatrix} \bar{P}_i & 0 \\ P_{1i} & P_{2i} \end{bmatrix}$. 然后由上述

方法, 并结合文献^[6,7]的技巧, 就可以完成定理 1 的证明.

由定理 1, 可以得到如下系统(1)保成本控制器存在条件.

定理 2 考虑不确定时滞系统(1). 若对每个 $i \in S$ 及预先给定的常数 ϵ_i , 存在正常数 $\alpha_i, n \times n$ 矩阵 $X_i > 0, Y_i, Z_i, N_{1i}, N_{2i}, N_{3i}, V_i$ 及 $U_1 > 0, U_2 > 0$, 使得下列线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \Xi_{1i} & \Xi_{2i} & 0 & L_{2i} & \mu X_i & L_{11i} & \rho_i Z_i^T & X_i & V_i^T \\ * & \Xi_{3i} & L_{3i} & 0 & 0 & L_{12i} & \rho_i Y_i^T & 0 & 0 \\ 0 & * & -U_2 & U_2 H_2^T(i) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & -\alpha_i I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & -\mu U_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 & -X & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho_i U_1 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Q^{-1}(i) & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R^{-1}(i) \end{bmatrix} < 0,$$

$$\begin{bmatrix} N_{1i} & N_{2i} & 0 \\ N_{2i}^T & N_{3i} & \varepsilon_i A_d(i) U_1 \\ 0 & \varepsilon_i U_1 A_d^T(i) & U_1 \end{bmatrix} \geq 0,$$

其中

$$\begin{aligned} \Xi_{1i} &= -X_i + \tau(i)N_{1i}, \\ \Xi_{2i} &= X_i[A^T(i) + \varepsilon_i A_d^T(i) - I] + V_i^T B^T(i) - Z_i^T + \tau(i)N_{2i}, \\ \Xi_{3i} &= -Y_i - Y_i^T + \alpha_i E(i)E^T(i) + \tau(i)N_{3i}, \\ X &= \text{diag}\{X_1, X_2, \dots, X_N\}, \\ L_{11i} &= [\sqrt{p_{i1}}(X_i + Z_i^T), \dots, \sqrt{p_{iN}}(X_i + Z_i^T)], \\ L_{12i} &= [\sqrt{p_{i1}}Y_i^T, \dots, \sqrt{p_{iN}}Y_i^T], \\ L_{2i} &= X_i H_i^T(i) + V_i^T H_3^T(i), \quad L_{3i} = (1 - \varepsilon_i)A_d(i)U_2, \\ \text{则存在保成本控制器 } u_k &= V_{r_k} X_{r_k}^{-1} x_k, \text{ 且成本函数(2)} \\ \text{满足 } J &< J_0(X_{r_0}^{-1}, U_1^{-1}, U_2^{-1}). \end{aligned}$$

3 数值例子(Numerical example)

对系统(1)和性能指标(2), 设 $S = \{1, 2\}$, $\tau(1) = 1$, $\tau(2) = 2$, 转移矩阵 $P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$. 系统其他数据如下:

$$\begin{aligned} A(1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0.01 \\ 0.01 & 0.7 \end{bmatrix}, \quad A(2) = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.02 \\ 0.01 & 0.6 \end{bmatrix}, \\ B(1) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B(2) = \begin{bmatrix} 1.02 \\ 0.3 \end{bmatrix}, \\ A_d(1) &= 0.1I, \quad A_d(2) = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.01 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \\ H_1(1) &= \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad H_1(2) = \begin{bmatrix} 0.12 & 0.1 \\ 0 & 0.08 \end{bmatrix}, \\ H_2(1) &= \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 \\ -0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad H_2(2) = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, \\ H_3(1) &= -\begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad H_3(2) = -\begin{bmatrix} 0.15 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \\ E(1) &= I, \quad E(2) = 0.8I, \quad Q(1) = I, \quad R(1) = 1, \end{aligned}$$

$$Q(2) = 1.5I, \quad R(2) = 1.2, \quad r_0 = 1,$$

$$x(-2) = [0.4 \quad 0.5]^T,$$

$$x(-1) = [0.8 \quad 0.7]^T, \quad x(0) = [0.3 \quad -0.6]^T.$$

由定理2, 取 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, 得到保成本控制器 $u_k = K_i x_k, i \in S$, 其中

$$K_1 = [-1.3440 \quad -0.3223],$$

$$K_2 = [-0.6067 \quad -0.1875],$$

相应的成本值为 1.6216. 然而, 若运用文献[4]的定理4.1 到此例子, 得到的成本值为 58.0343. 由此可见, 用本文的方法可以较大地减少成本值.

4 结论(Conclusion)

本文针对具有模式依赖时滞的不确定离散时间马尔可夫切换系统, 提出了与时滞相关的保成本控制设计方法. 本文方法的基本思想, 是将原系统变换为等价的奇异系统, 对奇异系统构造出新型随机 Lyapunov 泛函, 由此 Lyapunov 泛函, 基于线性矩阵不等式, 得到系统保成本控制器存在的与时滞相关的充分条件. 由于奇异系统方法, 只需对较少的向量积放大, 因此保守性较低. 数值例子也表明, 同现有的与时滞无关的设计方法相比, 用本文方法可以使成本指标取得较小的成本上界.

参考文献(References):

- [1] COSTA O L V, FRAGOSO M D. Stability results for discrete-time linear systems with Markovian jumping parameters [J]. *J of Mathematical Analysis and Applications*, 1993, 179(1): 154 - 178.
- [2] BOUKAS E K, LIU Z K. Robust H_∞ control of discrete-time Markovian jump linear systems with mode-dependent time-delays [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2001, 46(12): 1918 - 1924.
- [3] CAO Y Y, LAM J. Robust control of uncertain Markovian jump systems with time-delay [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2000, 45(1): 77 - 83.

考虑系统的不确定性.由仿真曲线可看出,虽然这3种控制器的阶次不同,但其控制效果几乎没有差别.因此,本文提出的降阶控制器设计方法,得到的控制器,保持了良好的性能.

6 结束语(Conclusion)

动态输出反馈控制,等价于对象与动态反馈系统构成的组合系统,利用动态反馈系统的输出构成的静态输出反馈控制.本文利用系统的内外分解,构造系统的最优混合 H_2/H_∞ 降阶估值器,根据静态输出反馈控制器的设计方法,用降阶估值器的输出进行静态输出反馈,从而得到给定阶的动态输出反馈控制器.输出反馈控制器是用参数化的形式给出.设计一个 n_c 阶的混合 H_2/H_∞ 控制器,需要通过优化参数解两个耦合的 Riccati 方程和 Lyapunov 方程,方程的阶次为对象的阶次.文中给出了用迭代法求解参数化表示的控制器方法.

最后,用一个例子说明了给定阶控制器的设计方法.这个例子表明,文中提出的方法是有效的,解决了最优的给定阶控制器设计问题.

参考文献(References):

[1] DOYLE J C, GLOVER K, KHARGONEKAR P P, et al. State-space solutions to H standard H_2 and H_∞ control problems [J]. *IEEE Trans*

on Automatic Control, 1989, 34(8): 831 - 847.

- [2] DOYLE J, ZHOU K, GLOVER K. Mixed H_2 and H_∞ performance objectives II: optimal control [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(8): 1575 - 1587.
- [3] PAPANINI F. Convex methods for robust H_2 analysis of continuous-times systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1999, 44(2): 239 - 252.
- [4] STOORVOGEL A A. The robust H_2 control problem: A worst case design [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1993, 38(9): 1358 - 1370.
- [5] ANDERSON B D O, LIU Y. Controller reduction: concepts and approaches [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1989, 34(8): 802 - 812.
- [6] GODDARD P J, GLOVER K. Controller approximation: approaches for preserving H_∞ performance [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1998, 43(7): 858 - 871.
- [7] IWASAKI I, SKELTON R E. All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas [J]. *Automatica*, 1994, 30(8): 1307 - 1317.
- [8] MOHEIMANI R S O, PETERSEN I R. Optimal guaranteed cost control of uncertain systems via static and dynamic output feedback [J]. *Automatica*, 1996, 32(4): 575 - 579.

作者简介:

王进华 (1963 —),男,福州大学电气工程与自动化学院教授,2001年毕业于西北工业大学自动控制系,获工学博士学位,主要研究方向为非线性系统、 H_∞ 控制、鲁棒控制.

(上接第 601 页)

- [4] BOUKAS E K, LIU Z K. Guaranteed cost control for discrete-time Markovian jump linear system with mode-dependent time-delays [A] // *Proc of the 41th IEEE American Conf on Decision and Control* [C]. Las Vegas, Nevada, USA: [s. n.], 2002: 3794 - 3798.
- [5] 陈武华,关治洪,卢小梅.参数服从马尔可夫切换中立型时滞系统鲁棒 H_∞ 控制[J].控制理论与应用,2003,20(5):776 - 778.
(CHEN Wuhua, GUAN Zhihong, LU Xiaomei. Robust H_∞ control of neutral delay systems with Markovian jumping parameters [J]. *Control Theory & Applications*, 2003, 20(5): 776 - 778.)
- [6] CHEN Wuhua, XU J X, GUAN Zhihong. Guaranteed cost control for uncertain Markovian jump systems with mode-dependent delays [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2003, 48(12): 2270 - 2277.

- [7] CHEN Wuhua, GUAN Zhihong, LU Xiaomei. Delay-dependent guaranteed cost control for uncertain discrete-time systems with delay [J]. *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, 2003, 150(4): 412 - 416.

作者简介:

陈武华 (1967 —),男,副教授,从事时滞系统与随机系统鲁棒控制方面的研究, E-mail: wuhua-chen@163.com;

关治洪 (1955 —),男,博士,教授,博士生导师,研究兴趣为复杂系统的控制理论与应用、脉冲控制、神经网络和混沌控制等, E-mail: guanzh@public.wh.hb.cn;

卢小梅 (1969 —),女,讲师,主要从事时滞系统鲁棒控制方面的研究, E-mail: lu-xiaomei@126.com.