第 21 卷第 4 期
2004 年 8 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol.21 No.4
Aug. 2004

文章编号: 1000 - 8152(2004)04 - 0614 - 03

线性离散周期奇异系统的可解性与渐近稳定性

汤玉东, 邹 云
(南京理工大学自动化系, 江苏 南京, 210094)

摘要: 讨论了线性离散周期奇异系统初值问题的可解性和渐近稳定性问题. 首先分析总结了线性离散变系数奇异系统可解性及其广义状态解的一般概念. 在此基础上, 定义了线性离散变系数奇异系统的一致渐近稳定性, 并通过增加系统维数把线性离散周期奇异系统转化为线性定常奇异系统、从而得到了线性离散周期奇异系统可解和一致渐近稳定的充要条件.

关键词: 离散周期奇异系统; 一致渐近稳定性; 广义状态解

中图分类号: TP13 **文献标识码**: A

Solvability and asymptotic stability of linear discrete periodic singular systems

TANG Yu-dong, ZOU Yun
(Department of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing Jiangsu 210094, China)

Abstract: The notion of solvability and stability for linear discrete periodic singular systems is investigated. First, the general notion of solvability and generalized state solutions for linear discrete coefficient-vary singular systems are analyzed. Then, the definitions of solvability and stability for linear discrete periodic singular systems are proposed. Finally, by means of converting the linear discrete periodical singular systems into a class of dimension-augmented constant systems, some corresponding necessary and sufficient conditions for the solvability and asymptotic stability are presented based on existing works.

Key words: discrete periodic singular system; asymptotic stability; generalized state solutions

1 引言(Introduction)

自上世纪 70 年代中期起, 奇异系统理论就一直是国内外控制理论中的热点研究领域, 在线性定常情形已经形成了相当系统的理论体系[1]. 近年来, 在稳定性理论方面, 文献[2]讨论了结构稳定性的李雅普诺夫方法. 文献[3]将线性定常奇异系统的渐近稳定性的概念和结果推广到了 2-D 情形. 文献[4]则讨论了奇异系统在电力市场稳定性中的应用, 同时指出为了能和电力市场的实际运行情况吻合, 应当建立线性奇异离散周期系统. 然而, 相对说来, 时变系统的研究较为欠缺. 文献[5]讨论了离散情形的奇异系统两点边值问题的可解性; 文献[6]讨论了缓变系数奇异系统的稳定性; 文献[7]对更为广泛的非线性连续奇异系统的解析可解性和相关的计算方法作了相当系统的论述; 文献[8]就线性时变连续奇异系统的广义状态解和一致渐近稳定性问题进行了系统的讨论, 得到了部分与正常系统平行的结果. 文献[9]则讨论了周期奇异系统的可解性和可调节性(conditionability)问题. 本文基于文献[3], [6], 和[7]的方法和思想, 讨论了周期奇异系统可解性和一致渐近稳定性问题. 与文献[9]相比, 本文的主要结果在有关概念和方法上更为简洁、直观.

2 奇异离散系统渐近稳定性分析(Asymptotic stability analysis of singular discrete systems)

考虑如下的线性奇异离散系统:

$$E(k)x(k+1) = A(k)x(k),\quad x(0) = x_0,\ k = 0,1,2,\cdots \tag{1}$$

这里 $E(k), A(k) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x(k) \in \mathbb{R}^n$. 如果对某个确定的正整数 $\bar{\omega}$ 满足 $E(k+\bar{\omega}) = E(k)$, $A(k+\bar{\omega}) = A(k)$, 则称系统(1)为奇异周期离散系统. 显然, 要研究系统(1)的稳定性, 首先必须给出其可解性的定义. 实际上, 非线性连续奇异系统相容初值和由此出发所定义的经典意义下的可解性定义已经由文献[7]给出. 而对于给定的 x_0, 在离散的情形下, 也可

收稿日期: 2002 - 05 - 13; 收修改稿日期: 2003 - 05 - 19.
基金项目: 国家自然科学基金项目(60074007); 教育部资助优秀青年教师基金项目; 高等学校骨干教师资助计划项目.

以考虑采用文献[10]的方法定义相容的输入序列 $u(k)$. 然而,为了便于讨论起见,本文将采用类似于文献[3]中定义的由 Z-变换方法得到的广义状态解的存在性作为系统(1)的可解性定义,以避免所谓的相容性问题在数学上引起的不必要的麻烦. 与常线性奇异情形相类似[1,3],针对广义状态解得到的所有的结果对于作为其特例的经典意义下的相容解也是成立的. 限于篇幅,本文删除了关于系统(1)广义可解性及其广义状态解的一般定义,但下述定理中关于系统(1)的广义状态解的概念是显而易见的.

定理 1 周期奇异系统(1)可解的充要条件为: 存在有限复数 $s \in \mathbb{C}$ 使得

$$\det(Es - A) \neq 0. \tag{2}$$

其中 E, A 定义为

$$\begin{cases} E = \begin{bmatrix} E(1) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -A(2) & E(2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & -A(\bar\omega-1) & E(\bar\omega-1) & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -A(\omega) & E(\bar\omega) \end{bmatrix}, \\ A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & A(1) \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{3}$$

证 受文献[5]方法启发,若设

$$y(k) = [x(k\bar\omega) \ \cdots \ x((k+1)\bar\omega - 1)]^{\mathrm{T}},\ k = 0,1,2,\cdots, \tag{4}$$

则由式(1)可得如下线性定常系统:

$$Ey(k+1) = Ay(k),\ k = 0,1,2,\cdots. \tag{5}$$

其中 E, A 如式(3)所定义. 由文献[3]知,系统(5)可解的充要条件为式(2)成立,其广义状态解为

$$\Psi(k, y_0) = \begin{cases} T_k A y_0, & k \geq 1, \\ T_0 A y_0 + y_0, & k = 0. \end{cases} \tag{6}$$

且初始值 y_0 为相容的充分必要条件为 $T_0 A y_0 = 0$. 这里, T_k 由 Laurent 展式 $(Ez - A)^{-1} z = \sum_{k=-q}^{\infty} T_k z^{-k}$ 定义,而 $q \geq 0$ 为系统的指数(index). 显然

$$\varphi(0, x_0, u) = e_1 y_0, \tag{7a}$$

$$\varphi(l, x_0, u) = e_{l+1}[\Psi(0, y_0, v) - y_0],\ 0 < l < \bar\omega, \tag{7b}$$

$$\varphi(k\bar\omega + l, x_0, u) = e_{l+1}\Psi(k, y_0, v),\ k \geq 1,\ 0 \leq l < \bar\omega \tag{7c}$$

即为周期系统(1)的广义状态解. 式中, e_l 表示第 l 个单位(列)向量. 此外,由该解定义方式定义的解若存在则唯一. 反之,也可以通过式(4)和(7)由系统(1)的广义状态解构造出系统(5)的唯一广义状态解.

证毕.

参照变系数正则线性离散系统[7]和变系数连续奇异系统[1]李雅普诺夫意义下的稳定性概念,可以给出关于线性周期奇异系统(1)的一致渐近稳定性定义:

定义 1 线性周期奇异系统(1)称为在 $k \geq K$ 上是一致渐近稳定的,系指:对任意 $\epsilon > 0$,总存在 $\delta = \delta(\epsilon, K) > 0$,使得只要初值 $x(K) = x_K$ 满足 $\| x_K \| < \delta$,齐次系统 $E(k)x(k+1) = A(k)x(k)$ 的广义状态解就满足 $\| x(k) \| < \epsilon, k \geq K$,且 $\lim_{k \to \infty} x(k) = 0$.

定理 2 系统(1)一致渐近稳定充要条件为: $\rho(E, A) < 1$. 其中:

$$\rho(E, A) = \max\{ |\lambda| : \det(\lambda E - A) = 0 \}. \tag{8}$$

证 由文献[1,3]知,系统(5)一致渐近稳定的充分必要条件为 $\rho(E, A) < 1$ 成立. 而另一方面,由式(4)和(7)和定义 1 易知,系统(1)与(5)的一致渐近稳定性等价. 证毕.

算例 考察如下周期为 3 的线性离散奇异系统:

$$A(1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},\ A(2) = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix},\ A(3) = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E(1) = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 5 \end{bmatrix},\ E(2) = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},\ E(3) = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

注意到 $\det(Ez - A) = 24z^4(119z + 14)$, E 和 A 如式(3) 所定义,显然条件式(2) 满足,故该系统可解. 经计算可得到 $\rho(E, A) = \dfrac{14}{119}$,所以该系统稳定. 事实上,直接计算可得式(6)所表示的广义状态解,其中的相关矩阵分别为

$$T_0 = \begin{bmatrix} \frac{27}{119} & -\frac{15}{119} & \frac{8}{51} & \frac{120}{833} & 0 & \cdot\frac{4}{51} \\ \frac{9}{119} & -\frac{5}{119} & \frac{1}{17} & -\frac{3}{17} & 0 & \frac{1}{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ \frac{9}{17} & -\frac{5}{17} & \frac{4}{51} & \frac{13}{17} & -\frac{1}{17} & \frac{47}{102} \\ \frac{72}{289} & -\frac{40}{289} & \frac{32}{867} & \frac{104}{289} & \frac{4}{17} & -\frac{81}{30056} \\ -\frac{63}{289} & \frac{35}{289} & -\frac{28}{867} & -\frac{91}{289} & -\frac{49}{238} & \frac{285}{1734} \end{bmatrix},$$

$T_k =$

$$\begin{bmatrix} (-1)^k \frac{27}{119}\left(\frac{2}{17}\right)^k & (-1)^{k+1} \frac{15}{119}\left(\frac{2}{17}\right)^k & (-1)^{k+1} \frac{4}{119}\left(\frac{2}{17}\right)^k & (-1)^k \frac{1}{833}\left(\frac{2}{17}\right)^k & (-1)^k \frac{3}{14}\left(\frac{2}{17}\right)^k & (-1)^{k+1} \frac{55}{238}\left(\frac{2}{17}\right)^k \\ (-1)^k \frac{9}{119}\left(\frac{2}{17}\right)^k & (-1)^{k+1} \frac{5}{119}\left(\frac{2}{17}\right)^k & (-1)^k \frac{4}{357}\left(\frac{2}{17}\right)^k & (-1)^k \frac{13}{119}\left(\frac{2}{17}\right)^k & (-1)^k \frac{1}{119}\left(\frac{2}{17}\right)^{k-1} & (-1)^k \frac{55}{714}\left(\frac{2}{17}\right)^k \\ (-1)^k \frac{9}{17}\left(\frac{2}{17}\right)^k & (-1)^{k+1} \frac{5}{17}\left(\frac{2}{17}\right)^k & (-1)^k \frac{28}{357}\left(\frac{2}{17}\right)^k & (-1)^k \frac{13}{17}\left(\frac{2}{17}\right)^k & (-1)^{k+1} \frac{7}{119}\left(\frac{2}{17}\right)^k & (-1)^{k+1} \frac{55}{102}\left(\frac{2}{17}\right)^k \\ (-1)^k \frac{36}{14}\left(\frac{2}{17}\right)^{k+1} & (-1)^{k+1} \frac{140}{119}\left(\frac{2}{17}\right)^{k+1} & (-1)^k \frac{16}{51}\left(\frac{2}{17}\right)^{k+1} & (-1)^k \frac{364}{119}\left(\frac{2}{17}\right)^{k+1} & (-1)^k \frac{4}{17}\left(\frac{2}{17}\right)^k & (-1)^{k+1} \frac{5}{204}\left(\frac{2}{17}\right)^{k+1} \\ (-1)^{k+1} \frac{63}{34}\left(\frac{2}{17}\right)^{k+1} & (-1)^k \frac{35}{34}\left(\frac{2}{17}\right)^{k+1} & (-1)^{k+1} \frac{14}{51}\left(\frac{2}{17}\right)^{k+1} & (-1)^{k+1} \frac{91}{34}\left(\frac{2}{17}\right)^{k+1} & (-1)^{k+1} \frac{49}{238}\left(\frac{2}{17}\right)^k & (-1)^k \frac{2695}{1428}\left(\frac{2}{17}\right)^{k+1} \end{bmatrix}.$$

注意到 y_0 为相容初值当且仅当 $T_0Ay_0 = 0$. 亦即 y_0 满足 $y_0(1) = 0, y_0(2) = 0, y_0(3) = 0, y_0(4) = 0$ 和 $3y_0(5) + y_0(6) = 0$. 由此也可直接验证本例在(由相容初值下定义的)经典状态解意义下仍然是稳定的.

3 结语(Conclusion)

本文定义了线性离散奇异系统一般意义下的广义状态解,在此基础上给出了周期情形下系统可解与一致渐近稳定的充要条件.

参考文献(References):

[1] DAI L. *Singular Control Systems* [M]. Berlin, New York: Springer-Verlag, 1989.

[2] 张庆灵.广义系统结构稳定性判别的李雅普诺夫方法[J].系统科学与数学,1994,14(2):117-120.
(ZHANG Qingling. Lyapunov Criteria for the structural stability in descriptor systems [J]. *J of Sysems Science and Mathematical Science*, 1994, 14(2): 117-120.)

[3] ZOU Yun, CAMPBELL S L. The jump behavior and stability analysis for 2-D singular systems [J]. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 2000, 11(9): 321-338.

[4] 汤玉东,吴军基,邹云.电力市场稳定性研究[J].电力系统自动化,2001,25(4),11-16.
(TANG Yudong, WU Junji, ZOU Yun. The research on stability of power market [J]. *Automation of Electric Power Systems*, 2001, 25(4): 11-16.

[5] LUENBERGER D G. Boundary recursion for descriptor variable systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1989, 34(3): 287-292.

[6] 杨成梧,邹云.带缓变参数的广义系统的弱稳定性[J].控制理论与应用,1990,7(1):18-24.
(YANG Chengwu, ZOU Yun. On the stability of singular systems with slowly varying parameters [J]. *Control Theory & Applications*, 1990, 7(1): 18-24.)

[7] BRENAN K E, CAMPBELL S L, PETZOLD L R. *Numerical solution of initial-value problems in differential-algebraic equations* [M] // Classics in Applied Mathematics. Philadelphia: SIAM, 1996.

[8] WANG Chijo. *Stability and control of singular time-varying systems* [D]. Ann Arbor, Michigan: The University of Wiscosin-Madison, A Bell & Howell Company, 1994.

[9] SREEDHAR J, van DOOREN P. Periodic descriptor systems: solvability and conditionability [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1999, 44(2): 310-313.

[10] KACZOREK T. Acceptable input sequences for singular 2-D systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1993, 38(9): 1391-1394.

作者简介:

汤玉东 (1975—),男,1997年7月和1999年4月于南京理工大学机械工程学院分获工学学士和硕士学位,2003年4月于南京理工大学动力工程学院获控制理论与控制工程学科工学博士学位,现在南京理工大学从事博士后研究工作,研究方向为电力系统自动化,E-mail: nusttyd@sina.com;

邹 云 (1962—),男,教授,博士生导师,1983年8月于西北大学数学系计算数学专业获理学学士学位,1987年3月和1990年6月于南京理工大学动力工程学院分获控制理论与控制工程学科工学硕士和工学博士学位,1990年7月先后于南京理工大学动力工程学院和自动化系任教至今,美国《数学评论》评论员、美国国家数学学会(AMS)会员,近期研究兴趣主要为奇异系统理论、应急控制与评估理论与应用以及电力系统自动化等,E-mail: zouyun@jlonline.com.