文章编号: 1000-8152(2004)04-0627-04

模糊不确定时滞系统的静态输出的反馈镇定:迭代线性矩阵不等式方法

巩长忠, 刘全利, 王 伟
(大连理工大学 信息与控制研究中心, 辽宁 大连 116024)

摘要: 对一类不确定非线性时滞系统利用模糊T-S模型进行建模,研究了静态输出反馈镇定问题.用矩阵不等式的形式给出了模糊T-S不确定时滞系统可通过静态输出反馈镇定的充分条件.并将矩阵不等式的条件转化为迭代线性矩阵不等式(ILMI),并给出相应的算法.

关键词: 非线性不确定时滞系统; 静态输出反馈; 模糊系统; 线性矩阵不等式(LMI)
中图分类号: TP273 **文献标识码**: A

Static output feedback stabilization of uncertain fuzzy systems with time-delay: an iterative linear matrix inequality approach

GONG Chang-zhong, LIU Quan-li, WANG Wei
(Research Center of Information and Control, Dalian University of Technology, Dalian Liaoning 116024, China)

Abstract: The static output feedback stabilization problem is addressed for a class of uncertain fuzzy dynamic systems with time-delay. The Takagi-Sugeno(T-S) fuzzy model is used to represent an uncertain nonlinear system with time-delay. Sufficient conditions for static output feedback stabilizability are obtained in the form of matrix inequality. An iterative linear matrix inequality (ILMI) algorithm is also given.

Key words: uncertain nonlinear time-delay systems; static output feedback; fuzzy system; linear matrix inequality (LMI)

1 引言(Introduction)

非线性、不确定性以及时滞是工业过程中普遍存在的现象,因此,对非线性不确定时滞系统进行稳定性分析和控制是控制理论的一个十分重要的课题.但应用一般的非线性控制方法,难以对此类系统进行设计和控制.基于T-S模糊模型的模糊控制对于复杂的、不确定的被控对象可以提供有效的解决方法,因此,模糊控制的理论研究及其应用得到了广泛的关注[1~6].近年来,应用模糊T-S模型方法对非线性时滞系统进行模糊控制器的设计及其稳定性分析,已经得到了很多好的结果[7~10].近来,对于线性系统的静态输出反馈控制问题又得到了新的研究[11,12],但是对于模糊系统,目前还没有研究静态输出反馈控制问题.静态输出反馈问题涉及寻找静态的即常反馈增益以达到某种要求的性能.静态输出反馈之所以受到关注的原因就在于它表示了实际中可以实现的最简单的闭环控制.另一个重要的原因就是许多涉及合成动态控制器的问题可以表达为涉及及增广系统的静态输出反馈控制的问题.

本文针对一类具有范数有界的参数不确定时滞模糊系统提出了一种静态输出反馈控制方法,并应用矩阵不等式的理论给出了模糊时滞系统可通过静态输出反馈镇定的充分条件.由于求解静态输出反馈增益的主要困难在于静态输出反馈增益的解集不是凸的,因而现存在的线性矩阵不等式求解方法不能直接应用.因此本文通过引入辅助变量,将保证模糊时滞系统稳定条件的非线性矩阵不等式转化为迭代线性矩阵不等式(ILMI),利用迭代线性矩阵不等式建立了模糊控制算法.

2 问题描述(Problem statement)

考虑由模糊T-S模型所描述的不确定非线性时滞系统 R^i:

$$\begin{cases} \text{IF } z_1(t) \text{ is } M_{i1} \text{ and } \cdots \text{ and } z_p(t) \text{ is } M_{ip}, \\ \text{THEN} \\ \dot{x}(t) = [A_i + \Delta A_i(t)]x(t) + [A_{di} + \\ \qquad \Delta A_{di}(t)]x(t-d) + [B_i + \Delta B_i(t)]u(t), \\ y(t) = C_i x(t), \\ x(t) = \varphi(t),\ t \in [-d, 0],\ i = 1,2,\cdots,r. \end{cases} \tag{1}$$

收稿日期:2002-10-18; 收修改稿日期:2003-06-02.
基金项目:国家自然科学基金项目(60274019);国家杰出青年基金项目(69825106).

其中: M_{ij} 是模糊集合; $z(t)=[z_1(t),z_2(t),\cdots,z_n(t)]^{\mathrm{T}}$ 是可测量的变量,即前置变量; $x(t)\in\mathbb{R}^n$ 是状态向量, $u(t)\in\mathbb{R}^m$ 是控制输入向量, $y(t)\in\mathbb{R}^q$ 是输出向量, r 是模糊推理规则的个数; A_i,A_{di} 和 B_i 是已知的有适当维数的实矩阵, $\Delta A_i(t)$、$\Delta A_{di}(t)$ 和 $\Delta B_i(t)$ 是矩阵函数,代表系统中时变不确定参数; $d>0$ 是滞后常量, $\varphi(t)$ 是已知的连续向量函数.

本文所考虑的不确定参数假定是范数有界的且具有形式

$$[\Delta A_i(t)\ \ \Delta B_i(t)\ \ \Delta A_{di}(t)]=D_iF_i(t)[E_{1i}\ \ E_{2i}\ \ E_{di}]. \tag{2}$$

其中 D_i,E_{1i},E_{2i} 和 E_{di} 是具有适当维数的已知常数实矩阵, $F_i(t)\in\mathbb{R}^{i\times j}$ 满足

$$F_i^{\mathrm{T}}(t)F_i(t)\leqslant I. \tag{3}$$

全局模糊系统模型

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=\sum\limits_{i=1}^{r}\lambda_i(z)\{[A_i+\Delta A_i(t)]x(t)+[A_{di}+\\ \qquad\Delta A_{di}(t)]x(t-d)+[B_i+\Delta B_i(t)]u(t)\},\\ y(t)=\sum\limits_{i=1}^{r}\lambda_i(z)C_ix(t).\end{cases} \tag{4}$$

其中

$$\lambda_i(z(t))=\frac{w_i(z(t))}{\sum\limits_{i=1}^{q}w_i(z(t))},\ w_i(z(t))=\prod_{j=1}^{n}M_j^i(z(t)),$$

$$w_i(z(t))\geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{q}w_i(z(t))>0,\ i=1,2,\cdots,q.$$

显然 $\lambda_i(z(t))\geqslant 0,\sum\limits_{i=1}^{q}\mu_i(z(t))=1,i=1,2,\cdots,q.$ 模糊系统均假定可以通过状态反馈镇定.模糊静态输出反馈控制律定义为

$$\begin{cases}\text{IF } z_1(t) \text{ is } M_{i1} \text{ and } \cdots \text{ and } z_p(t) \text{ is } M_{ip},\\ \text{THEN } u(t)=K_iy(t).\end{cases} \tag{5}$$

总的模糊静态输出反馈控制表示为

$$u(t)=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i(z(t))K_iy(t). \tag{6}$$

静态输出反馈镇定问题就是要寻找静态输出反馈增益 $K_i(i=1,2,\cdots,r)$, 使得如下的闭环系统

$$\begin{aligned}\Sigma_c:\ \dot{x}(t)=\\ &\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\lambda_i(z(t))\lambda_j(z(t))\{[(A_i+A_j+\\ &B_iK_jC_j+B_jK_iC_i)+D_iF_i(E_{1i}+E_{2i}K_jC_j)+\\ &D_jF_j(E_{1j}+E_{2j}K_iC_i)]x(t)+(A_{di}+A_{dj}+\\ &D_iF_iE_{di}+D_jF_jE_{dj})x(t-d)\}\end{aligned} \tag{7}$$

是稳定的.

定义 1 如果存在 $K_i(i=1,2,\cdots,r)$ 使得系统 Σ_c 是稳定的,则称系统 Σ 可以通过静态输出反馈镇定.

引理 1[10] 对于具有适当维数的矩阵 Q,H,E 和 R, 其中 Q 和 R 是对称的且 $R>0$, 则对所有满足 $F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\leqslant R$ 的矩阵 $F(t)$,

$$Q+HF(t)E+E^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}(t)H^{\mathrm{T}}<0,$$

当且仅当存在某个 $\varepsilon>0$ 使得

$$Q+\varepsilon^2HH^{\mathrm{T}}+\varepsilon^{-2}E^{\mathrm{T}}RE<0.$$

定理 1 对于系统 Σ, 如果存在公共的矩阵 $P>0,S>0,K_i(i=1,2,\cdots,r)$ 满足下列矩阵不等式

$$\begin{bmatrix}\Lambda_1 & P(A_{di}+D_iF_iE_{di})\\ (A_{di}+D_iF_iE_{di})^{\mathrm{T}}P & -S\end{bmatrix}<0, \tag{8}$$

$$\begin{bmatrix}\Lambda_2 & P(A_{di}+A_{dj}+D_iF_iE_{di}+D_jF_jE_{dj})\\ (A_{di}+A_{dj}+D_iF_iE_{di}+D_jF_jE_{dj})^{\mathrm{T}}P & -2S\end{bmatrix}\leqslant 0, \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\Lambda_1=\ &A_i^{\mathrm{T}}P+PA_i-PB_iB_i^{\mathrm{T}}P+(B_i^{\mathrm{T}}P+K_iC_i)^{\mathrm{T}}(B_i^{\mathrm{T}}P+K_iC_i)+[D_iF_i(E_{1i}+E_{2i}K_iC_i)]^{\mathrm{T}}P+\\ &P_iD_iF_i(E_{1i}+E_{2i}K_iC_i)+S,\\ \Lambda_2=\ &A_i^{\mathrm{T}}P+A_j^{\mathrm{T}}P+PA_i+PA_j-PB_iB_i^{\mathrm{T}}P-PB_iB_i^{\mathrm{T}}P+(B_i^{\mathrm{T}}P+K_jC_j)^{\mathrm{T}}(B_i^{\mathrm{T}}P+\\ &K_jC_j)+(B_j^{\mathrm{T}}P+K_iC_i)^{\mathrm{T}}(B_j^{\mathrm{T}}P+K_iC_i)+[D_iF_i(E_{1i}+E_{2i}K_jC_j)]^{\mathrm{T}}P+\\ &[D_jF_j(E_{1j}+E_{2j}K_iC_i)]^{\mathrm{T}}P+PD_iF_i(E_{1i}+E_{2i}K_jC_j)+PD_jF_j(E_{1j}+E_{2j}K_iC_i),\end{aligned}$$

则系统 Σ 可以通过静态输出反馈镇定.

证 选取 Lyapunov 函数为

$$V(x(t),t)=x^{\mathrm{T}}(t)Px(t)+\int_{t-d}^{t}x^{\mathrm{T}}(\tau)Sx(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{10}$$

则 $V(x(t),t)$ 沿式(9)对时间的导数为

$$\dot V(x(t),t)=\dot x^{\mathrm T}(t)Px(t)+x^{\mathrm T}(t)P\dot x(t)+x^{\mathrm T}(t)Sx(t)-x^{\mathrm T}(t-d)Sx(t-d)+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\lambda_i(z(t))\lambda_j(z(t))\begin{bmatrix}x(t)\\x(t-d)\end{bmatrix}^{\mathrm T}\cdot\begin{bmatrix}\Lambda_1-C_i^{\mathrm T}K_i^{\mathrm T}K_iC_i-C_j^{\mathrm T}K_j^{\mathrm T}K_jC_j & *\\(A_{di}+A_{dj}+D_iF_iE_{di}+\dot D_jF_jE_{dj})^{\mathrm T}P & -2S\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x(t)\\x(t-d)\end{bmatrix}\leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^2(z(t))x^{\mathrm T}(t)[-C_i^{\mathrm T}K_i^{\mathrm T}K_iC_i]x(t)+\sum_{i<j}\lambda_i(z(t))\lambda_j(z(t))x^{\mathrm T}(t)[-C_i^{\mathrm T}K_i^{\mathrm T}K_iC_i-C_j^{\mathrm T}K_j^{\mathrm T}K_jC_j]x(t)<0,$$

由 Lyapunov 定理，系统 Σ 是稳定的.

定理 2　对于系统 Σ，存在对称正定矩阵使得矩阵不等式(10) 和(11) 成立，当且仅当存在常数 $\varepsilon_{ii}(i<j)$ 使得下面的矩阵不等式成立：

$$\begin{bmatrix}A_i^{\mathrm T}P+PA_i-PB_iB_i^{\mathrm T}P+S & PA_{di} & (E_{1i}+E_{2i}K_iC_i)^{\mathrm T} & (B_i^{\mathrm T}P+K_iC_i)^{\mathrm T} & \varepsilon_{ii}PD_i\\A_{di}^{\mathrm T}P & -S & E_{di}^{\mathrm T} & 0 & 0\\(E_{1i}+E_{2i}K_iC_i) & E_{di} & -\varepsilon_{ii}I & 0 & 0\\(B_i^{\mathrm T}P+K_iC_i) & 0 & 0 & -I & 0\\\varepsilon_{ii}D_i^{\mathrm T}P & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_{ii}I\end{bmatrix}<0, \tag{11}$$

$$\begin{bmatrix}\Gamma & * & * & * & * & * & * & *\\(A_{di}+A_{di})^{\mathrm T}P & -2S & * & * & 0 & 0 & 0 & 0\\(E_{1i}+E_{2i}K_jC_j) & E_{di} & -\varepsilon_{ij}I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\(E_{1j}+E_{2j}K_iC_i) & E_{dj} & 0 & -\varepsilon_{ij}I & 0 & 0 & 0 & 0\\(B_i^{\mathrm T}P+K_jC_j) & 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0\\(B_j^{\mathrm T}P+K_iC_i) & 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0\\\varepsilon_{ij}D_i^{\mathrm T}P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_{ij}I & 0\\\varepsilon_{ij}D_j^{\mathrm T}P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_{ij}I\end{bmatrix}<0. \tag{12}$$

其中，$*$ 表示对称位置矩阵的转置.

$$\Gamma=P(A_i+A_j)+(A_i+A_j)^{\mathrm T}P-PB_iB_i^{\mathrm T}P-PB_iB_i^{\mathrm T}P+S.$$

应用引理 1 以及由 Schur 补定理，不等式(8)和(9)等价于不等式(11)和(12).

3　迭代线性矩阵不等式算法(Iterative linear matrix inequality (ILMI) algorithm)

平行于文献[11]的证明方法，可以得到如下的迭代线性矩阵不等式(ILMI)算法：

第 1 步　选取适当的常数 $\varepsilon_{ii}>0,\varepsilon_{ij}>0(i<j)$，解矩阵不等式

$$A_i^{\mathrm T}P+PA_i-PB_iB_i^{\mathrm T}P<0,\ i=1,2,\cdots,r, \tag{13}$$

求解公共的正定矩阵 P，如果式(13)无解，解下列代数 Riccati 方程

$$A_i^{\mathrm T}P_i+P_iA_i-P_iB_iB_i^{\mathrm T}P_i+Q=0,\ i=1,2,\cdots,r.$$

令 P 是 $P_1,P_2,\cdots,P_r$ 中迹为最小的. 令 $l=1,X_l=P$.

第 2 步　解下列关于 P_l,K_i,α_l 的优化问题

$$\min\ \alpha_l$$

$$\text{s.t.}\begin{bmatrix}\Pi_1^l & P_lA_{di} & (E_{1i}+E_{2i}K_iC_i)^{\mathrm T} & (B_i^{\mathrm T}P_l+K_iC_i)^{\mathrm T} & \varepsilon_{ii}P_lD_i\\A_{di}^{\mathrm T}P_l & -S & E_{di}^{\mathrm T} & 0 & 0\\(E_{1i}+E_{2i}K_iC_i) & E_{di} & -\varepsilon_{ii}I & 0 & 0\\(B_i^{\mathrm T}P_l+K_iC_i) & 0 & 0 & -I & 0\\\varepsilon_{ii}D_i^{\mathrm T}P_l & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_{ii}I\end{bmatrix}<0, \tag{14}$$

$$\begin{bmatrix} \Pi_2^l & * & * & * & * & * & * & * \\ (A_{di}+A_{dj})^{\mathrm{T}}P & -2S & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (E_{1i}+E_{2i}K_jC_j) & E_{di} & -\varepsilon_{ij}I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (E_{1j}+E_{2j}K_iC_i) & E_{dj} & 0 & -\varepsilon_{ij}I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (B_i^{\mathrm{T}}P+K_jC_j) & 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 \\ (B_j^{\mathrm{T}}P+K_iC_i) & 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ \varepsilon_{ij}D_i^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_{ij}I & 0 \\ \varepsilon_{ij}D_j^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_{ij}I \end{bmatrix} < 0. \tag{15}$$

其中

$$\Pi_1^l = A_i^{\mathrm{T}}P_l + P_lA_i - X_lB_iB_i^{\mathrm{T}}P_l - P_lB_iB_i^{\mathrm{T}}X_l + X_lB_iB_i^{\mathrm{T}}X_l + S - \alpha_lP_l,$$

$$\Pi_2^l = P_l(A_i+A_j) + (A_i+A_j)^{\mathrm{T}}P_l - X_lB_iB_i^{\mathrm{T}}P_l - P_lB_iB_i^{\mathrm{T}}X_l + X_lB_iB_i^{\mathrm{T}}X_l - X_lB_jB_j^{\mathrm{T}}P_l - P_lB_jB_j^{\mathrm{T}}X_l + X_lB_jB_j^{\mathrm{T}}X_l + S - \alpha_lP_l.$$

第3步 如果 $\alpha_l^* \leqslant 0$,则 $K_i(i=1,2,\cdots,r)$ 是镇定输出反馈增益.停止.否则转到第4步.

第4步 解下列关于 P_l 和 K_i 的优化问题,$\alpha_l = \alpha_l^*$:

$$\min \operatorname{tr}(P_l)$$
$$\text{s.t. 式(14)及式(15).}$$

用 P_l^* 表示 P_l 的最优解.

第5步 如果 $\| X_l - P_l^* \| < \delta$,$\delta$ 表示一个误差容限,则转到第6步.否则令 $i = i+1$,$X_l = P_{l-1}^*$,回到第2步.

第6步 该系统不能由本文所述的静态输出反馈的方法镇定.停止.用 α_l^* 表示 α_l 的最优值.

4 结束语(Conclusion)

本文对一类基于T-S模型的范数有界的不确定模糊时滞系统的静态输出反馈问题进行了研究.给出了使系统稳定的静态输出反馈控制律存在的充分条件,并将此条件转化为迭代线性矩阵不等式的可解性.最后给出了迭代线性矩阵不等式(ILMI)的算法.

参考文献(References):

[1] TAKAGI T, SUGENO M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control [J]. *IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics*, 1985, 15(1): 116 - 132.

[2] TANAKA K, IKEDA T, WANG H O. Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control: quadratic stabilizability, H_∞ control theory, and linear matrix inequalities [J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 1996, 4(1): 1 - 13.

[3] MA X J, SUN Z Q. Anaysis and design of fuzzy controller and fuzzy observer [J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 1998, 6(1): 41 - 51.

[4] TANAKA K, IKEDA T, WANG H O. Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based designs [J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 1998, 6(2): 250 - 265.

[5] LEE H J, PARK J B, CHEN G. Robust fuzzy control of nonlinear systems with parameteric uncertainties [J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 2000, 19(2): 369 - 379.

[6] CAO Y Y, FRANK P K. Analysis and synthesis of nonlinear time-delay systems via fuzzy control [J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 2000, 8(6): 200 - 211.

[7] CAO Y Y, FRANK P K. Stability analysis and synthesis of nonlinear time-delay systems via linear Takagi-Sugeno fuzzy model [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, 124: 213 - 229.

[8] LEE K R, KIM J H, JEUNG E T, et al. Output feedback robust H_∞ control of uncertain fuzzy dynamic systems with time-varying delay [J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 2000, 8(6): 657 - 664.

[9] TANAKA T, SUGENO M. Stability analysis and design of fuzzy control systems [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1992, 45(2): 135 - 156.

[10] XIE Lihua. Output feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainty [J]. *Int J Control*, 1996, 63(4): 741 - 750.

[11] CAO Yongyan, SUN Youxian, MAO Weijie. Output feedback decentralized stabilization: ILMI approach [J]. *Systems & Control Letters*, 1998, 35: 183 - 194.

[12] CAO Yongyan, LAM J, SUN Youxian. Static output feedback stabilization: ILMI approach [J]. *Automatica*, 1998, 34(12): 1641 - 1645.

作者简介:

巩长忠 (1959 —),男,副教授,大连理工大学博士生,研究方向为非线性控制和模糊控制,E-mail: g_chzh@163.com;

刘全利 (1976 —),男,大连理工大学博士生,研究方向为复杂系统的建模与控制、复杂工业过程的生产调度等;

王 伟 (1955 —),男,教授,博士生导师,研究方向为自适应控制、模型预测控制、计算机控制及其工业应用等.