

拟人智能控制及鲁棒 LQ 控制在倒立摆基准问题中的应用

李 诚, 张明廉

(北京航空航天大学 自动化科学与电气工程学院, 北京 100083)

摘要: 分别应用拟人智能控制策略解决倒立摆标称系统的控制和鲁棒 LQ 方法解决其鲁棒控制问题. 拟人智能控制模仿人解决问题的归约思路, 从物理角度出发分析被控系统并设计定性控制律. 利用遗传算法良好的全局搜索收敛特点, 对定性控制律中的参数进行优化搜索. 当模型只存在结构化型不确定性且不确定性有界时, 可通过求解一个 Riccati 方程来设计鲁棒 LQ 控制器. 仿真结果表明给定的控制指标均得到满足, 且控制律算法简单, 实现比较方便.

关键词: 拟人智能控制; 遗传算法; 鲁棒 LQ 控制; 倒立摆

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Application of human-imitating intelligence control and robust LQ control to the benchmark problem for the inverted pendulum

LI Cheng, ZHANG Ming-lian

(School of Automation Science and Electrical Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: Human-imitating intelligence control method and robust linear quadratic (LQ) method are applied to the nominal and uncertain inverted pendulum system respectively. The former method analyzes the plant to be controlled and derives the qualitative control law from the point of view of physics by adopting the general reduction method. The coefficients of the qualitative control law can be searched by genetic algorithm, which has globally convergent property. As for uncertain systems in state space representation, if the parameter uncertainty is structured and value bounded, the robust LQ controller is designed by resolving one Riccati equation. The simulation shows that these methods are effective and efficient in dealing with the inverted pendulum benchmark problem.

Key words: human-imitating intelligence control; genetic algorithm; robust linear quadratic control; inverted pendulum

1 引言 (Introduction)

近 20 年来, 由于被控对象的非线性、不确定性等的存在, 被控对象的精确数学模型很难得到, 这为设计高品质的控制器带来很多困难. 许多学者提出了各种有益的控制系统设计方法, 如鲁棒控制、模糊控制等. 其中, 张明廉教授等于 1993 年提出了拟人智能控制^[1,2], 该方法模仿人解决问题时的广义归约思路, 无需被控对象的精确数学模型, 直接从被控对象的非线性本质出发, 针对控制目标结合人的控制经验设计控制律.

本文中应用拟人智能控制方法来解决倒立摆基准问题中的标称系统控制问题. 人们解决复杂问题一般采用广义归约的思路, 也就是把复杂的初始问题逐步分解成复杂程度较低的子问题集, 直至可直

接解决的本原问题集. 本原问题集得到解决后, 再充分考虑本原问题之间存在的耦合, 这样逐步解决复杂程度递增的子问题集后, 初始的复杂问题最终迎刃而解. 不同于传统控制理论尽可能完全解耦的做法, 拟人控制是在结合控制目标充分分析耦合的基础上保留对控制有利的耦合, 并抵消对控制不利的耦合^[3]. 用拟人智能控制方法设计的定性控制律可以是非线性控制律, 然后可利用遗传算法良好的全局搜索收敛特点, 对其中的参数进行优化搜索^[4]. 而针对只存在结构化型不确定性且不确定性有界的系统, 可利用鲁棒 LQ 算法设计鲁棒 LQ 控制器, 来保证控制指标当参数发生摄动时仍然得到满足, 而该鲁棒 LQ 控制器对给定范围内的参数摄动仍然是二次型意义下最优的^[5].

2 倒立摆基准问题的标称系统设计 (Controller design for normal system)

2.1 模型建立 (Modeling)

根据给出的问题描述,可得出如下标称系统的非线性模型:

$$\begin{cases} \ddot{x} = (-K_g^2 K_t^2 (J + L^2 m) \dot{x} + r(C L m r R_a \cos(\varphi) \dot{\varphi} - \\ g L^2 m^2 r R_a \cos \varphi \sin \varphi + \\ L m (J + L^2 m) r R_a \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 + r K_g K_t (J + L^2 m) U) / \\ (r^2 R_a ((J + L^2 m)(m + M) - L^2 m^2 \cos^2 \varphi)), \\ \ddot{\varphi} = (K_g^2 K_t^2 L m \cos(\varphi) \dot{x} - r(C(m + M) r R_a \dot{\varphi} + \\ L^2 m^2 r R_a \cos \varphi \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 \cdot \\ (-L m g (m + M) r R_a \sin \varphi - r L m K_g K_t \cos(\varphi) U) / \\ (r^2 R_a ((J + L^2 m)(m + M) - L^2 m^2 \cos^2 \varphi)). \end{cases} \quad (1)$$

上式中的各符号意义与文献[6]中相同,这里不再重复.

2.2 摆的镇定问题 (Stabilization problem of pendulum)

由文献[1]中介绍的根据拟人智能控制分析并设计倒立摆控制律的过程,可得出解决摆的镇定问题的控制律:

$$U = k_x x + k_{\dot{x}} \dot{x} + k_{\varphi} \varphi + k_{\dot{\varphi}} \dot{\varphi}. \quad (2)$$

式中有 4 个待定参数 k_x , $k_{\dot{x}}$, k_{φ} 和 $k_{\dot{\varphi}}$, 它们的量化问

题属于优化问题,即寻找一组参数使得得到控制量施加到被控对象上,来得到最优的稳态性能指标和动态性能指标.遗传算法是基于“适者生存”的一种高度并行、随机和自适应的全局优化算法,而且不需要对象模型的导数等信息.这里采用遗传算法来完成定性控制律的量化.

在遗传算法中,用浮点实数编码方式表示待优化的系数 k_x , $k_{\dot{x}}$, k_{φ} 和 $k_{\dot{\varphi}}$, 这样每个个体就是由 4 个浮点数组成的一个一维数组.种群大小定为 20,并随机产生初始种群.遗传算子采用最优保持的比例选择算子、算术交叉算子和随机实数变异算子.控制指标主要考虑给定的积分评价指标以及 $t > 0.5$ s 后摆杆绝对偏角 $|\varphi|$ 的最大值与 $t > 1$ s 后小车绝对位置 $|x|$ 的最大值,因此遗传算法的适应度函数可选

$$\text{为 } \frac{1}{\left(\int_0^6 \varphi^2(\tau) d\tau + \max_{t>1}(|x|) + \max_{t>0.5}(|\varphi|) \right)}.$$

对每个个体都针对对象的非线性数学模型采用四阶龙格-库塔法进行 6 s 仿真,系统仿真初始条件根据文献[6]都取为零.根据仿真结果计算其适应度的值(其中的积分计算采用复化梯形法),然后根据各个体的适应度值进行各种遗传算子操作,逐代优化.其流程如图 1 所示.

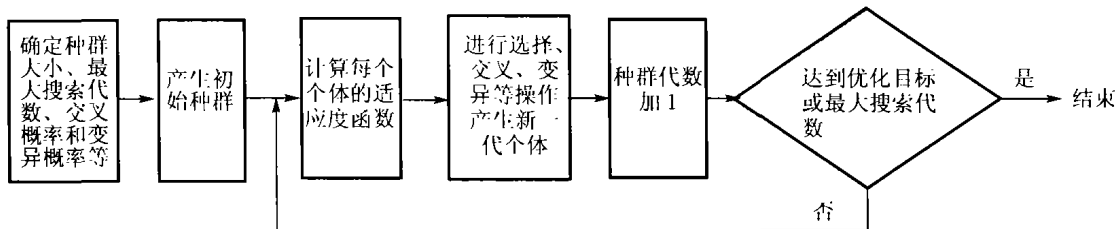


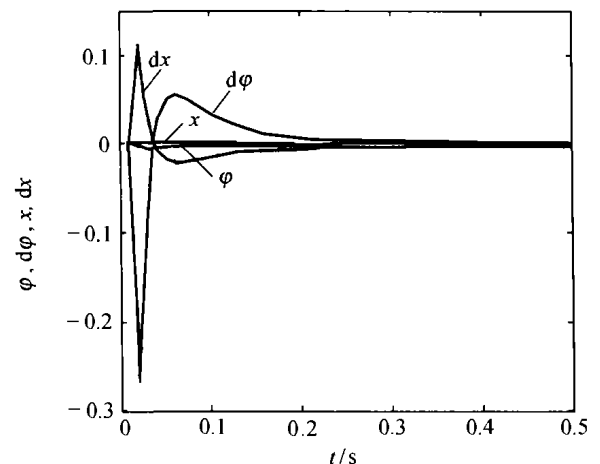
图 1 遗传算法流程图

Fig. 1 Flow chart of the genetic algorithm

用遗传算法进行多次搜索,均可以得到满意解.其中一次的搜索结果为 $[k_x \ k_{\dot{x}} \ k_{\varphi} \ k_{\dot{\varphi}}] = [-5.8450 \ -12.3052 \ -196.4641 \ -14.9721]$, 将此结果代入式(2)作为控制律,其各项控制指标值为 $\max_{t>0.5} |\varphi| = 1.8381 \times 10^{-4}$ rad, $\max_{t>1} |x| = 0.0045$ m, $\max(u) = 2.1694$ V. 各项指标均满足要求,且评价指标为 $\int_0^6 \varphi^2(\tau) d\tau = 1.1144 \times 10^{-6}$. 仿真曲线如图 2 所示.

将模型(1)线性化后,利用最优二次型指标设计定常控制律,并用于模型(1)的摆杆镇定问题的控制,其控制是发散的.这有两方面的原因,一是线性化的模型不精确,二是最优二次型定常状态调节器是时间 t 趋于无穷时的性能最优,而在有限时间内

未必是最优的.



(a) 系统状态曲线

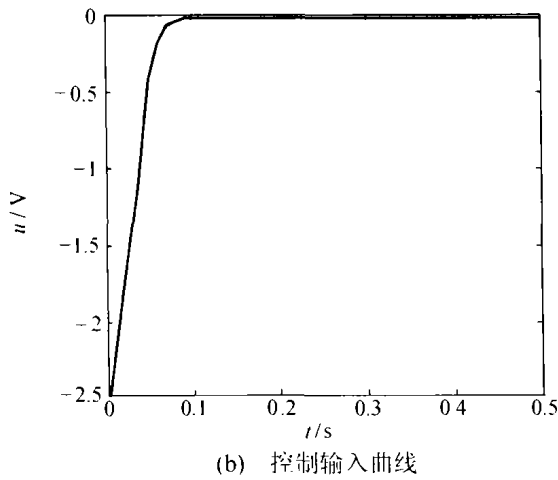


图2 标称系统摆的镇定问题仿真曲线

Fig 2 Simulation plots of the pendulum stabilization problem

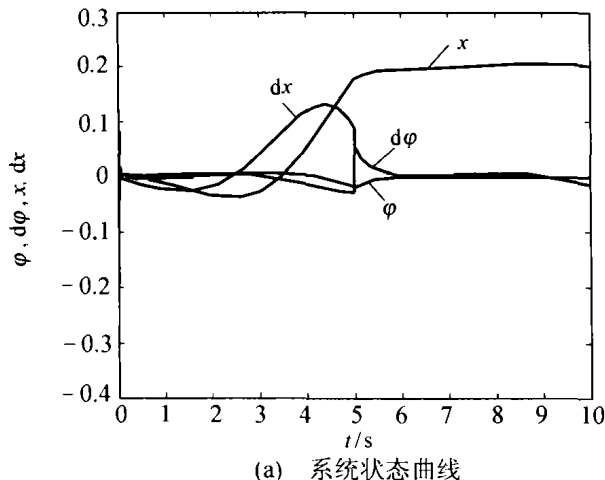
2.3 台车位置调节问题(Cart tracking problem)

在前5 s可采用与摆的镇定问题相同的控制律形式,而为使台车平移至0.2 m处,需加指令信号为 $[x_d \dot{x}_d \varphi_d \dot{\varphi}_d] = [0.2 \ 0.0 \ 0.0 \ 0.0]$,故总控制律为

$$U = \begin{cases} k_x x + k_{\dot{x}} \dot{x} + k_{\varphi} \varphi + k_{\dot{\varphi}} \dot{\varphi}, & t < 5 \text{ s}, \\ k_x (x - x_d) + k_{\dot{x}} \dot{x} + k_{\varphi} \varphi + k_{\dot{\varphi}} \dot{\varphi}, & t \geq 5 \text{ s}. \end{cases} \quad (3)$$

同样采用遗传算法来对式(3)中的待定参数进行优化搜索,只需将算法中的适应度函数改为 $1/(120 \times \int_0^{10} (\varphi^2(\tau) + (x(\tau) - x_d)^2) d\tau + 100 \times \max_{t>7} |x - x_d| + 120 \times \max_{t>6} |\varphi|)$ 即可。

采用上述策略进行多次搜索,均得到满意结果,其中一次的搜索结果结果为 $[k_x \ k_{\dot{x}} \ k_{\varphi} \ k_{\dot{\varphi}}] = [-11.1657 \ -0.5708 \ -51.9430 \ -25.349]$ 。其各项控制指标值为 $\max_{t>6} |\varphi| = 0.0017 \text{ rad}$, $\max_{t>7} |x - x_d| = 0.0077 \text{ m}$, $\max(u) = 0.8976 \text{ V}$ 。各项指标均满足,且评价指标为 $\int_0^{10} (\varphi^2(\tau) + (x(\tau) - x_d)^2) d\tau = 0.1909$ 。仿真曲线如图3所示。



(a) 系统状态曲线

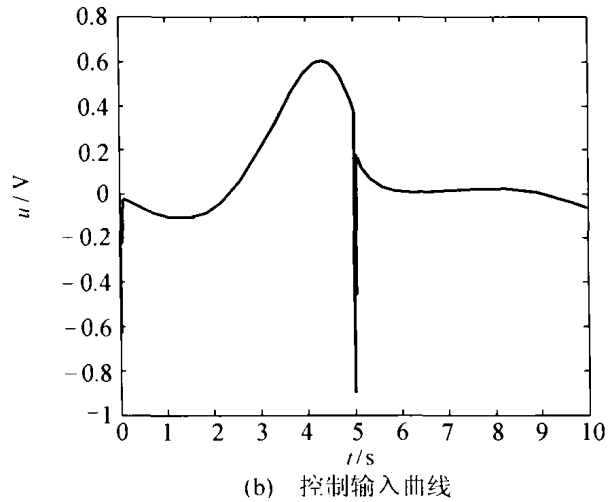


图3 标称系统台车位置调节问题仿真曲线

Fig 3 Simulation plots of the cart tracking problem

3 倒立摆基准问题的鲁棒控制设计(Robust controller design)

3.1 模型建立(Modeling)

设 $|\delta(\dot{x})| = |\gamma \times \dot{x}| \leq 0.95 \times |\dot{x}|$,当摩擦系数 C 和 γ 都存在摄动时,系统非线性模型如下:

$$\begin{cases} \ddot{x} = (- (K_g^2 K_t^2 + r^2 R_a \gamma) (J + L^2 m) \dot{x} + \\ r((C + C_d) L m r R_a \cos(\varphi) \dot{\varphi} - \\ g L^2 m^2 r R_a \cos \varphi \sin \varphi + L m (J + \\ L^2 m) r R_a \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2) + \\ r K_g K_t (J + L^2 m) U) / (r^2 R_a ((J + \\ L^2 m) (m + M) - L^2 m^2 \cos^2 \varphi)), \\ \ddot{\varphi} = ((K_g^2 K_t^2 + r^2 R_a \gamma) L m \cos(\varphi) \dot{x} - \\ r((C + C_d) (m + M) r R_a \dot{\varphi} + \\ L^2 m^2 r R_a \cos \varphi \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 - \\ L m g (m + M) r R_a \sin \varphi) - \\ r L m K_g K_t \cos(\varphi) U) / (r^2 R_a ((J + \\ L^2 m) (m + M) - L^2 m^2 \cos^2 \varphi)). \end{cases} \quad (4)$$

而其线性化后的模型可写为:

$$\dot{X} = (A_0 + \Delta A) X + B U. \quad (5)$$

其中, $X = [x \ \dot{x} \ \varphi \ \dot{\varphi}]^T$,

$$A_0 = \frac{1}{(-L^2 m^2 + (J + L^2 m)(m + M)) r^2 R_a} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -K_g^2 K_t^2 (J + L^2 m) & -g L^2 m^2 r^2 R_a & C L m r^2 R_a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & K_g^2 K_t^2 L m & g L m (m + M) r^2 R_a - C (m + M) r^2 R_a & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Delta A = \frac{1}{(-L^2 m^2 + (J + L^2 m)(m + M))} \times$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(J+L^2m)\gamma & 0 & C_dLm \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Lm\gamma & 0 & -C_d(m+M) \end{bmatrix},$$

$$B = \frac{1}{(-L^2m^2 + (J+L^2m)(m+M))rR_a} \times \begin{bmatrix} 0 \\ K_gK_t(J+L^2m) \\ 0 \\ -K_gK_tLm \end{bmatrix}.$$

3.2 鲁棒 LQ 控制(Robust LQ control)

若系统只存在结构化不确定性并且不确定性是有界的,则可以通过鲁棒 LQ 算法来设计鲁棒控制器.考虑线性连续不确定系统(5),若 ΔA 是不确定时变实矩阵具有形式 $\Delta A = DF(t)E$. 其中 $D \in \mathbb{R}^{n \times r}$ 和 $E \in \mathbb{R}^{q \times n}$ 是已知定常阵, $F(t) \in \mathbb{R}^{r \times q}$ 为不确定函数阵,且 $F(t)$ 属于集合 $\Omega = \{F(t) \mid F^T(t)F(t) \leq I, \forall t\}$.

对于不确定系统(5),考虑性能泛函 $J = \int_0^\infty (X^T(t)QX(t) + U^T(t)RU(t))dt$, 其中 $Q > 0$, $R > 0$ 则由文献[5]可知,有以下定理成立.

定理 对于线性不确定系统(5),存在线性状态反馈控制器 $U(t) = -KX(t)$,使得不确定闭环系统 $\dot{X}(t) = (A_0 + \Delta A - BK)X(t)$ 鲁棒二次最优的充分必要条件是存在适当正数 $\epsilon > 0$,使得鲁棒 Riccati 方程

$$A_0^T P + PA_0 - PBR^{-1}B^T P + \epsilon PDD^T P + \frac{1}{\epsilon}E^T E + Q = 0 \quad (6)$$

具有正定解 $P = P^T > 0$,且鲁棒二次最优控制器为 $K = R^{-1}B^T P$.

需要说明的是,这里 Q, R 阵的选取规则与设计一般的 LQR 控制器时基本相同.此外, ϵ 的选取也很关键,在保证 Riccati 方程(6)有解的情况下, ϵ 越小,系统状态在过渡过程中的振荡幅度越小,但同时所需要的最大电机控制电压越大.考虑到电机最大控制电压受限并且摆杆长度 L 是有上界的未知参数,应该将 ϵ 适当取大些.原因也很显然,当 L 无限小时,摆杆固有的时间常数也无限小,这要求控制器的频带要无限宽,所需的电机控制电压就无限大,因此 ϵ 适当取大些,可以使设计出来的鲁棒 LQ 控制器能适应更大的 L 取值范围.

参考文献[5]中也已证明,用求解 Riccati 方程(6)得到的反馈控制器得到的鲁棒二次最优闭环不确定系统 $\dot{X} = (A_0 + \Delta A - BK)X$ 是指数渐近稳定

的,并且是二次型意义下最优的.

另外,因为 $-0.06 \leq \Delta C < 0$, $\gamma \leq 0.95$,并结合文献[6]中给定的其他物理参数值,可取

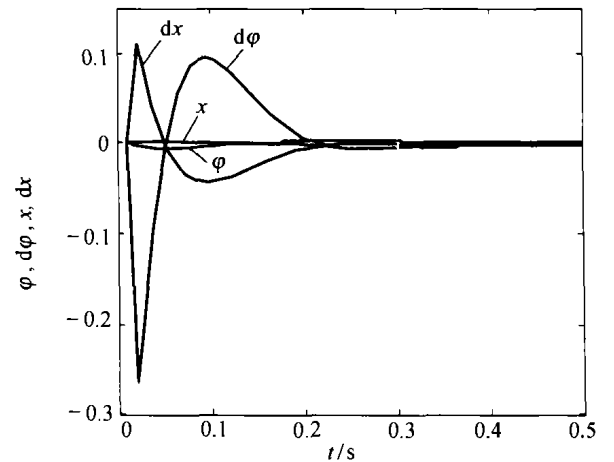
$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0.03 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$E = \text{diag}\{1, 1, 1, 10\}, F(t) = I_4.$$

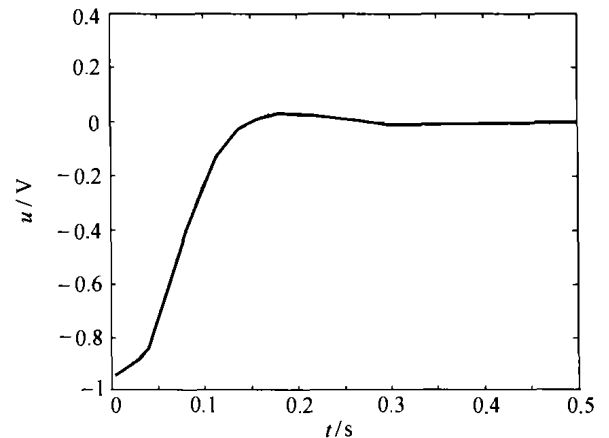
3.3 摆杆镇定问题(Stabilization problem of pendulum)

取 $Q = \text{diag}\{1000, 1, 750, 1\}$, $R = 1$, $\epsilon = 1000$,解方程(6)可得 $[k_x \ k_{\dot{x}} \ k_\varphi \ k_{\dot{\varphi}}] = [-42.6908 \ -29.2930 \ -111.3736 \ -14.4180]$.

当 $L = 0.305$, $\Delta C = -0.06$, $\delta(\dot{x}) = 0.95\dot{x}$ 时,对非线性模型(4)进行仿真得到的各项控制指标值为 $\max_{t>0.5} |\varphi| = 8.3462 \times 10^{-4} \text{ rad}$, $\max_{t>1} |x| = 8.9178 \times 10^{-4} \text{ m}$, $\max(u) = 0.9303 \text{ V}$. 各项指标均满足,且评价指标为 $\int_0^6 \varphi^2(\tau) d\tau = 3.1520 \times 10^{-6}$. 仿真曲线如图4所示.



(a) 系统状态曲线

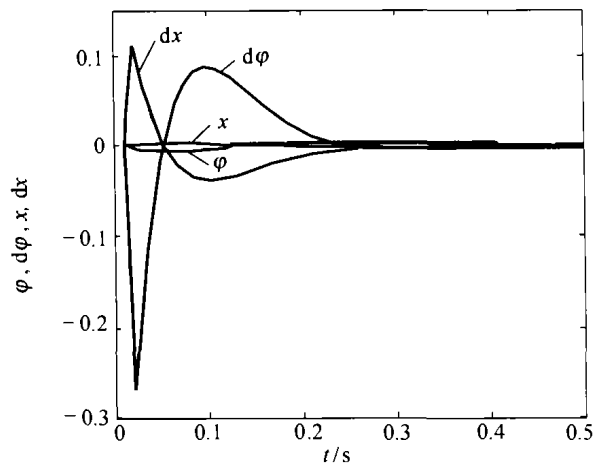


(b) 控制输入曲线

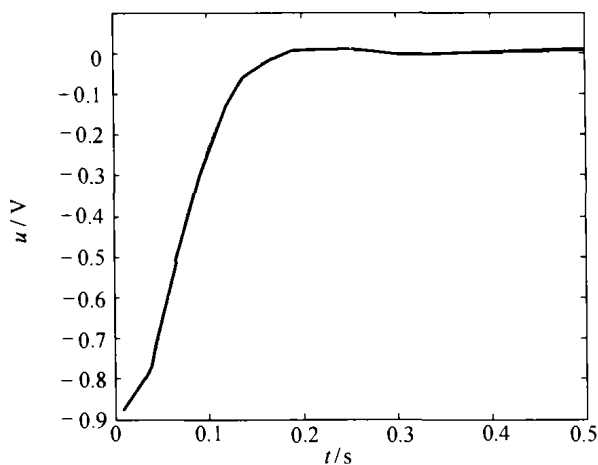
图4 鲁棒控制摆杆镇定问题仿真曲线

Fig. 4 Simulation plots of robust pendulum stabilization

当 $L = 0.305, \Delta C = -0.03, \delta(\dot{x}) = 0.475\dot{x}$ 时, 对非线性模型(4) 进行仿真得到的各项控制指标值为 $\max_{t>0.5} |\varphi| = 0.001 \text{ rad}, \max_{t>1} |x| = 9.1827 \times 10^{-4} \text{ m}, \max(u) = 0.8711 \text{ V}$. 各项指标均满足, 且评价指标为 $\int_0^6 \varphi^2(\tau) d\tau = 3.6432 \times 10^{-6}$. 仿真曲线如图 5 所示.



(a) 系统状态曲线



(b) 控制输入曲线

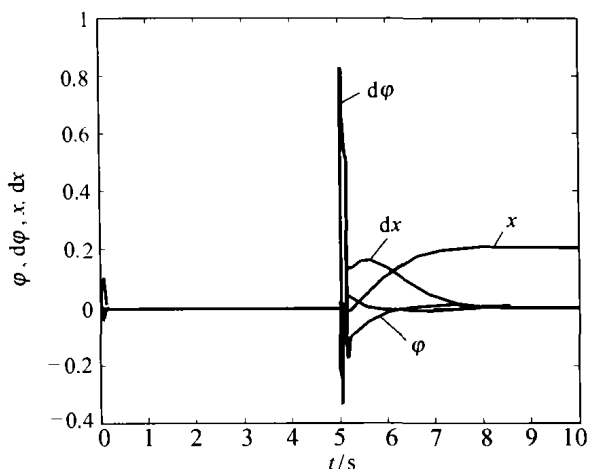
图 5 鲁棒控制摆杆镇定问题仿真曲线

Fig. 5 Simulation plots of robust pendulum stabilization

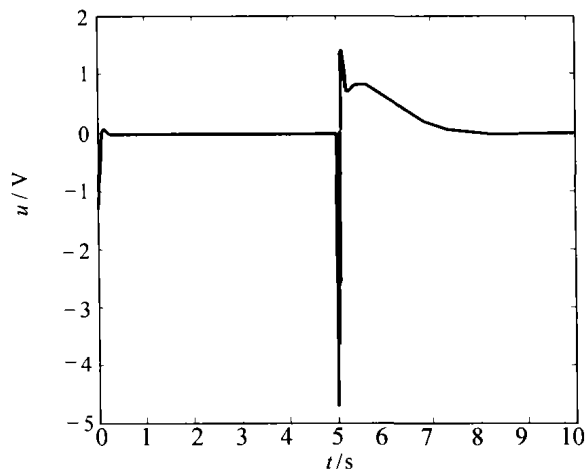
3.4 台车位置调节问题 (Cart tracking problem)

取 $Q = \text{diag}\{250, 1, 5000, 1\}, R = 1, \epsilon = 700$, 求解方程(6) 可得, $[k_x \ k_v \ k_\varphi \ k_{\dot{\varphi}}] = [-37.0213 \ -41.9678 \ -162.8710 \ -20.5760]$.

当 $L = 0.305, \Delta C = -0.06, \delta(\dot{x}) = 0.95\dot{x}$ 时, 对非线性模型(4) 进行仿真得到的各项控制指标值为 $\max_{t>6} |\varphi| = 0.0103 \text{ rad}, \max_{t>7} |x - x_d| = 0.0095 \text{ m}, \max(u) = 4.7448 \text{ V}$. 各项指标均满足, 且评价指标为 $\int_0^{10} (\varphi^2(\tau) + (x(\tau) - x_d)^2) d\tau = 0.2308$. 仿真曲线如图 6 所示.



(a) 系统状态曲线

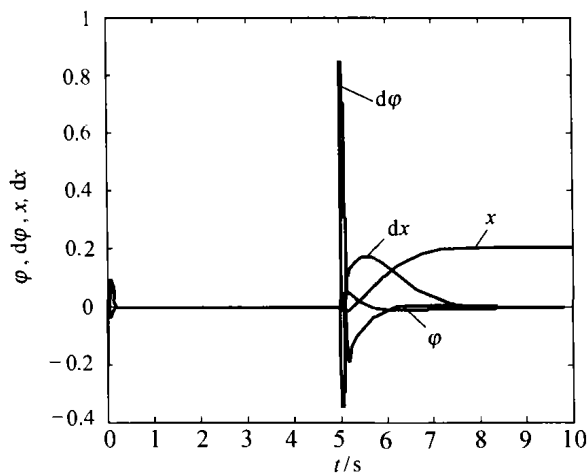


(b) 控制输入曲线

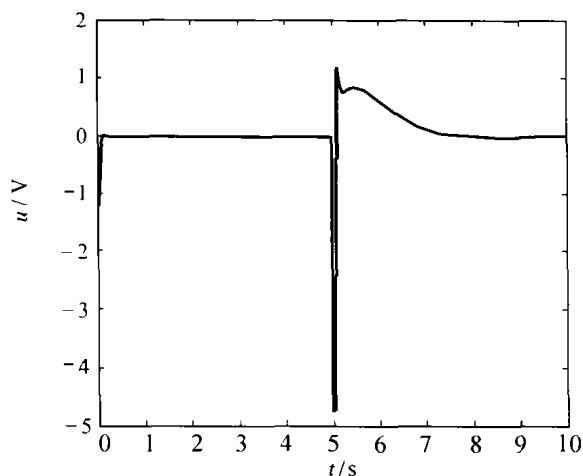
图 6 鲁棒控制台车位置调节问题仿真曲线

Fig. 6 Simulation plots of robust cart tracking problem

当 $L = 0.305, \Delta C = -0.03, \delta(\dot{x}) = 0.475\dot{x}$ 时, 对非线性模型(4) 进行仿真得到的各项控制指标值为 $\max_{t>6} |\varphi| = 0.0116 \text{ rad}, \max_{t>7} |x - x_d| = 0.0086 \text{ m}, \max(u) = 4.7617 \text{ V}$. 各项指标均满足, 且评价指标为 $\int_0^{10} (\varphi^2(\tau) + (x(\tau) - x_d)^2) d\tau = 0.2315$. 仿真曲线如图 7 所示.



(a) 系统状态曲线



(b) 控制输入曲线

图7 鲁棒控制台车位置调节问题仿真曲线

Fig. 7 Simulation plots of robust cart tracking problem

4 结论(Conclusion)

分别应用拟人控制和鲁棒 LQ 控制解决了倒立摆基准问题标称系统控制和鲁棒控制问题,文献[6]中要求的各项控制指标均得到很好的满足.当摩擦系数存在摄动时,鲁棒 LQ 控制下的闭环不确定系统是指数渐近稳定的,并且是二次型意义下最优的.

参考文献(References):

- [1] 张明廉,郝健康,何卫东.拟人智能控制与三级倒立摆[J].航空学报,1995,16(6):654-661.
(ZHANG Minglian, HAO Jiankang, HE Weidong. Human-imitating intelligent control and the triple in-verted pendulum [J]. *Acta Aeron-*

autica et Astronautica Sinica, 1995, 16(6): 654 - 661.)

- [2] 杨亚伟,张明廉.三级倒立摆的数控稳定[J].北京航空航天大学学报,2000,26(3):311-314.
(YANG Yawei, ZHANG Minglian. Stabilizing of the triple inverted pendulum using computer[J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2000, 26(3): 311 - 314.)
- [3] 张明廉,孙昌龄,杨亚伟.拟人控制二维单倒立摆[J].控制与决策,2002,17(1):53-56.
(ZHANG Minglian, SUN Changling, YANG Yawei. Human-imitating control for the 2-D inverted pendulum [J]. *Control and Decision*, 2002, 17(1): 53 - 56.)
- [4] 李诚,张明廉.基于物理模型的拟人智能控制[J].航空学报,2004,25(2):147-151.
(LI Cheng, ZHANG Minglian. Human-imitating intelligent control based on the physical model [J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2004, 25(2): 147 - 151.)
- [5] MEHDI D, HAMID A M, PERRIN F. Robustness and optimality of linear quadratic controller for uncertain systems [J]. *Automatica*, 1996, 32(7): 1081 - 1083.
- [6] 申铁龙,梅生伟,王宏,等.鲁棒控制基准设计问题:倒立摆控制[J].控制理论与应用,2003,20(6):974-975.
(SHEN Tielong, MEI Shengwei, WANG Hong, et al. A benchmark problem robust control of inverted pendulum [J]. *Control Theory & Applications*, 2003, 20(6): 974 - 975.)

作者简介:

李 诚 (1977—),男,河北衡水人,在读博士,1999年7月在北京航空航天大学自动控制系统获工学学士学位,1999年9月至今在北京航空航天大学自动控制系统攻读博士学位,研究方向为智能控制、非线性控制, E-mail: lcbuaa@yahoo.com;

张明廉 (1934—),男,上海人,北京航空航天大学教授,博士生导师,主要从事飞行控制与智能控制的研究与教学。