

文章编号: 1000 - 8152(2004)05 - 0684 - 05

基于非线性控制方法的倒立摆系统控制

陈 谋, 姜长生, 吴庆宪

(南京航空航天大学 自动化学院, 江苏 南京 210016)

摘要: 应用非线性系统跟踪控制方法对倒立摆系统的控制进行研究. 基于非线性系统控制方法对倒立摆系统摆的镇定问题、台车位置调节问题和鲁棒控制问题设计出了具体的控制器. 最后给出了在所设计的各种控制器作用下系统的仿真结果, 结果表明所设计的控制器对倒立摆系统的稳定控制具有良好的效果.

关键词: 倒立摆系统; 非线性控制; 滑模控制; 神经网络

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Inverted pendulum system control based on nonlinear control method

CHEN Mou, JIANG Chang-sheng, WU Qing-xian

(Automation College, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing Jiangsu 210016, China)

Abstract: The stable control of the inverted pendulum system is studied with the nonlinear tracking control method. The controllers were designed to perform the stable control of the pendulum, the regulation of the cart, and the robust control of the inverted pendulum system based on nonlinear tracking control method. Finally, the simulation results were given to demonstrate the feasibility of the designed controllers.

Key words: inverted pendulum system; nonlinear control; sliding mode control; neural networks

1 引言 (Introduction)

由于倒立摆系统是一个强耦合的非线性系统, 因此目前国内外学者大都致力于应用非线性控制方法对其进行有效控制. 文献[1]应用 Lie 理论对单极倒立摆系统进行局部线性化, 并采用能量反馈的方法对其进行了起摆控制. 文献[2]对单极倒立摆系统设计了基于模糊模型的自适应控制算法具有一定的有效性, 而文献[3]应用模糊滑模控制方法研究了单极倒立摆系统的鲁棒稳定控制问题. 文献[4]针对单极倒立摆系统设计了单输入单输出非线性系统状态观测器, 然后基于观测器设计控制器并取得一定的控制效果. 滑模控制方法^[5]是非线性系统控制常采用的一种鲁棒控制方法, 因此将其用于倒立摆的鲁棒控制具有很好的效果.

本文首先对文献[6]所给出的倒立摆模型进行分析, 得到其仿射非线性模型, 然后应用非线性系统的跟踪控制方法对倒立摆摆的镇定问题、台车位置调节问题和鲁棒控制问题进行研究, 同时将神经网络和滑模控制相结合并应用于倒立摆系统摆的质心未知时的鲁棒控制器设计. 仿真结果表明所设计的控制器是十分有效的.

2 问题的描述 (Problem statement)

所要研究的对象为水平移动的小台车及由其支撑的单节倒立摆系统. 其具体的运动方程参见文献[6]. 为了便于分析, 假设 $z_1(t) = x(t)$, $z_2(t) = \varphi(t)$, $z_3(t) = \dot{x}(t)$, $z_4(t) = \dot{\varphi}(t)$, 则倒立摆系统可写成如下仿射非线性形式:

$$\begin{cases} \dot{z} = f(z) + g(z)v, \\ y = h(z). \end{cases} \quad (1)$$

其中 $z = [z_1, z_2, z_3, z_4]^T$, v 为系统输入, $f = [f_1(z), \dots, f_4(z)]^T$, $g = [g_1(z), \dots, g_4(z)]^T$ 很容易由文献[6]得到. 由非线性系统相对度的定义可知, 由式(1)描述的倒立摆系统的相对度为 $d = 2$. 于是输入输出关系可写为

$$y^{(d)} = \alpha(x) + \beta(x)v. \quad (2)$$

其中 $\alpha = L_f^d h(x)$, $\beta = L_g L_f^{d-1} h(x)$. 假设系统的控制目标是使系统输出 y 及其至 $d - 1$ 阶导数 $\dot{y}, \dots, \dot{y}^{(d-1)}$ 跟踪有界参考信号 y_m 及其相应阶的导数. 定义输出信号的跟踪误差为 $e = y_m - y$. 令

$$e_s(t) = e^{(d-1)}(t) + k_{d-2}e^{(d-2)}(t) + \dots + k_1\dot{e}(t) + k_0e(t), \quad (3)$$

则

$$e_s(s) = L(s)e(s). \quad (4)$$

其中 $L(s) = s^{(d-1)} + k_{d-2}s^{(d-2)} + \dots + k_1s + k_0$, 且它的所有根位于开左半平面. 为研究方便, 令综合误差为

$$\bar{e}_s = \dot{e}_s(t) - e^{(d)}(t). \quad (5)$$

3 倒立摆系统摆的镇定问题及台车位置调节问题研究 (Study on the stable control problem of the pendulum and the regulation problem of the cart)

为了采用非线性控制方法研究倒立摆系统摆的镇定问题和台车位置调节问题, $y = h(z)$ 选取为 $\tau_1 z_1 + \tau_2 z_2$, 其中 τ_1, τ_2 为非负设计参数. 则可得到倒立摆的输入输出非线性模型为

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \tau_1 \dot{z}_1 + \tau_2 \dot{z}_2 = \tau_1 \dot{z}_3 + \tau_2 \dot{z}_4 = \\ &\tau_1 f_3(z_2, z_3, z_4) + \tau_2 f_4(z_2, z_3, z_4) + \\ &(\tau_1 g_3(z_2) + \tau_2 g_4(z_2))v. \end{aligned} \quad (6)$$

设计如下形式的控制器:

$$v = \frac{-\tau_1 f_3(z_2, z_3, z_4) - \tau_2 f_4(z_2, z_3, z_4) + \vartheta(t)}{\tau_1 g_3(z_2) + \tau_2 g_4(z_2)}, \quad (7)$$

$$\vartheta(T) = y_m^{(d)} + \gamma e_s + \bar{e}_s. \quad (8)$$

其中 $\gamma > 0$ 为设计参数.

定理 1 考虑系统 (1), 其控制量选为式 (7) 的形式, 则在该控制器作用下, 系统具有全局稳定性, 且达到期望的跟踪效果.

证 令 $V = e_s^2/2$, V 对 t 的导数为

$$\dot{V} = e_s \dot{e}_s. \quad (9)$$

因为 $e = y_m - y$, 由式 (5) 可知

$$\dot{e}_s = \bar{e}_s + y_m^{(d)} - y^{(d)}. \quad (10)$$

将式 (6) ~ (8) 代入上式可得

$$\begin{aligned} \dot{e}_s &= \bar{e}_s + (\vartheta - \gamma e_s - \bar{e}_s) - [\tau_1 f_3 + \tau_2 f_4 + \\ &(\tau_1 g_3 + \tau_2 g_4)v] = -\gamma e_s. \end{aligned} \quad (11)$$

所以有

$$\dot{V} \leq -\gamma e_s^2. \quad (12)$$

又由于 V 连续可微, 所以在控制器 (7) 的作用下, 系统具有全局稳定性. 对式 (12) 两边从 $t = 0$ 到 $t = T$ 取积分, 且考虑到而 $V(T) \geq 0$, 可得

$$\gamma \int_0^T e_s^2 dt \leq V(0) - V(T) \leq V(0). \quad (13)$$

因此 e_s 有界, 于是在控制器 (7) 作用下系统能达到期望的跟踪效果.

注 其中 τ_1, τ_2 为大于零的设计参数. 当处理倒立摆系统摆的镇定问题时, τ_2 起主导作用. 当处理台车位置调节问题时, τ_1 起主导作用. 因此选择适当的 τ_1, τ_2 则可以得到满足要求的倒立摆系统摆的镇定问题和台车位置调节问题的输入解.

4 倒立摆系统鲁棒控制器设计 (Design of the robust controller for the inverted pendulum system)

当摩擦系数 C 不确定和摆长不定时, 则倒立摆的模型可修正为如下形式:

$$y^{(d)} = \alpha_1(z) + \alpha_2(z) + g(z)u + d(z). \quad (14)$$

其中 $\alpha_2(z)$ 为由质心位置 L 未知引起的模型不确定性, $d(z)$ 为摩擦系数和摩擦力所引起的系统不确定性, 假设 $\|d(z)\| \leq D\|z\|$. 若 $h(z)$ 选取为 $\tau_1 z_1 + \tau_2 z_2$, 则有

$$y^{(d)} = \tau_1 \dot{z}_1 + \tau_2 \dot{z}_2, \alpha_1 = -\frac{\tau_2 K_7 K_g^2}{(M+m)R_a r^2} z_3,$$

$$g = \frac{\tau_2 K_7 K_g}{(M+m)R_a r}, d = -\tau_2 \delta(z_3),$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= -\frac{\Delta C + C}{J + mL^2} \tau_1 z_4 - \frac{mL \cos z_2}{J + mL^2} \tau_1 \dot{z}_3 + \\ &\frac{mLg \cos z_2}{J + mL^2} \tau_1 \sin z_2 - \frac{mL \cos z_2}{M+m} \tau_2 \dot{z}_4 + \frac{mL \sin z_2}{M+m} \tau_2 \dot{z}_3^2. \end{aligned}$$

假设 $\alpha_2(z)$ 可用神经网络在线逼近, 逼近结果为 $\hat{\alpha}_2(z \setminus w_{\alpha_2})$, 其中 w_{α_2} 为相应的网络权值. 选择神经网络为 RBF 神经网络, 则有

$$\hat{\alpha}_2(z) = w_{\alpha_2}^T(t) \varphi_{\alpha_2}(z). \quad (15)$$

其中 $\varphi_{\alpha_2}(z)$ 为相应 RBF 神经网络的基函数.

定义 RBF 神经网络对非线性函数逼近的最优权值为

$$w_{\alpha_2}^* = \arg \min_{w_{\alpha_2} \in \Omega_{\alpha_2}} \left[\sup_{z \in s_2} |\hat{\alpha}_2(z \setminus w_{\alpha_2}) - \alpha_2(z)| \right]. \quad (16)$$

式中 $\Omega_{\alpha_2} = \{w_{\alpha_2} : \|w_{\alpha_2}\| \leq M_{\alpha_2}\}$ 为参数的可行域, 其中 M_{α_2} 为设计参数, $s_2 \subset \mathbb{R}^n$ 为系统状态可达空间.

在最优权值下非线性函数可写为

$$\alpha_2 = w_{\alpha_2}^{*T} \varphi_{\alpha_2}(z) + \omega_{\alpha_2}(z). \quad (17)$$

其中 $\omega_{\alpha_2}(z)$ 为神经网络最小逼近误差, 假设

$$|\omega_{\alpha_2}(z)| \leq W_{\alpha_2}(z), \quad (18)$$

其中 $W_{\alpha_2}(z) > 0$ 为神经网络逼近函数 $\alpha_2(z)$ 的误差上界.

定义神经网络权值与其最优权值的误差为

$$\hat{w}_{a_2} = w_{a_2} - w_{a_2}^* \quad (19)$$

对系统(14)设计如下形式的控制器:

$$u = u_c + u_s \quad (20)$$

其中

$$u_c = [- (\alpha_1 + \hat{a}_2(z; w_{a_2})) + v(t)]/g, \quad (21)$$

$$v(t) = y_m^{(d)} + \gamma e_s + e_s, \quad (22)$$

$$u_s = (W_{a_2}(z) + D \|z\|) \text{sgn}(e_s)/g. \quad (23)$$

u_c 为系统的等效控制器; $\gamma > 0$ 为设计参数; u_s 为系统的滑模控制器用来减小系统的跟踪误差, 具有鲁棒控制作用. 滑模控制器的滑模面选为 $S = e_s = 0$.

神经网络权值的自适应律选为

$$\dot{w}_{a_2} = \begin{cases} -\mu \varphi_{a_2}(z) e_s + \varepsilon (\|w_{a_2}\| - M_{a_2}), \\ \|w_{a_2}\| \leq M_{a_2}, e_s w_{a_2}^T \varphi_{a_2}(z) > 0, \\ w_{a_2}^T w_{a_2}^* > 0, \\ P[\cdot], \\ \|w_{a_2}\| = M_{a_2}, e_s w_{a_2}^T \varphi_{a_2}(z) < 0, \\ w_{a_2}^T w_{a_2}^* < 0. \end{cases} \quad (24)$$

其中 μ 为神经网络学习率. 投影算子定义为

$$P[\cdot] = -\mu e_s \varphi_{a_2}(z) + \mu e_s w_{a_2} w_{a_2}^T \varphi_{a_2}(z) / \|w_{a_2}\|^2. \quad (25)$$

式(24)中设计参数向量 ε 定义为

$$\varepsilon = \lambda \text{sgn}(w_{a_2}). \quad (26)$$

上式中, $\lambda > 0$ 为常数, 其作用是调节系统的动态性能, 设计时视具体情况给定.

定理 2 考虑系统(14), 其控制量选为式(20), 取式(24)作为神经网络权值向量的自适应律, 则有

1) 在自适应过程中有 $\|w_{a_2}\| \leq M_{a_2}$.

2) 在控制器(20)的作用下, 系统具有全局稳定性, 且跟踪误差有界, 同时系统滑模条件成立.

证 1) 设 $V_a = w_{a_2}^T w_{a_2} / 2$, 当 $\|w_{a_2}\| \leq M_{a_2}$ 时, 由式(24)的第1式可知

$$\begin{aligned} \dot{V}_a &= w_{a_2}^T \dot{w}_{a_2} = \\ &- w_{a_2}^T \mu \varphi_{a_2}(z) e_s + \varepsilon w_{a_2} (\|w_{a_2}\| - M_{a_2}) < 0. \end{aligned}$$

当 $\|w_{a_2}\| = M_{a_2}$ 时, 由式(24)的第2式可知

$$\dot{V}_a = 0.$$

因此对任意的 $t \geq 0$, 均有 $\|w_{a_2}\| \leq M_{a_2}$.

2) 令 $V = e_s^2 / 2 + \hat{w}_{a_2}^T \hat{w}_{a_2} / (2\mu)$, V 对 t 的导数为

$$\dot{V} = e_s \dot{e}_s + \hat{w}_{a_2}^T \dot{\hat{w}}_{a_2} / \mu. \quad (27)$$

因为 $e = y_m - y$, 由式(5)可知

$$\dot{e}_s = \dot{\bar{e}}_s + y_m^{(d)} - y^{(d)}. \quad (28)$$

将式(14), (21), (22), (27)代入上式可得

$$\dot{e}_s = -\gamma e_s + [\hat{a}_2(z) - a_2(z) - d(z)] - g u_s. \quad (29)$$

考虑到式(18), (19), 则可得

$$\dot{e}_s = -\gamma e_s + (\hat{w}_{a_2}^T \varphi_{a_2}(z) - \omega_{a_2}(z)) - g u_s - d(z). \quad (30)$$

将上式代入式(27)并考虑到 $\dot{\hat{w}}_{a_2} = \dot{w}_{a_2}$ 和式(23)有

$$\dot{V} \leq -\gamma e_s^2 - \omega_{a_2}(z) e_s - g u_s e_s - d(z) e_s. \quad (31)$$

又因为

$$-\omega_{a_2}(z) e_s \leq |\omega_{a_2}(z)| |e_s| \leq W_{a_2}(z) |e_s|, \quad (32)$$

同时考虑到

$$|e_s| = e_s \text{sgn}(e_s), \quad (33)$$

则有

$$\dot{V} \leq -\gamma e_s^2. \quad (34)$$

而又由于 V 连续可微, 所以在控制器(20)的作用下, 系统具有全局稳定性.

式(34)两边从 $t = 0$ 到 $t = T$ 取积分, 并考虑到 $V(T) \geq 0$ 可得

$$\gamma \int_0^T e_s^2 dt \leq V(0). \quad (35)$$

因此 e_s 有界, 于是在控制器(20)作用下跟踪误差有界. 且由 e_s 的定义可知, 在所设计的控制器作用下系统能达到控制目标.

为解决滑模控制中的颤振问题, 常采样饱和函数对控制信号进行平滑处理, 最终滑模控制律可写为

$$u_s = (W_{a_2}(z) + D \|z\|) \text{sat}(e_s / \delta) / g. \quad (36)$$

其中 $\delta > 0$. 为了便于实现, 选择如下形式的饱和函数:

$$\text{sat}(u) = \begin{cases} 1, & u \geq 1, \\ u, & |u| < 1, \\ -1, & u \leq -1. \end{cases} \quad (37)$$

5 倒立摆系统的控制仿真结果 (Simulation results of the inverted pendulum)

1) 摆的镇定.

设计形如式(13)的控制器, 选取 $\tau_1 = 1, \tau_2 = 0, k_0 = 5, \gamma = 10, x_d = 0, \varphi_d = 0$, 则仿真结果图1所示.

其中 $\int_0^6 \varphi^2(\tau) d\tau = 7.2$, 且从控制输出可看出满 $|v(t)| \leq 10.0$ V.

2) 台车位置调节.

设计形如式(7)的控制器, 选取 $\tau_1 = 1, \tau_2 = 0.5, k_0 = 3, \gamma = 10, x_d = 0.2 \text{ m}, \varphi_d = 0$, 则仿真结

果如图 2 所示. 其中 $\int_0^6 \{\varphi^2(\tau) + (x(\tau) - x_d)^2\} d\tau = 13.704$, 且从控制输出可看出满足 $|v(t)| \leq 10.0 \text{ V}$.

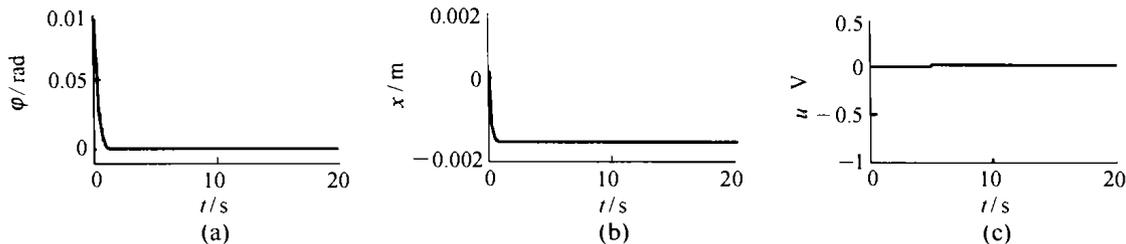


图 1 摆的镇定问题仿真结果
Fig. 1 Simulation results of stable control problem for the pendulum

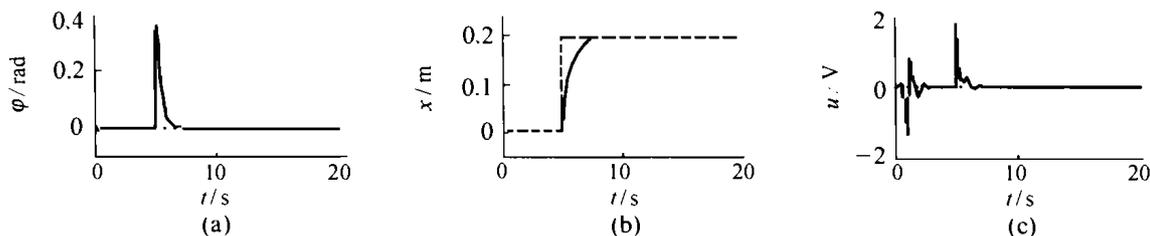


图 2 台车问题仿真结果
Fig. 2 Simulation results of stable control problem for the cart

3) 鲁棒控制设计.

设计鲁棒控制器(20)时, 选取 $\tau_1 = 1, \tau_2 = 0.01, k_0 = 1, \gamma = 150$, 神经网络的输入为 $\dot{x}, \varphi, d\varphi$, 隐层神经元个数选为 5 个, $W_{a_2}(z) = 0.001, D = 0.95, x_d = 0, \varphi_d = 0$. 则在该控制器作用下系统的仿真结果如图 3 所示.

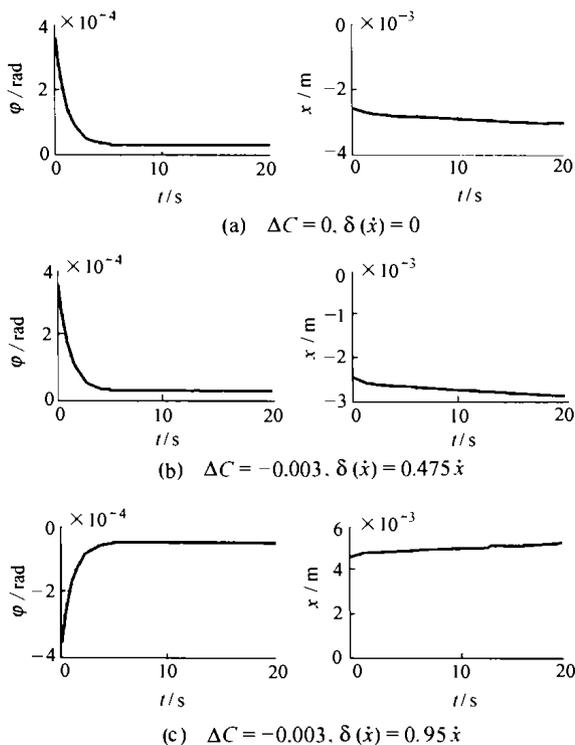
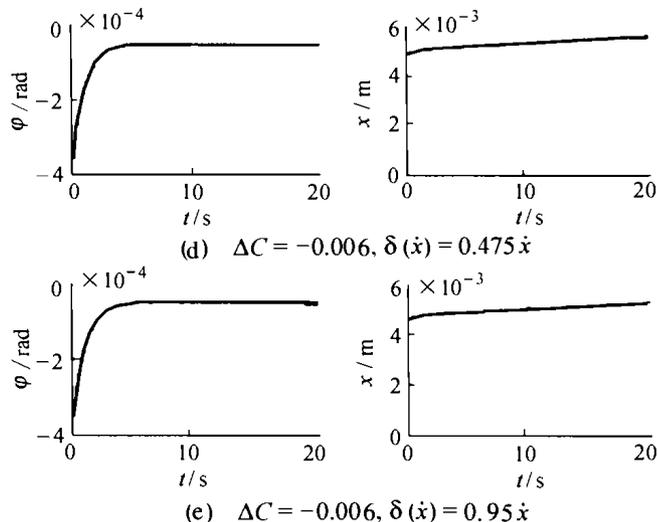


图 3 鲁棒控制结果

Fig. 3 Simulation results of Robust control

对摆的镇定和台车位置调节问题, 可以验证当设计参数 τ_2, k_0, γ 选取不同值时, 控制效果不一样且 γ 越大时效果越好. 而从鲁棒控制的仿真结果来看, 所设计的控制器能很好的适应倒立摆摆长以及摩擦系数的变化, 且随着摆长以及摩擦系数的变化, 系统的仿真结果变化不大.

6 结束语 (Conclusion)

由于所采用的控制方法为非线性控制方法, 不需要对倒立摆系统的非线性模型进行线性化处理,

因此本文中所设计的控制控制器相对于用一般线性控制方法设计的控制器而言更加有效,同时所设计的控制器简单且易实现.最后给出的仿真结果表明所设计的控制器对倒立摆系统的稳定控制具有良好的效果.

参考文献(References):

- [1] 付莹,张广立.倒立摆系统的非线性稳定控制及起摆问题的研究[J].组合机床与自动化加工技术,2003,24(1):35-37.
(FU Ying, ZHANG Guangli. Nonlinear control of swing-up and stabilization of an inverted pendulum [J]. *Modular Machine Tool & Automatic Manufacturing Technique*, 2003, 24(1): 35-37.)
- [2] YU Wenshyong, SUN Chihjen. Fuzzy model based adaptive control for a class of nonlinear systems [J]. *IEEE Trans on fuzzy systems*, 2001, 9(3): 413-425.
- [3] LI Shaoyuan, XI Yugeng. Adaptive fuzzy sliding model control for a class of uncertain dynamic systems [C] // *Proc of the 3rd World Congress on Intelligent Control and Automation*. Hefei China; University of Science and Technology of China Press, 2000, 1848-1853.
- [4] 苏宏业,汪洋,褚健.单输入单输出非线性系统的状态观测器设计[J].控制理论与应用,1997,14(5):702-707.

- (SU Hongye, WANG Yang, CHU Jian. A state observer design approach for nonlinear systems based on state transformation [J]. *Control Theory & Applications*, 1997, 14(5): 702-707.)
- [5] 陈谋,姜长生.基于神经网络的一类非线性系统自适应滑模控制[J].应用科学学报,2004,22(1):76-80.
(CHEN Mou, JIANG Changsheng. Adaptive sliding mode control for a class of nonlinear system based on neural networks [J]. *Journal of Applied Sciences*, 2004, 22(1): 76-80.)
- [6] 申铁龙,梅生伟,王宏,等.鲁棒控制基准设计问题:倒立摆控制[J].控制理论与应用,2003,20(6):974-975.
(SHEN Tielong, MEI Shengwei, WANG Hong, et al. Basic design problem of robust control: Control of inverted pendulum system [J]. *Control Theory & Applications*, 2003, 20(6): 974-975.)

作者简介:

陈谋 (1975—),男,2004年获南京航空航天大学博士学位并留校任教,主要研究方向为非线性系统控制等, E-mail: chenmouse@hotmail.com;

姜长生 (1942—),男,教授,博士生导师,发表论文100余篇,获省部级科研成果奖7项,主要研究方向为智能控制等;

吴庆宪 (1955—),男,教授,博导,发表论文40余篇,获省部级科研成果奖12项,主要研究方向为智能控制等.

(上接第669页)

- [5] 韩京清.非线性状态误差反馈控制律-NLSEF[J].控制与决策,1995,10(3):221-225.
(HAN Jingqing. Nonlinear state error feedback control law-NLSEF [J]. *Control and Decision*, 1995, 10(3): 221-225.)
- [6] 申铁龙,梅生伟,王宏,等.鲁棒控制基准设计问题:倒立摆控制[J].控制理论与应用,2003,20(6):974-975.
(SHEN Tielong, MEI Shengwei, WANG Hong, et al. Robust control for benchmark design problem: the inverted pendulum control [J]. *Control Theory & Applications*, 2003, 20(6): 974-975.)
- [7] 申铁龙,梅生伟,王宏,等.基准设计问题的补充说明:试验条件

[J].控制理论与应用,2003,20(6):976.

(SHEN Tielong, MEI Shengwei, WANG Hong, et al. Supplementary explanation for benchmark design problem: the test conditions [J]. *Control Theory & Applications*, 2003, 20(6): 976.)

作者简介:

武利强 (1975—),男,博士研究生,主要研究方向为非线性控制理论及其应用,信号处理等, E-mail: wlq@amss.ac.cn;

韩京清 (1937—),男,研究员,博士生导师,主要研究领域为非线性控制理论及其应用.