

基于模糊加权的倒立摆混合控制

赵文杰, 张丽娟, 刘延泉, 刘玉燕

(华北电力大学 自动化系, 河北 保定 071003)

摘要: 针对小车倒立摆系统, 提出了一种线性状态反馈控制和滑模控制模糊加权的控制方法. 滑模控制器的作用是将摆角控制在零的一个邻域内, 在此邻域内首先采用近似的线性化模型来描述倒立摆系统, 然后采用基于极点配置的方法设计系统的线性状态反馈控制器以使系统的状态稳定在给定值, 两个控制器的输出通过加权求和作为倒立摆的控制作用. 仿真结果证实了该方法的有效性.

关键词: 滑模控制; 极点配置; 线性状态反馈; 混合控制

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Fuzzy weighted hybrid control for inverted pendulum

ZHAO Wen-jie, ZHANG Li-juan, LIU Yan-quan, LIU Yu-yan

(Department of Automation, North China Electric Power University, Baoding Hebei 071003, China)

Abstract: A fuzzy-weighted control method, which combines sliding mode control and linear state feedback, is proposed for inverted pendulum. Sliding mode control was used to regulate the pendulum angle to neighborhood of zero. In the neighborhood of zero, the linear model was obtained by approximating the nonlinear model of inverted pendulum and the linear state feedback controller based on pole assignment was designed to stabilize the state of the system. A weight-sum of the controller outputs was then used to supply the control action to inverted pendulum. The results of simulation demonstrated the effectiveness of the method.

Key words: sliding mode control; pole assignment; linear state feedback; hybrid control

1 引言 (Introduction)

倒立摆系统的控制问题一直是控制研究中的一个重要问题. 控制的目的是通过给小车底座施加一个力(控制量), 保持摆杆直立并使小车停留在指定的位置. 倒立摆在控制中被广泛用来检验各种算法, 各种控制方法已取得许多成功^[1~3]. 作者针对文献[4]给定的倒立摆系统, 提出了线性状态反馈和滑模变结构模糊加权的控制方法, 仿真结果表明了该方法的有效性.

2 问题描述 (Problem statement)

由文献[4]可知, 在忽略交流电机的动态特性和台车的静态摩擦以及摆节点的摩擦时, 倒立摆系统的动态方程为

$$\begin{aligned} (J + mL^2) \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + (mL\cos\varphi(t)) \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \\ mLg\sin\varphi(t), \quad (1) \\ (M+m) \frac{d^2x(t)}{dt^2} + b \frac{dx(t)}{dt} + (mL\cos\varphi(t)) \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} = \end{aligned}$$

$$v(t) + mL\sin\varphi \left\{ \frac{d\varphi(t)}{dt} \right\}^2. \quad (2)$$

其中 m 为摆杆的质量, M 为小车的质量, $\varphi(t)$ 为摆杆与垂线的夹角, $x(t)$ 为小台位移, L 为摆杆质心距节点的距离, g 为重力加速度, $v(t)$ 为控制电压, b 为小车摩擦系数, $J = ml^2/3$ 为转动惯量.

控制的目的是保持摆杆直立并使小车停留在指定的位置.

3 控制器的设计 (Controller design)

为便于设计, 把式(1), (2)变换为如下形式:

$$\ddot{\varphi} = [(M+m)g\sin\varphi - u\cos\varphi]/(KL), \quad (3)$$

$$\ddot{x} = (-mg\sin\varphi\cos\varphi + 4u/3)/K, \quad (4)$$

其中

$$K = 4(M+m)/3 - m\cos^2\varphi, \quad (5)$$

$$u = v + mL\dot{\varphi}^2\sin\varphi - b\dot{x}. \quad (6)$$

3.1 滑模控制器 (Sliding mode controller)

滑模控制器的作用是将摆角 φ 控制在零的邻域内. 为设计方便, 把式(3)改写成如下形式:

$$\dot{\varphi} = f + gw. \quad (7)$$

其中

$$\begin{cases} f = (M + m)g\sin\varphi/KL, \\ w = -u\cos\varphi/K, \\ g = 1/L > 0. \end{cases} \quad (8)$$

考虑 L 具有不确定性, 且 $L \in [0.1, 0.625]$, 根据文献[5], 取

$$\begin{cases} \hat{g} = (g_{\min}g_{\max})^{1/2} = 4, \\ \beta = (g_{\max}/g_{\min})^{1/2} = 2.5. \end{cases} \quad (9)$$

其中 $\hat{g}$ 为 g 的估计值, β 为设计中的增益余量. 则

$$\begin{cases} \hat{L} = 1/\hat{g} = 0.25, \\ f = \hat{f} + \Delta f = (M + m)g\sin\varphi/(K\hat{L}) + \Delta f. \end{cases} \quad (10)$$

其中

$$\Delta f \leq F = \left| 6 \frac{1}{k} (M + m)g\sin\varphi \right|. \quad (12)$$

选择滑平面

$$s = \varphi + \lambda\varphi. \quad (13)$$

其中 $\lambda > 0$ 是可设计参数. 选择如下滑模存在条件:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 \leq -\eta |s|, (\eta > 0). \quad (14)$$

根据等效控制方法得

$$w_{eq} = -[(M + m)g\sin\varphi/K\hat{L} - \lambda\dot{\varphi}]/\hat{g}. \quad (15)$$

其中 w_{eq} 为等效控制项, 其定义为模型为估计值时, 其作用可保证 $s = 0$. 于是可选择如下滑模控制律:

$$w = \hat{g}^{-1}[w_{eq} - K\text{sgn}(s)]. \quad (16)$$

其中 $K = \beta(F + \eta) + (\beta - 1)|w_{eq}|$, $\text{sgn}(s)$ 为符号函数. 可以证明控制律(16)满足滑模存在条件式(14), 证明参见文献[5].

由于符号函数存在切换时的不连续性, 容易引起抖动现象, 因此这里设计的滑模控制器是采用能够改善系统“抖振”现象的具有边界层的滑模控制方法, 即用饱和函数 $\text{sat}(s/\phi)$ 代替符号函数 $\text{sgn}(s)$. $\text{sat}(s/\phi)$ 的定义为

$$\text{sat}(s/\phi) = \begin{cases} s/\phi, & |s/\phi| \leq 1, \\ \text{sgn}(s/\phi), & |s/\phi| > 1. \end{cases} \quad (17)$$

其中 $\phi > 0$ 为边界层厚度. 控制律式(16)可转化为

$$w = w_{eq} - \eta\text{sat}(s/\phi). \quad (18)$$

根据式(8), 可以得出滑模控制律 u_1 为

$$u_1 = u = -Kw/\cos\varphi. \quad (19)$$

3.2 线性状态反馈控制器 (Linear state feedback controller)

当摆角 φ 在零的邻域内即 $\varphi \approx 0$ 时, 可假定

$\sin\varphi \approx \varphi, \cos(\varphi) \approx 1$, 于是系统的非线性模型式(3),(4)可转化为如下模型:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(M + m)g/(KL) & 0 & 0 & b/(KL) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -mg/K & 0 & 0 & -4b/(3K) \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 4/(3k) \\ 0 \\ -1/(KL) \end{bmatrix} u, \quad (20)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} z. \quad (21)$$

其中 $z = [\varphi \quad \dot{\varphi} \quad x \quad \dot{x}]^T$, y 为输出向量.

在设计中, 取 $L = 0.25$, 根据系统性能指标的要求, 系统的闭环极点选择 $\mu_1 = -4, \mu_2 = -4, \mu_3 = -4, \mu_4 = -4$. 则相应的线性状态反馈控制律 u_2 为

$$u_2 = -C^T z. \quad (22)$$

其中

$$C = [-61, -11, -12, -12]. \quad (23)$$

可以验证当 $L \in [0.1, 0.525]$ 时, 在摆角 φ 的零邻域内, 当台车位置变化时, 系统的性能指标满足文献[4]的要求, 因此所设计的线性控制器具有一定的鲁棒性.

3.3 控制律的模糊加权 (Fuzzy-weighted control laws)

经过以上两步的控制器设计, 最后根据摆角的大小, 通过模糊函数决定滑模控制器输出 u_1 和极点配置控制器输出的权重. 系统的最终控制量为

$$u = au_1 + (1 - a)u_2, 0 \leq a \leq 1, \quad (24)$$

a 由下式确定:

$$a = \begin{cases} 1, & |\varphi| > 0.1, \\ (\varphi/0.1)^2, & |\varphi| \leq 0.1. \end{cases} \quad (25)$$

其中 φ 为摆角.

4 仿真 (Simulation)

系统的动态方程如式(1),(2)所示. 其中, $M = 1.32 \text{ kg}; m = 1.109 \text{ kg}; b = 0.1 \text{ N}/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1}); g = 9.8 \text{ m/s}^2; L = 0.25 \text{ m}$. 滑模控制器参数: $\lambda = 4, \eta = 10, \phi = 0.1$.

初始条件: $\varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0, x(t) = \dot{x}(t) = 0$. 采样周期为 0.01 s .

4.1 摆的镇定(Pendulum regulator)

沿 $f(t)$ 方向施加大小为 $40\delta(t)$ 的力, 仿真结果如图 1 和图 2 所示.

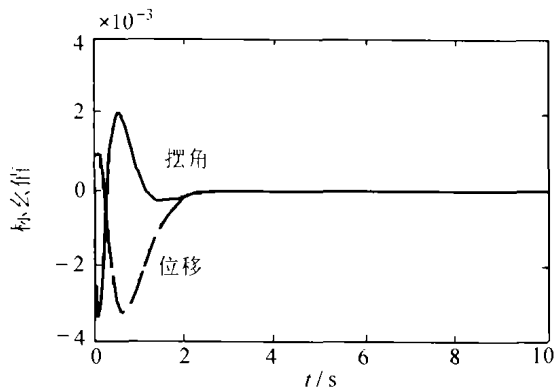


图 1 摆角和位移图

Fig. 1 Pendulum angle and cart position

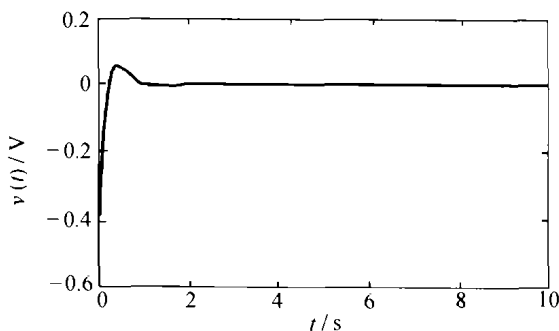


图 2 $v(t)$ 的响应曲线

Fig. 2 Response curve of $v(t)$

由仿真结果可知, 其响应满足 $\varphi(t) \rightarrow 0$, 并且 $|\varphi(t)| \leq 0.02 \text{ rad}$, $t \geq 0.5 \text{ s}$, $|x(t)| \leq 0.01 \text{ m}$, $t \geq 0.1 \text{ s}$, 性能指标 $\int_0^6 \varphi^2(t) dt = 2.855 \times 10^{-6}$, 且控制输入信号满足 $|v(t)| \leq 10.0 \text{ V}$.

4.2 台车位置调节(Cart position regulator)

在运行条件与 4.1 节相同的情况下, 运行 5 s 后, 对小台车给出 $x_d = 0.2 \text{ m}$ 的指令, 系统仿真结果如图 3, 4 所示.

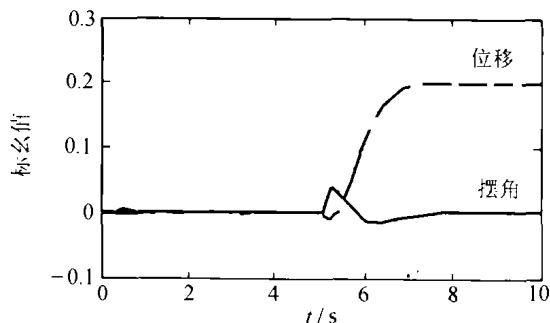


图 3 摆角和位移图

Fig. 3 Pendulum angle and cart position

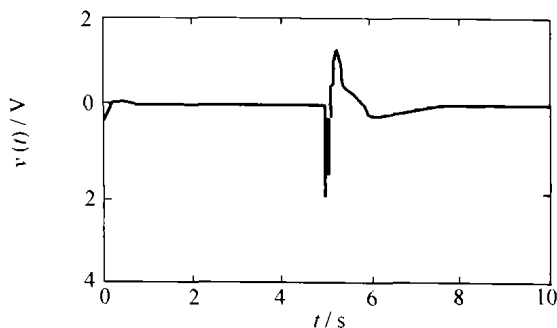


图 4 $v(t)$ 的响应曲线

Fig. 4 Response curve of $v(t)$

由仿真曲线可以看出系统满足 $x(t) \rightarrow x_d(t)$, $\varphi(t) \rightarrow 0$; 且当 $t \geq 7 \text{ s}$ 时, 有 $|x(t) - x_d| \leq 0.01 \text{ m}$. 性能指标 $\int_0^{10} [\varphi^2(\tau) + (x(\tau) - x_d)^2] d\tau = 0.0328$ 且输入信号满足 $|v(t)| \leq 10.0 \text{ V}$.

4.3 系统的鲁棒性(Robustness of system)

分别取摆的质心位置 $l = 0.1$ 和 $l = 0.525$ 两种情况来验证控制器的鲁棒性. 当 $l = 0.1$ 时, 仿真结果如图 5, 6 所示.

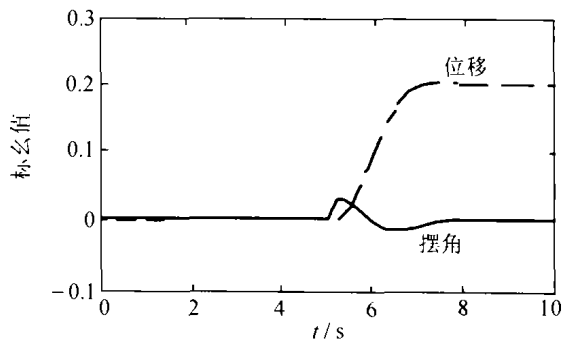


图 5 摆角和位移图 ($L = 0.1$)

Fig. 5 Pendulum angle and cart position ($L = 0.1$)

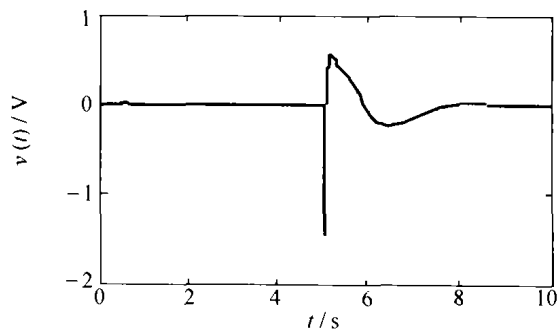
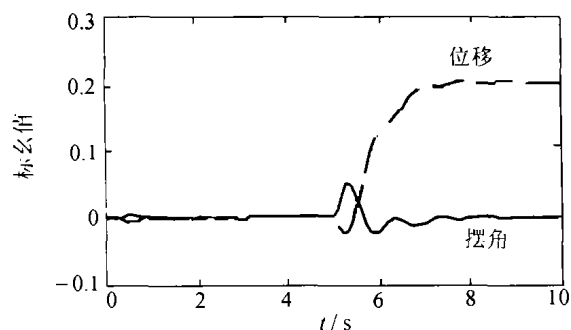
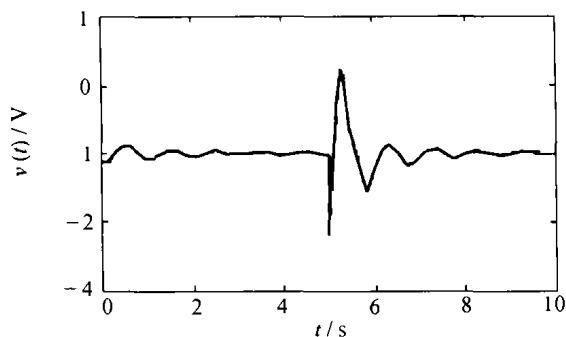


图 6 $v(t)$ 的响应曲线

Fig. 6 Response curve of $v(t)$

当 $L = 0.525$ 时, 仿真结果如图 7, 8 所示.

由仿真曲线可见, 针对 $0.1 \leq l \leq 0.525$ 范围内的各个不同的值上述性能指标均成立, 系统的鲁棒性强.

图7 摆角和位移图 ($L = 0.525$)Fig. 7 Pendulum angle and cart position ($L = 0.525$)图8 $v(t)$ 的响应曲线Fig. 8 response curve of $v(t)$

5 结论(Conclusion)

针对小车倒立摆非线性系统,本文中提出的线性状态反馈和滑模控制模糊加权的控制方法,分步骤的控制方法简化了控制系统的设计,模糊加权的

运用,消除了控制算法切换时出现的抖动.仿真结果证明了该方法的有效性.

参考文献(References):

- [1] MORI S Nishihara. Control of unstable mechanical system control of pendulum [J]. *Int J Control*, 1976, 23(5): 637 - 692.
- [2] FURUTA K, OCHIAI T, ONO N. Attitude Control of a triple inverted pendulum [J]. *Int J Control*, 1983, 39(6): 1351 - 1365.
- [3] MEIER H. Discrete computer control of a triple inverted pendulum [J]. *Optimal Control Application & methods*, 1990, (11): 157 - 172.
- [4] 申铁龙, 梅生伟, 王宏, 等. 鲁棒控制基准设计问题: 倒立摆控制 [J]. *控制理论与应用*, 2003, 20(6): 974 - 975.
(SHEN Tielong, MEI Shengwei, WANG Hong, et al. Standard design of robust control: inverted pendulum control [J]. *Control Theory & Applications*, 2003, 20(6): 974 - 975.)
- [5] SLOTINE J J E, LI W. *Applied Nonlinear Control* [M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1991: 175 - 192.

作者简介:

赵文杰 (1969—), 男, 华北电力大学博士生, 主要从事工业过程建模与控制等研究, E-mail: jwz2000@sina.com;

张丽娟 (1979—), 女, 华北电力大学硕士生, 研究方向为非线性系统的鲁棒控制, E-mail: Diana@126.com;

刘延泉 (1963—), 男, 华北电力大学副教授, 研究方向为工业过程建模与控制方法;

刘玉燕 (1978—), 女, 华北电力大学硕士生, 研究方向为鲁棒控制.