

倒立摆系统的一种 H_∞ 优化控制

曾德良, 刘玉燕, 刘吉臻, 张丽娟, 曲海云

(华北电力大学 自动化系, 河北 保定 071003)

摘要: 在运用 H_∞ 环路成形设计方法时权函数的选择一般是凭经验试凑, 不能保证所得控制器综合指标最优; 且控制器阶次较高, 不便于工程实现和参数调整. 鉴于以上问题, 提出了基于遗传算法的权函数选取方法, 在遗传算法的目标函数里加入对鲁棒性能和时域性能指标的约束, 从而得到使控制器综合性能指标最优的权函数, 避免了凭经验试凑权函数的盲目性; 然后, 给出一种用多变量 PID 控制器逼近此控制器的方法, 使所得控制器便于实际运用. 最后用此方法对小车倒立摆系统进行仿真, 结果表明了该方法的有效性.

关键词: 倒立摆; H_∞ 环路成形; 权函数; 遗传算法; PID 控制器

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

H-infinity optimization control for inverted pendulum

ZENG De-liang, LIU Yu-yan, LIU Ji-zhen, ZHANG Li-juan, QU Hai-yun

(Department of Automation, North China Electric Power University, Baoding Hebei, 071003, China)

Abstract: The weight functions selection relies largely on devisers' intuition and experience concerning H-infinity loop shaping concepts, so the synthetical performance index of controller is not optimal. And it is difficult to implement high-order controllers obtained by this method. To avoid choosing weight functions by trial-error, a new approach is proposed based on the genetic algorithm. The robust performance and time domain index were considered in objective function. The weight functions could be achieved which optimize the controller. Then, the high-order controller was approximated with PID which can be easily realized in practice. Finally, simulation showed the effectiveness of the presented method for inverted pendulum.

Key words: inverted pendulum; H-infinity loop shaping; weight functions; genetic algorithm; PID controller

1 引言 (Introduction)

倒立摆模型^[1,2]具有明显的不确定性, 因此倒立摆控制系统应该具有良好的鲁棒稳定性, 并有一定的鲁棒性能. H_∞ 控制理论可以有效解决鲁棒性问题, 但权函数的选取目前尚没有比较系统的方法, 设计者一般只能凭经验试凑, 给设计带来很多不便. 并且设计出的鲁棒控制器阶次较高, 难以实现.

针对以上问题, 本文提出基于遗传算法(GA)和 H_∞ 混合优化的倒立摆控制器设计方法. 该方法利用 H_∞ 环路成形技术设计倒立摆控制器; 同时采用 GA 对权函数进行优化, 最后再降阶成 PID 控制器. 这样, 设计的倒立摆控制器即具有较强的鲁棒性, 同时又满足时域的性能指标. 这种设计方法简单易行, 便于在线调整.

2 H_∞ 环路成形设计方法 (H_∞ loop shaping design procedure)

H_∞ 环路成形设计方法不要求有被控对象的精确模型, 是一种有效的鲁棒控制方法, 设计步骤既简

单又系统, 具体设计方法见参考文献[3].

3 H_∞ 环路成形控制器 K_∞ 的求取 (Obtain K_∞)

可以通过求解两个 Riccati 方程得到 K_∞ , 具体步骤见参考文献[4].

4 权函数的选择 (Select the weight functions)

考虑到倒立摆系统的设计需求, 本文中将预补偿器 W_1 表示为 $W_1 = a/(s + b)$ 的形式, 其中, a, b 为实常数; W_2 为实对角阵^[3], 并采用 GA 寻优确定其参数. 记目标函数值为 Q , 位置误差为 $e_x(t)$, 角度误差为 $e_\varphi(t)$, 则有

$$Q = \begin{cases} 0.0001, & |e_x(t)| > 0.01 \text{ m}, 1 \text{ s} < t < 5 \text{ s}, \\ 0.0001, & |e_\varphi(t)| > 0.02 \text{ rad}, 0.5 \text{ s} < t < 5 \text{ s}, \\ 0.0001, & |e_x(t)| > 0.01 \text{ m}, t > 7 \text{ s}, \\ 0.0001, & |e_\varphi(t)| > 0.02 \text{ rad}, t > 6 \text{ s}, \\ 0.0001, & \epsilon_{\max} \notin [0.3, 0.5], \\ \epsilon_{\max}, & \text{其它}. \end{cases}$$

其中, ϵ_{\max} 此处是一个设计指标, 指最大稳定裕量^[4], $0.3 < \epsilon_{\max} < 0.5$ 说明经第二步 H_{∞} 综合后, 第一步所得的开环奇异值形状变化不大, 从而 H_{∞} 设计方法可以保证闭环系统的频域及时域性能. 目的是寻出系统满足一定的动态性能指标并且在 (0.3, 0.5) 之间取值最大的 ϵ_{\max} 对应的加权函数. 因为算法综合考虑了成形后受控对象的稳定裕量和控制品质, 所以最后求出的权函数对应的控制器既满足标称系统的设计条件又能保证具有较强的鲁棒性.

GA 用浮点数编码, 采用普通交叉和变异算子, 线性排序选择方法和精英保留策略.

5 控制器降阶 (Controller reduction)

设由 H_{∞} 环路成形方法得到的高阶控制器状态空间描述为

$$\begin{cases} \dot{z} = A_k z + B_k e, \\ u = C_k z + D_k e. \end{cases}$$

根据控制器的频域特性, 可用以下方法来获得高阶控制器的 PID 控制器近似. 步骤^[5]如下:

1) 对 A_k 进行相似变换, 使得 A_k 的零特征值和非零特征值分开, 即

$$T A_k T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix},$$

其中 a_2 不含零特征值.

2) 对 B_k 和 C_k 进行相应的转换

$$T B_k = [b_1 \quad b_2], C_k T^{-1} = [c_1 \quad c_2].$$

3) 那么, 高阶控制器的 PID 近似为

$$K_p + K_i/s + K_d s,$$

其中

$$K_p = D_k - c_2 a_2^{-1} b_2, K_i = c_1 b_1, K_d = -c_2 a_2^{-2} b_2.$$

上述方法实际是根据频域变量 s 找到控制器的 Maclaurin 级数的前 3 项系数, 即

$$C_k (sI - A_k)^{-1} B_k + D_k = \frac{c_1 b_1}{s} + (D_k - c_2 a_2^{-1} b_2) - c_2 a_2^{-2} b_2 s + o(|s|).$$

因此, 最后的 PID 控制器近似了高阶控制器的低频部分.

6 应用 (Application)

本系统^[1,2]的状态向量为 $X = [x \quad \dot{x} \quad \varphi \quad \dot{\varphi}]$, 在 $[0 \ 0 \ 0 \ 0]$ 处的线性化模型如下:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0742 & -0.5947 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.2227 & 31.1840 & 0 \end{bmatrix}, C_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_0 = [0 \ 0.7423 \ 0 \ -2.2268]^T, D_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0].$$

W_1 和 W_2 的形式及参数变化范围为

$$W_1 = \frac{a}{s+b}, W_2 = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f \end{bmatrix}.$$

其中, $a \in (100, 200), b \in (100, 200), c \in (60, 120), d \in (20, 80), e \in (240, 400), f \in (20, 80)$. 取 GA 种群大小为 80, 交叉概率为 0.6, 变异概率为 0.1, 进化 40 代后, 寻优得到:

$$W_1 = \frac{169.98}{s + 143.16}, W_2 = \begin{bmatrix} 87.37 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 56.52 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 292.34 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 39.24 \end{bmatrix}.$$

对应的 $\epsilon_{\max} = 0.3064$, 对应控制器的 A_k, B_k, C_k, D_k 见附录. 按 5 中方法得降阶后的多变量 PID (对本系统实际上得到的是比例控制器) 为

$$K_p = [3932 \ 3995 \ 32566 \ 1812].$$

在文献 [1] 给定的初始状态、脉冲扰动 (脉冲宽度为 0.01 s) 和位移指令下, 运用所得比例控制器仿真结果如图 1 和图 2. 其中虚线为标称模型的响应曲线, 实线为摄动模型的响应曲线. 参数改变如下: 将摆质心距节点的距离 L 由 0.25 m 变为 0.4 m, 小车的摩擦系数 b 由 $0.1 \text{ N}/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$ 变为 $0.475 \text{ N}/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$. 并考虑节点的摩擦系数 C , 取 $C = 0.03 \text{ N}/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$. 由图 1 和图 2 可以看出, 所设计的比例控制器既满足了要求的性能指标又保证了较强的鲁棒性.

图 3 中虚线和实线分别为摄动模型和标称模型对应的鲁棒控制器的输出. 评价如表 1 所示.

表 1 性能指标

Table 1 Performance index		
比例控制器	指标 1 ^[1]	指标 2 ^[1]
给定模型	8.2091×10^{-6}	0.2410
摄动模型	1.3316×10^{-5}	0.2418

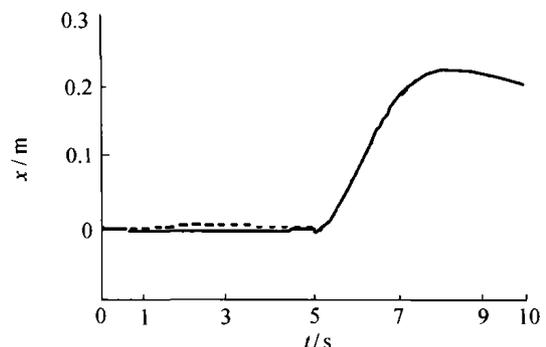


图 1 PID 控制下小车位置响应曲线
Fig. 1 Response curve of cart position using PID controller

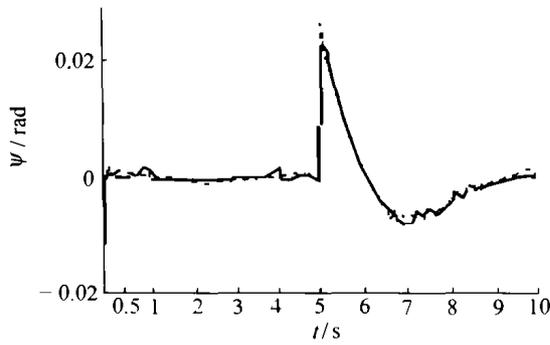


图 2 PID 控制下摆的偏移角响应曲线

Fig. 2 Response curve of pendulum angle using PID controller

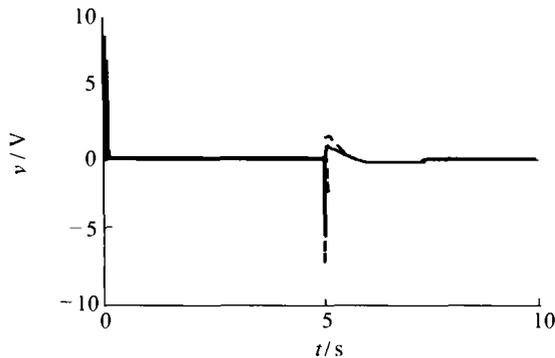


图 3 鲁棒控制器的输出

Fig. 3 Output of robust controller

7 结论(Conclusion)

研究了基于 H_∞ 环路成形设计方法的倒立摆系统控制问题,得到以下结论:采用 GA 寻求最优的补偿阵,避免了人工试凑参数不够理想和费时的缺点,而且在 GA 目标函数的选取上综合考虑了控制器的鲁棒裕量和控制品质,所以最终得到的 H_∞ 控制器既具有较强鲁棒性又有良好的动态性能.然后将高阶 H_∞ 控制器降阶为 PID 控制器,便于实现和参数调整.

参考文献(References):

[1] 申铁龙,梅生伟,王宏,等.鲁棒控制基准设计问题:倒立摆控制[J].控制理论与应用,2003,20(6):974-975.
(SHEN Tielong, MEI Shengwei, WANG Hong, et al. Reference design problem of robust control: inverted pendulum control [J]. *Control Theory & Applications*, 2003, 20 (6): 974 - 975.)

[2] 申铁龙,梅生伟,王宏,等.基准设计问题补充说明:实验条件[J].控制理论与应用,2003,20(6):976.
(SHEN Tielong, MEI Shengwei, WANG Hong, et al. Additional remarks of reference design problem: experiment condition [J]. *Control Theory & Applications*, 2003, 20(6): 976.)

[3] CHEANG Sek Un, CHEN Weiji. Stabilizing Control of an inverted pendulum system based on H_∞ loop shaping design procedure [C]// *Proceeding of the 3rd World Congress on Intelligent Control and Automation*, Hefei China: University of Science and Technology of China Press, 2000, 3385 - 3388.

[4] 王兴成,郑紫微,贾欣乐.基于 GA 和 H_∞ 混合优化的船舶航向控制器设计新方法[J].控制与决策,1999,14(suppl):526-530.
(WANG Xingcheng, ZHENG Ziwei, JIA Xinle. GA and H_∞ based mixed optimization approach for ship course keeping controller design [J]. *Control and Decision*, 1999, 14(Suppl): 526 - 530.)

[5] 谭文,牛玉广,刘吉臻.非线性锅炉-汽轮机系统的鲁棒控制[J].控制理论与应用,1999,16(6):863-867.
(TAN Wen, NIU Yuguang, LIU Jizhen. Robust control for a nonlinear boiler-turbine system [J]. *Control Theory & Applications*, 1999, 16(6): 863 - 867.)

附录(Appendix):

求得的 H_∞ 控制器的状态空间表达式数据:

$$A_k = \begin{bmatrix} -143.16 & 73.72 & -7.99 & -65.02 & 291.49 \\ 0 & 1.83 & 9.94 & -15.61 & 15.71 \\ 0 & -1.88 & -8.32 & 9.61 & -15.24 \\ 0 & 1.89 & 5.52 & -11.18 & 32.04 \\ 0 & -12.04 & -21.85 & 65.92 & -313.74 \end{bmatrix},$$

$$B_k = \begin{bmatrix} 801.3 & -67.6 & 8440.8 & 1545.5 \\ 635.6 & 385.6 & 5319.4 & 474.1 \\ -121.2 & -64.5 & -2725.3 & -289 \\ 99.2 & -26.9 & 1030.4 & 172.9 \\ -388.6 & 62.8 & -4088.8 & -794.4 \end{bmatrix},$$

$$C_k = [10.6239 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], D_k = [0 \ 0 \ 0 \ 0].$$

作者简介:

曾德良 (1969—),男,副教授,博士,主要研究方向为智能控制,自适应控制;
刘玉燕 (1980—),女,河北保定华北电力大学自动化系硕士研究生,研究方向为大机组智能优化控制. E-mail: happy_lyy@163.com;
刘吉臻 (1951—),男,教授,博士生导师,主要研究方向为计算机控制、自适应控制、智能控制.