

基于滑模变结构的倒立摆系统稳定控制

袁性忠, 姜新建

(清华大学 电机系, 北京 100084)

摘要: 利用滑模变结构控制对一级倒立摆系统进行了有效控制. 首先对一级倒立摆系统的模型进行线性化处理, 再利用滑模变结构控制方法对此模型中摆的镇定、台车位置的调节和系统参数不确定性设计了具体的控制规律, 并使用饱和函数的方法抑制系统的抖振. 最后在 Matlab/Simulink 上进行了仿真实验, 实验结果说明滑模变结构控制方法是有效的.

关键词: 倒立摆系统; 滑模控制; 抖振

中图分类号: TP13, TP273 **文献标识码:** A

Stabilizing control of inverted pendulum using sliding mode control scheme

YUAN Xing-zhong, JIANG Xin-jian

(Department of Electrical Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: The sliding mode control strategy is employed to realize the stable control of the inverted pendulum system. After linearizing the inverted pendulum model, detailed control rules were designed for the stable control of the pendulum, adjusting the cart displacement and the robust control of the system based on sliding mode control method. The system's chattering was then solved by using saturation function method. Finally, Simulation results were given to prove the validity of the sliding mode control strategy.

Key words: inverted pendulum system; sliding mode control; chattering

1 引言 (Introduction)

倒立摆系统具有不稳定性、非线性等, 在其控制过程中, 能有效的反映控制中的许多关键问题. 如镇定性问题、非线性问题和鲁棒性问题都可以以倒立摆为对象加以研究. 除此之外, 倒立摆的研究对于精密仪器加工和机器人控制等科技的研究具有重要的现实意义. 因此倒立摆系统的控制成为控制理论中长期研究的课题. 同时人们都利用倒立摆系统来检测控制方法的控制能力, 试图找到对不稳定、非线性和模型参数变化具有良好功能和广泛适用性的控制方法. 但实际上各种方法都有其优缺点, 不能满足所有的控制要求和指标.

滑模变结构控制对系统的不确定性因素具有较强的稳定性、鲁棒性和抗干扰能力, 利用这种方法控制的系统的动态品质良好, 而且此方法控制简单, 易于实现. 因此, 越来越受到人们的重视.

作者首先对文献[1]中的一级倒立摆模型进行分析和建立数学模型, 然后利用滑模变结构控制对摆的镇定问题、台车位置调节问题和系统鲁棒性进行详细的研究. 从仿真结果可以看出这种控制方法

是非常可行的和有效的.

2 一级倒立摆系统描述 (Description of inverted pendulum system)

2.1 被控对象的运动方程 (Movement equations of the inverted pendulum system)

考虑文献[1]中所述系统的不确定性后, 由文献[1]中式(15)和式(16)可得

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{(M+m)(J+mL^2) - m^2L^2\cos^2\varphi(t)} \cdot \left(-mL\cos\varphi(t)(mgL\sin\varphi(t) - c\frac{d\varphi(t)}{dt}) + (J+mL^2)\left(\frac{K_TK_g}{R_ar}u(t) + mL\left(\frac{d\varphi(t)}{dt}\right)^2\sin\varphi(t) - \left(\frac{K_T^2K_g^2}{R_ar^2} + \delta(\dot{x})\right)\frac{dx}{dt}\right) \right), \quad (1)$$

$$\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} = \frac{1}{(M+m)(J+mL^2) - m^2L^2\cos^2\varphi(t)} \cdot \left(((M+m)(mgL\sin\varphi(t) - c\frac{d\varphi(t)}{dt}) - \right.$$

$$mL\cos\varphi(t)\left(\frac{K_T K_g}{R_a r} u(t) + mL\left(\frac{d\varphi(t)}{dt}\right)^2 \sin\varphi(t) - \left(\frac{K_T^2 K_g^2}{R_a r^2} + \delta(\dot{x})\right) \frac{dx}{dt}\right). \quad (2)$$

由文献[1]知, $\delta(\dot{x}) = \gamma\dot{x}$, $0 < \gamma \leq 0.95$, $c = c_0 + \Delta c$, $-0.06 \leq \Delta c < 0$, 且 $c_0 = 0.06$.

2.2 倒立摆控制对象简化模型 (Simplified model of the inverted pendulum system)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-m^2 L^2 g}{(M+m)J + MmL^2} & \frac{-(J+mL^2)K_T^2 K_g^2}{[(M+m)J + MmL^2]R_a r^2} & \frac{cmL}{(M+m)J + MmL^2} \\ 0 & \frac{(M+m)mgL}{(M+m)J + MmL^2} & \frac{mLK_T^2 K_g^2}{[(M+m)J + MmL^2]R_a r^2} & \frac{-c(M+m)}{(M+m)J + MmL^2} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{(J+mL^2)K_T K_g}{[(M+m)J + MmL^2]R_a r} & \frac{-mLK_T K_g}{[(M+m)J + MmL^2]R_a r} \end{bmatrix}^T. \quad (4)$$

3 滑模变结构控制器的设计 (Design of sliding mode controller)

本文中所设计的滑模变结构控制器可以用来控制摆的平衡和小台车的位移. 滑模变结构控制器的设计主要包括切换函数和控制规律两部分的设计.

3.1 切换函数的设计 (Design of the switch function)

滑动模态必须满足三个条件, 分别是存在性、可达性和稳定性. 为此, 首先引入几个结论 (其具体证明及推导见文献[2~4]).

结论 1 对于线性系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, S = Cx, x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, S \in \mathbb{R}^m \quad (5)$$

其中 x 为状态向量, u 是控制向量, 且 $n \geq m \geq 1$, S 是切换函数向量, 其 m 个分量为 $s_i(x) = c_i^T x$, $i = 1, 2, \dots, m$. 如果 (A, B) 可控, 那么系统可经过线性非奇异变换 $x' = Tx$ 将其化为简约形式:

$$\dot{x}' = A'x' + B'u' \quad (6)$$

其中 $A' = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{bmatrix}$, $B' = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $C' = [C'_1 \ C'_2]$, B_2 是非奇异的.

结论 2 对于系统(5), 如果 (A, B) 可控, 则 (A'_{11}, A'_{12}) 也可控.

结论 3 对于线性可控系统, 滑动模态在滑模面 $S = Cx = 0$ 上的动态特性只取决于 C .

结论 4 对于线性可控系统, 滑模存在和可达的充要条件是: $\det[C \ B] \neq 0$.

结论 5 要使得在滑模面 $S = 0$ 上的滑模运动稳

在此模型中由于 $\varphi(t)$ 在 0 附近变化很小, 参考文献[5~7], 做近似处理: $\cos\varphi(t) = 1$, $\sin\varphi(t) = \varphi(t)$, $\varphi(t)\varphi^2(t) = 0$, $\gamma = 0$. 把以上条件代入式(1)和式(2), 得到系统模型

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t), \\ X(t) = [x(t) \ \varphi(t) \ \dot{x}(t) \ \dot{\varphi}(t)]^T, \\ U(t) = u(t) \end{cases}$$

其中

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

定的充分条件是滑动模态运动微分方程的特征方程的根都具有负实部.

显然本文中得到的倒立摆系统的控制对象简化模型 ($n = 4, m = 1$) 都满足结论 2, 3. 选择滑模面 $S = CX$, 为了得到结论 1 中合适的 B_2 , 此时 $B_2 \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$, 取变换矩阵为 T , 同时得 B' :

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3}L \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{-mLK_T K_g}{[(M+m)J + MmL^2]R_a r} \end{bmatrix}.$$

这样就将倒立摆系统化为结论 1 中的简约型. 故当系统运动到滑模面时, 滑动模态的运动微分方程为

$$\dot{x}'_1 = (A'_{11} - A'_{12}C_2^{-1}C'_1)x'_1.$$

由于 C'_2 是任意的, 因此选择 $C'_2 = 1$, 然后再根据需要设定的滑动模态的极点 Λ (Λ 都具有负实部, 满足结论 5), 就可以确定 C'_1 , 得到 C' . 于是系统滑模面的系数 $C = C'T$, 同时也就满足结论 4.

3.2 控制规律的设计 (Design of the control regulation)

控制规律采取指数趋近律^[2]:

$$\frac{dS}{dt} = -kS - \varepsilon \operatorname{sgn}(S), \quad (7)$$

其中 k 和 ε 为正数. 对式 $S = CX$ 两边进行微分同时考虑系统模型可得

$$\frac{dS}{dt} = C \frac{dX}{dt} = CAX + CBU = -kS - \varepsilon \operatorname{sgn}(S).$$

所以控制规律为

$$U = -(CB)^{-1}(CAX + kS + \epsilon \operatorname{sgn}(S)). \quad (8)$$

这样,滑模变结构控制器就可以由 C 和式(8)确定.其中参数 k 的选取主要是依据趋近滑模面的动态特性; ϵ 的选取主要是为了抑制系统的摩擦力和近似线性化所带来的误差等因素,从而使得系统具有良好的鲁棒性.

3.3 系统抖振的抑制(Restrain of the system's chattering)

滑模变结构控制中控制结构的切换具有理想开关特性,能在切换面上生成滑动模态,渐进趋向原点.但是,实际情况往往由于各种原因而不能达到理想开关的境界,这样就会在滑模面上产生抖振.本文中利用了饱和函数 $\operatorname{sat}(\frac{S}{\Delta})$ 代替符号函数 $\operatorname{sgn}(S)$ 来达到抑制抖振的目的(见文献[3]).

$$\operatorname{sat}(\frac{S}{\Delta}) = \begin{cases} 1, & S > \Delta, \\ kS, & |S| \leq \Delta, \\ -1, & S < -\Delta. \end{cases}$$

式中 $k = \frac{1}{\Delta}$,本文中取 $\Delta = 0.1$.

4 仿真结果与分析(Simulation result and analysis)

4.1 标称系统(The designated model)

把各参数具体数值和 $c = 0.06$ 代入式(3)和(4),得到 A 阵和 B 阵,通过给定滑模面的极点 Λ , ($\Lambda = [-20, -5 + 4i, -5 - 4i]$) 就可由3.1节切换函数设计中的计算方法算出 $C = [83.6649, 94.5867, 32.5996, 14.2583]$. 仿真所用的模型由式(1)和式(2)得到.

1) 摆的镇定:给定初始状态 $x(0) = \dot{x}(0) = \varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0$,沿 $f(t)$ 方向给小台车施加脉冲力 $40\delta(t)$ ($\delta(t)$ 表示冲击函数),相当于在系统方程中加入干扰 $d(t) = 40R_a r \delta(t) / (K_T K_g)$, 即 $d(t) = 22.9801\delta(t)$. 取 $k = 1.38, \epsilon = 1.4$. 仿真结果见图

1. 评价值 $\int_0^6 \{\dot{\varphi}^2(t) dt\} = 0.000289$.

2) 小台车位置的调节:对于此问题可以将1)中的滑模控制器中的小台车位移 x 在第5 s时跳到0.2 m即可.此时取 k 和 ϵ 取值同1). 仿真结果如图2所示. 评价值 $\int_0^{10} \{\dot{\varphi}^2(t) + (x(t) - x_d)^2\} dt = 0.032085$.

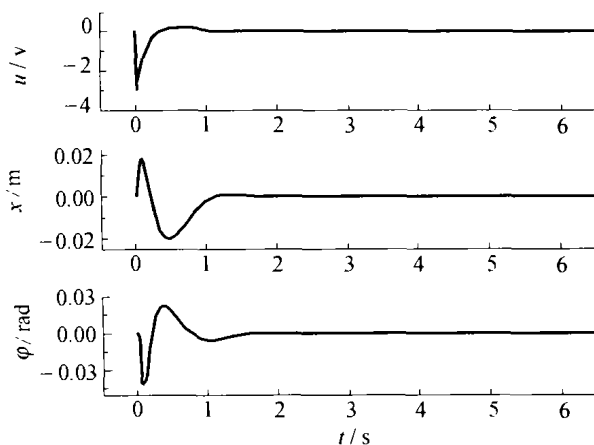


图1 摆的镇定

Fig. 1 Stabilization of pendulum

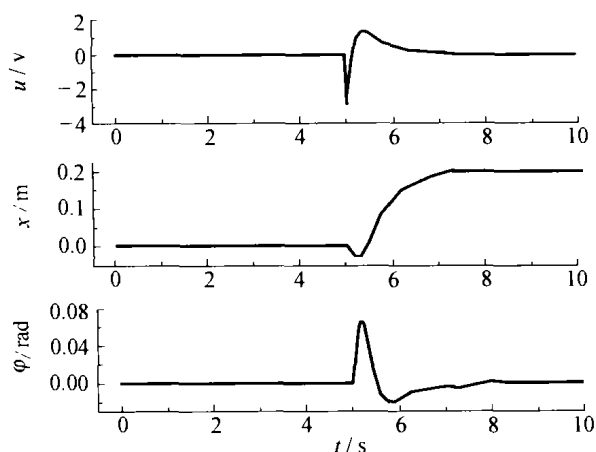


图2 小台车位置的调节

Fig. 2 Adjusting displacement of cart

4.2 参数不定性研究(Parameter inconstancy study)

此时摆长 $L \leq 0.6$ m, $\Delta c \neq 0$. 在这一控制中是按照 $L = 0.6, \Delta c = -0.06, c = 0$ 来设计倒立摆系统的滑模控制器的,滑模面的给定极点同前述,得 $C = [83.6735, 96.9388, 24.5918, 20.6734]$, 此时在下面的情况1和情况2下取 $k = 1.14, \epsilon = 1.5$, 在情况3和情况4下取 $k = 0.7, \epsilon = 4$.

以下参数变化时(即由式(1)和式(2)得到的仿真模型变化),都在最初施加了脉冲力和在第5 s时对小台车发出位移0.2 m的指令.

情况1 当参数为 $L = 0.6, \Delta c = -0.06, p = 0.95$ 时,系统响应见图3(a);

情况2 当参数为 $L = 0.6, \Delta c = -0.03, p = 0.475$ 时,系统响应见图3(b);

情况3 当参数为 $L = 0.3, \Delta c = -0.06, p = 0.95$ 时,系统响应见图3(c);

情况4 当参数为 $L = 0.3, \Delta c = -0.03, p = 0.475$ 时,系统响应见图3(d).

通过以上几种情况的分析可以看出倒立摆系统参数变化时,其输出响应变化比较小,这充分说明此

滑模变结构控制器具有良好的鲁棒性和对参数变化

的不敏感性。

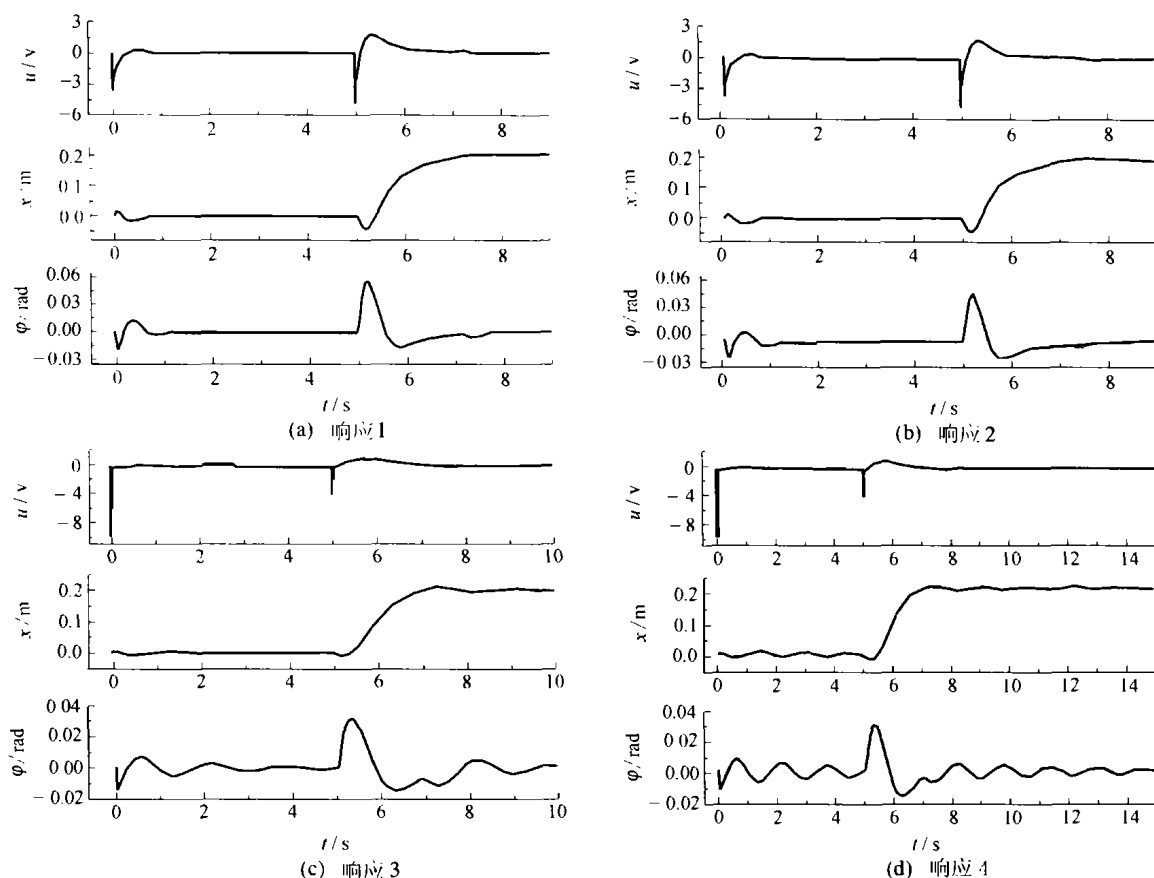


图3 系统输出响应

Fig. 3 Response of system output

5 结论(Conclusion)

本文将滑模变结构控制方法应用到一级倒立摆系统中,取得了良好的预期效果.从文中可以看出滑模变结构控制方法设计简单,具有一定的广泛实用性,而且用其设计的控制系统响应快、超调小.通过倒立摆这个典型的非线性控制对象可以看出,对于一些复杂的非线性、不稳定和参数变化的控制问题滑模变结构控制方法是一种有效的解决途径.

参考文献(Reference):

- [1] 申铁龙,梅生伟,王宏,等.鲁棒控制基准设计问题:倒立摆控制[J].控制理论与应用,2003,20(6):974-975.
(SHEN Tielong, MEI Shengwei, WANG Hong, et al. Standard design of robust control: inverted pendulum control [J]. *Control Theory & Applications*, 2003, 20(6): 974-975.)
- [2] 张克勤.滑模变结构控制理论及其在倒立摆系统中的应用研究[D].杭州:浙江大学,2003.
(ZHANG Keqin. *The Study of Variable Structure Control Based on Sliding Mode and Its Application to Inverted Pendulum Systems* [D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2003.)
- [3] 姚琼荃,黄继起,吴汉松.变结构控制系统[M].重庆:重庆大学出版社,1997.
(YAO Qionghui, HUANG Jiqi, WU Hansong. *Variable Structure*

Control System [M]. Chongqing: Chongqing University Press, 1997.)

- [4] 王丰尧.滑模变结构控制[M].北京:机械工业出版社,1995.
(WANG Fengyao. *Sliding Model Control* [M]. Beijing: China Machine Press, 1995.)
- [5] 崔平,翁正新.基于状态空间极点配置的倒立摆平衡控制[J].实验室研究与探索,2003,22(2):70-72.
(CUI Ping, WEN Zhengxin. Balance control for single inverted pendulum system based on pole placement method [J]. *Research and Exploration in Laboratory*, 2003, 22(2): 70-72.)
- [6] 李俊芳,牛文兴,张振东.基于状态空间法的倒立摆系统稳定控制[J].天津理工学院学报,2003,19(2):34-36.
(LI Junfang, NIU Wenxing, ZHANG Zhendong. Control to the inverted pendulum based on the state-space approach [J]. *Journal of Tianjin Institute of Technology*, 2003, 19(2): 34-36.)
- [7] 吴楠.单极倒立摆系统角运动控制方案建模及仿真[J].系统仿真学报,2003,15(9):1333-1337.
(WU Nan. The movement modeling and simulation of the scheme of angle movement control of the simple inverted pendulum [J]. *Journal of System Simulation*, 2003, 15(9): 1333-1337.)

作者简介:

袁性忠 (1979—)男,主要研究领域为电力传动与电力滤波器, E-mail: yuanxz03@mails.tsinghua.edu.cn;

姜新建 (1964—)男,副教授,主要研究领域为电力传动与电力滤波器。