文章编号: 1000-8152(2004)05-0735-07

多时变时滞系统的鲁棒稳定及有界实引理的时滞相关条件

何 勇[1,2], 吴 敏[1]

(1.中南大学信息科学与工程学院,湖南 长沙 410083; 2.中南大学数学科学与计算技术学院,湖南 长沙 410083)

摘要: 对于多时变时滞系统,引入表示牛顿-莱布尼兹公式中各项的相互关系的自由权矩阵,获得了基于线性矩阵不等式(LMI)描述的系统鲁棒稳定的时滞相关条件,并说明了时滞相关条件和时滞无关条件的相互关系.在此基础上,将其推广到有界实引理的时滞相关条件.所得结果克服了已有结果的保守性.最后给出实例说明本文方法的有效性.

关键词: 多时变时滞; 鲁棒稳定性; 有界实引理; 线性矩阵不等式; 时滞相关条件

中图分类号: TP13 **文献标识码**: A

Delay-dependent conditions for robust stability and bounded real lemma of systems with multiple time-varying delays

HE Yong[1,2], WU Min[1]

(1. School of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha Hunan 410083, China;

2. School of Mathematical Science and Computing Technology, Central South University, Changsha Hunan 410083, China)

Abstract: Based on linear matrix inequality (LMI), some delay-dependent conditions were derived for the robust stability of the systems with multiple time-varying delays. Some free weighting matrices were employed to describe the reciprocal relationships between the terms in Newton-Leibniz formula. Then the relationship between the delay-dependent conditions and delay-independent ones were discussed. And the results were extended to the delay-dependent bounded real lemma for systems. The proposed results overcome the conservativeness of the existing results. Finally, some examples were provided to demonstrate the effectiveness of the proposed method.

Key words: multiple time-varying delays; robust stability; bounded real lemma; linear matrix inequality; delay-dependent conditions

1 引言(Introduction)

近年来,许多学者对时滞系统进行了广泛而深入的研究,但绝大部分结论都是时滞无关的.众所周知,许多实际系统中的时滞一般都是有界的,无穷时滞很少出现,因而,时滞无关的许多结果都是比较保守的,时滞相关条件的研究引起了许多学者的关注,主要体现在以下两个方面:首先,在稳定性的研究上[1~8],如果一个时滞系统在时滞为零的时候是稳定的,那么根据系统的连续性,当时滞很小的时候系统应该是稳定的,但并非对任意时滞都是稳定的,这就需要找到一个保证系统稳定性的尽可能大的时滞;另一方面,在系统性能的研究上[9~11],许多系统的时滞比较小时,采用时滞无关条件显然具有一定保守性,而时滞相关条件将能改善这些性能.这就是说,时滞相关条件应该在克服时滞无关条件保守性的基础上获得,不能独立于时滞无关条件而存在.遗憾的是,目前的许多结论仅仅只是为了获得时滞相关的结果,而忽略了两类条件的统一性,有些文献甚至将一些时滞无关稳定的系统判定成需要时滞小于某一个常数才能稳定[1~6].在系统性能研究上,文献[9~11]得到了一些有界实引理的时滞相关条件,但由于其采用的稳定性的方法的局限性,仍然具有较大的保守性.

最近,Park[7]提出了一种稳定性时滞相关条件的新方法,Moon[8]将其推广到了一种更一般的形式,他们克服了时滞相关条件的某些保守性,但还存

收稿日期:2003-04-09;收修改稿日期:2003-12-30.

基金项目:博士点基金项目(2000053303).

在一定缺陷:他们利用牛顿-莱布尼兹公式将 Lyapunov 泛函的导数中某些时滞项 $x(t-\tau)$ 用 $x(t)-\int_{t-\tau}^{t}\dot{x}(s)\mathrm{d}s$ 代替,而有些 $x(t-\tau)$ 却保留下来,这种替换或保留是根据处理需要随意的.事实上,$x(t-\tau)$ 是否用 $x(t)-\int_{t-\tau}^{t}\dot{x}(s)\mathrm{d}s$ 代替应该有一个最佳选择.文献[7],[8]都没有给出这种选择的有效方法.

作者对于最一般形式的具有多时变时滞的线性系统,提出了一种考虑牛顿-莱布尼兹公式中 $x(t-\tau)$ 和 $x(t)-\int_{t-\tau}^{t}\dot{x}(s)\mathrm{d}s$ 相互关系的新方法,将表示它们相互关系的权矩阵通过 LMI 的解获得,而不是随意地保留某些 $x(t-\tau)$ 而将其它 $x(t-\tau)$ 用 $x(t)-\int_{t-\tau}^{t}\dot{x}(s)\mathrm{d}s$ 替换.这样,通过 LMI 的解来构造 Lyapunov 泛函以及确定其它权矩阵,减少了 Lyapunov 泛函中自由参数选择的随意性,得到了系统的鲁棒稳定性和有界实引理的时滞相关条件,并说明它们包含了对应的时滞无关条件,使二者之间实现了有机的统一.最后,通过实例,说明了本文方法的有效性以及与已有结果相比的先进性.

2 系统描述及引理(Problem statement and lemmas)

考虑具有多时变时滞的不确定性系统

$$\begin{cases}\dot{x}(t)= \\ \sum_{i=0}^{m}(A_i+\Delta A_i(t))x(t-h_i(t))+(B+\Delta B(t))\omega(t), \\ z(t)= \\ \mathrm{col}(C_0x(t),C_1x(t-h_1(t)),\cdots,C_mx(t-h_m(t))), \\ x(t)=\phi(t),\ t\in[-h,0].\end{cases} \tag{1}$$

式中 $x(t)\in\mathbb{R}^n$;$\omega(t)\in L_2^q[0,\infty]$ 是扰动输入;$z(t)\in\mathbb{R}^p$ 是控制输出;$A_i(i=0,1,2,\cdots,m)\in\mathbb{R}^{n\times n}$;$B$ 和 $C_i(i=0,1,\cdots,m)$ 是具合适维数的常量矩阵;时滞 $h_i(t)(i=0,1,2,\cdots,m)$ 是时变连续函数且

$$\begin{aligned}&h_0(t)=0,\ 0\leqslant h_i(t)\leqslant\bar{h}_i,\\&\dot{h}_i(t)\leqslant d_i<1\ (i=1,2,\cdots,m).\end{aligned} \tag{2}$$

其中,$\bar{h}_i,d_i(i=1,2,\cdots,m)$ 是常数,并且 $h=\max\{\bar{h}_i,i=1,2,\cdots,m\}$.$\phi(t)$ 是一实值连续初始向量函数.假设不确定性可以描述为

$$[\Delta A_0(t)\quad\Delta A_1(t)\quad\cdots\quad\Delta A_m(t)\quad\Delta B(t)]=$$
$$DF(t)[E_0\quad E_1\quad\cdots\quad E_m\quad E_b]. \tag{3}$$

式中 $D,E_i(i=0,1,\cdots,m),E_b$ 是合适维数的已知常数实矩阵,$F(t)$ 是一合适维数的未知实值时变矩阵,其元素 Lebesgue 可测且有界,且

$$F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\leqslant I,\ \forall t. \tag{4}$$

式中 I 表示合适维数的单位矩阵.给定 $\gamma>0$,定义性能函数

$$J(\omega)=\int_0^{\infty}(z^{\mathrm{T}}z-\gamma^2\omega^{\mathrm{T}}\omega)\mathrm{d}t. \tag{5}$$

为讨论不确定性,首先给出如下引理:

引理 1[13] 给定适当维数矩阵 $Q=Q^{\mathrm{T}},H,E$ 和 $R=R^{\mathrm{T}}>0$,对任意满足 $F^{\mathrm{T}}F\leqslant R$ 的 F 使

$$Q+HFE+E^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}<0$$

的充分必要条件是存在 $\varepsilon>0$ 使得

$$Q+\varepsilon HH^{\mathrm{T}}+\varepsilon^{-1}E^{\mathrm{T}}RE<0.$$

下面首先讨论系统(1)的标称系统

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=\sum_{i=0}^{m}A_ix(t-h_i(t))+B\omega(t), \\ z(t)= \\ \mathrm{col}(C_0x(t),C_1x(t-h_1(t)),\cdots,C_mx(t-h_m(t))), \\ x(t)=\phi(t),\ t\in[-h,0]\end{cases} \tag{6}$$

的稳定性及有界实引理,再利用引理 1 获得不确定性系统的对应结论.

3 时滞相关稳定性(Delay-dependent stability)

首先,讨论标称系统(6)当 $\omega(t)=0$ 时的稳定性.构造 Lyapunov 泛函

$$V(x_t)=x^{\mathrm{T}}(t)Px(t)+\sum_{i=1}^{m}\int_{t-h_i(t)}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)Q_ix(s)\mathrm{d}s+$$
$$\sum_{i=1}^{m}\int_{-\bar{h}_i}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)W_i\dot{x}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta. \tag{7}$$

其中 $P,Q_i,W_i(i=1,2,\cdots,m)$ 是待定正定矩阵,于是式(7)对时间的导数为

$$\frac{\mathrm{d}V(x_t)}{\mathrm{d}t}=$$
$$2x^{\mathrm{T}}(t)P[\sum_{i=0}^{m}A_ix(t-h_i(t))]+\sum_{i=1}^{n}[x^{\mathrm{T}}(t)Q_ix(t)-$$
$$(1-\dot{h}_i(t))x^{\mathrm{T}}(t-h_i(t))Q_ix(t-h_i(t))]+$$
$$\dot{x}^{\mathrm{T}}(t)[\sum_{i=1}^{m}\bar{h}_iW_i]\dot{x}(t)-\sum_{i=1}^{m}\int_{t-\bar{h}_i}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)W_i\dot{x}(s)\mathrm{d}s\leqslant$$
$$x^{\mathrm{T}}(t)(A_0^{\mathrm{T}}P+PA_0+\sum_{i=1}^{m}Q_i)x(t)+$$

$$\sum_{i=1}^{m}2x^{\mathrm{T}}(t)PA_ix(t-h_i(t))-$$
$$\sum_{i=1}^{m}(1-d_i)x^{\mathrm{T}}(t-h_i(t))Q_ix(t-h_i(t))+$$
$$\dot{x}^{\mathrm{T}}(t)\Big[\sum_{i=1}^{m}\bar{h}_iW_i\Big]\dot{x}(t)-\sum_{i=1}^{m}\int_{t-h_i(t)}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)W_i\dot{x}(s)\mathrm{d}s. \tag{8}$$

同时,根据牛顿-莱布尼兹公式,对于 $j=1,2,\cdots,m$,有

$$x(t-h_j(t))=x(t)-\int_{t-h_j(t)}^{t}\dot{x}(s)\mathrm{d}s. \tag{9}$$

这样对于 $j=1,2,\cdots,m$,对任意适当维数的矩阵 $N_{ij}(i=0,1,2,\cdots,m)$,有

$$2\Big[\sum_{i=0}^{m}x^{\mathrm{T}}(t-h_i(t))N_{ij}\Big]\cdot$$
$$\left[x(t)-x(t-h_j(t))-\int_{t-h_j(t)}^{t}\dot{x}(s)\mathrm{d}s\right]=0. \tag{10}$$

同时,对于 $j=1,2,\cdots,m$,对任意适当维数的对称半正定矩阵

$$X^{(j)}=\begin{bmatrix} X_{00}^{(j)} & X_{01}^{(j)} & X_{02}^{(j)} & \cdots & X_{0m}^{(j)}\\ [X_{01}^{(j)}]^{\mathrm{T}} & X_{11}^{(j)} & X_{12}^{(j)} & \cdots & X_{1m}^{(j)}\\ [X_{02}^{(j)}]^{\mathrm{T}} & [X_{12}^{(j)}]^{\mathrm{T}} & X_{22}^{(j)} & \cdots & X_{2m}^{(j)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ [X_{0m}^{(j)}]^{\mathrm{T}} & [X_{1m}^{(j)}]^{\mathrm{T}} & [X_{2m}^{(j)}]^{\mathrm{T}} & \cdots & X_{mm}^{(j)}\end{bmatrix}\geqslant 0.$$

由式(2)有

$$\xi^{\mathrm{T}}(t)(\bar{h}_jX^{(j)})\xi(t)-\int_{t-h_j(t)}^{t}\xi^{\mathrm{T}}(t)(X^{(j)})\xi(t)\mathrm{d}s\geqslant 0. \tag{11}$$

其中,$\xi(t)=[x^{\mathrm{T}}(t)\quad x^{\mathrm{T}}(t-h_1(t))\quad x^{\mathrm{T}}(t-h_2(t))\quad\cdots\quad x^{\mathrm{T}}(t-h_m(t))]^{\mathrm{T}}$. 将式(10),(11)对 j 求和并代入 $\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t}$,有

$$\frac{\mathrm{d}V(x_t)}{\mathrm{d}t}\leqslant$$
$$\xi^{\mathrm{T}}(t)\Phi\xi(t)-\sum_{j=1}^{m}\int_{t-h_j(t)}^{t}\zeta^{\mathrm{T}}(t,s)\Psi_j\zeta(t,s)\mathrm{d}s. \tag{12}$$

其中

$$\zeta(t,s)=[\xi^{\mathrm{T}}(t)\quad \dot{x}^{\mathrm{T}}(s)]^{\mathrm{T}}$$

$$\Phi=\begin{bmatrix} \Phi_{00}+A_0^{\mathrm{T}}HA_0 & \Phi_{01}+A_0^{\mathrm{T}}HA_1 & \Phi_{02}+A_0^{\mathrm{T}}HA_2 & \cdots & \Phi_{0m}+A_0^{\mathrm{T}}HA_m\\ \Phi_{01}^{\mathrm{T}}+A_1^{\mathrm{T}}HA_0 & \Phi_{11}+A_1^{\mathrm{T}}HA_1 & \Phi_{12}+A_1^{\mathrm{T}}HA_2 & \cdots & \Phi_{1m}+A_1^{\mathrm{T}}HA_m\\ \Phi_{02}^{\mathrm{T}}+A_2^{\mathrm{T}}HA_0 & \Phi_{12}^{\mathrm{T}}+A_2^{\mathrm{T}}HA_1 & \Phi_{22}+A_1^{\mathrm{T}}HA_2 & \cdots & \Phi_{2m}+A_2^{\mathrm{T}}HA_m\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \Phi_{0m}^{\mathrm{T}}+A_m^{\mathrm{T}}HA_0 & \Phi_{1m}^{\mathrm{T}}+A_m^{\mathrm{T}}HA_1 & \Phi_{2m}^{\mathrm{T}}+A_m^{\mathrm{T}}HA_2 & \cdots & \Phi_{mm}+A_m^{\mathrm{T}}HA_m\end{bmatrix},$$

$$H=\sum_{i=1}^{m}\bar{h}_iW_i,\ \Phi_{00}=A_0^{\mathrm{T}}P+PA_0+\sum_{i=1}^{m}Q_i+$$
$$\sum_{i=1}^{m}(N_{0i}+N_{0i}^{\mathrm{T}})+\sum_{i=1}^{m}\bar{h}_kX_{00}^{(k)},$$
$$\Phi_{0j}=PA_j-N_{0j}+\sum_{i=1}^{m}N_{ji}^{\mathrm{T}}+\sum_{k=1}^{m}\bar{h}_kX_{0j}^{(k)}(j=1,2,\cdots,m),$$
$$\Phi_{jj}=-(1-d_j)Q_j-N_{jj}-N_{jj}^{\mathrm{T}}+\sum_{k=1}^{m}\bar{h}_kX_{jj}^{(k)}(j=1,2,\cdots,m),$$
$$\Phi_{ij}=-N_{ij}-N_{ji}^{\mathrm{T}}+\sum_{k=1}^{m}\bar{h}_kX_{ij}^{(k)}(i=1,2,\cdots,m;i<j\leqslant m),$$
$$\Psi_j=\begin{bmatrix} X_{00}^{(j)} & X_{01}^{(j)} & X_{02}^{(j)} & \cdots & X_{0m}^{(j)} & N_{0j}\\ [X_{01}^{(j)}]^{\mathrm{T}} & X_{11}^{(j)} & X_{12}^{(j)} & \cdots & X_{1m}^{(j)} & N_{1j}\\ [X_{02}^{(j)}]^{\mathrm{T}} & [X_{12}^{(j)}]^{\mathrm{T}} & X_{22}^{(j)} & \cdots & X_{2m}^{(j)} & N_{2j}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ [X_{0m}^{(j)}]^{\mathrm{T}} & [X_{1m}^{(j)}]^{\mathrm{T}} & [X_{2m}^{(j)}]^{\mathrm{T}} & \cdots & X_{mm}^{(j)} & N_{mj}\\ N_{0j}^{\mathrm{T}} & N_{1j}^{\mathrm{T}} & N_{2j}^{\mathrm{T}} & \cdots & N_{mj}^{\mathrm{T}} & W_j\end{bmatrix}$$

$(i=1,2,\cdots,m)$.

由式(12),当 $\Psi_j\geqslant 0(j=1,2,\cdots,m)$ 且 $\Phi<0$ 时 $\frac{\mathrm{d}V(x_t)}{\mathrm{d}t}$ 负定.本文有如下定理:

定理1 对给定 $\bar{h}_j\geqslant 0,d_j<1(j=1,2,\cdots,m)$,如果一组LMI

$$\Phi<0,\Psi_j\geqslant 0(j=1,2,\cdots,m)$$

存在关于 $P>0,Q_j>0(j=1,2,\cdots,m),W_j\geqslant 0(j=1,2,\cdots,m),X^{(j)}\geqslant 0(j=1,2,\cdots,m),N_{ij}(i=0,1,\cdots,m;j=1,2,\cdots,m)$ 的可行解,则系统(6)在 $\omega(t)=0$ 时是稳定的.

根据定理1的证明,在Lyapunov泛函中设定 $W_j=0(j=1,2,\cdots,m)$,直接计算 $\frac{\mathrm{d}V(x_t)}{\mathrm{d}t}$,有如下的系统时滞无关稳定的推论.

推论1 对给定 $d_j<1(j=1,2,\cdots,m)$,如果LMI

$$\begin{bmatrix} PA_0 + A_0^{\mathrm T}P + \sum_{i=1}^{m} Q_i & PA_1 & PA_2 & \cdots & PA_m \\ A_1^{\mathrm T}P & -(1-d_1)Q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ A_1^{\mathrm T}P & 0 & -(1-d_2)Q_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_m^{\mathrm T}P & 0 & 0 & 0 & -(1-d_m)Q_m \end{bmatrix} < 0$$

存在关于 $P>0, Q_j>0(j=1,2,\cdots,m)$ 的可行解，则系统(6)在 $\omega(t)=0$ 时是稳定的.

注 1 推论1是一个众所周知的结论，而定理1的时滞相关条件包含了它.事实上，如果推论1的LMI存在关于 $P>0, Q_j>0(j=1,2,\cdots,m)$ 的可行解，则设定定理1其它自由参数矩阵 $N_{ij}=0(i=0,1,\cdots,m;j=1,2,\cdots,m)$、$W_j=0(j=1,2,\cdots,m)$，$X^{(j)}=0(j=1,2,\cdots,m)$.它们和推论1的关于 $P>0, Q_j>0(j=1,2,\cdots,m)$ 的可行解，一起构成了定理1中对应的一组LMI对于任意时滞都成立的可行解.另一方面，从局部来看，对于某一特定的 j，设定其所对应的矩阵 $W_j, X^{(j)}, N_{ij}(i=0,1,\cdots,m)$ 为零矩阵.如果定理1对应的一组LMI有解，那么系统(6)关于 $h_j(t)$ 是时滞无关稳定的.这样，对于具有多时滞的系统，稳定性的时滞相关和时滞无关条件可以由定理1实现统一.

对于不确定性系统(1)，在定理1的基础上，利用引理1可得到如下定理：

定理 2 对给定 $\bar h_j \geqslant 0, d_j<1(j=1,2,\cdots,m)$，如果一组LMI

$$\hat\Phi<0,\ \Psi_j \geqslant 0(j=1,2,\cdots,m)$$

存在关于 $P>0, Q_j>0(j=1,2,\cdots,m)$，$W_j \geqslant 0(j=1,2,\cdots,m)$，$X^{(j)} \geqslant 0(j=1,2,\cdots,m)$，$N_{ij}(i=0,1,\cdots,m;j=1,2,\cdots,m)$ 和 $\lambda>0$ 的可行解，则系统(1)在 $\omega(t)=0$ 时鲁棒稳定.其中

$$\hat\Phi = \begin{bmatrix} \hat\Phi_{00} & \hat\Phi_{01} & \hat\Phi_{02} & \cdots & \hat\Phi_{0m} & PD+A_0^{\mathrm T}HD \\ \hat\Phi_{01}^{\mathrm T} & \hat\Phi_{11} & \hat\Phi_{12} & \cdots & \hat\Phi_{1m} & A_1^{\mathrm T}HD \\ \hat\Phi_{02}^{\mathrm T} & \hat\Phi_{12}^{\mathrm T} & \hat\Phi_{22} & \cdots & \hat\Phi_{2m} & A_2^{\mathrm T}HD \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \hat\Phi_{0m}^{\mathrm T} & \hat\Phi_{1m}^{\mathrm T} & \hat\Phi_{2m}^{\mathrm T} & \cdots & \hat\Phi_{mm}^{\mathrm T} & A_m^{\mathrm T}HD \\ D^{\mathrm T}P+D^{\mathrm T}HA_0 & D^{\mathrm T}HA_1 & D^{\mathrm T}HA_2 & \cdots & D^{\mathrm T}HA_m & -\lambda I+D^{\mathrm T}HD \end{bmatrix},$$

而 $\hat\Phi_{ij}=\Phi_{ij}+A_i^{\mathrm T}HA_j+\lambda E_i^{\mathrm T}E_j(i=0,1,2,\cdots,m;i\leqslant j\leqslant m)$，$\Psi_j(j=1,2,\cdots,m)$，$H, \Phi_{ij}$ 定义于式(12).

证 对于定理1中的 Φ，将其中 A_i 用 $A_i+DF(t)E_i(i=0,1,2,\cdots,m)$ 替换并利用Schur补，得到不确定性系统(1)在 $\omega(t)=0$ 时鲁棒稳定的充分条件为

$$\bar\Phi+\Gamma_d^{\mathrm T}F(t)\Gamma_e+\Gamma_e^{\mathrm T}F^{\mathrm T}(t)\Gamma_d<0, \tag{13}$$

且

$$\Psi_j \geqslant 0(j=1,2,\cdots,m). \tag{14}$$

其中，

$$\Gamma_d=[D^{\mathrm T}P\ \ 0\ \ 0\ \ \cdots\ \ 0\ \ D^{\mathrm T}H],$$

$$\Gamma_e=[E_0\ \ E_1\ \ E_2\ \ \cdots\ \ E_m\ \ 0],$$

$$\bar\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{00} & \Phi_{01} & \Phi_{02} & \cdots & \Phi_{0m} & A_0^{\mathrm T}H \\ \Phi_{01}^{\mathrm T} & \Phi_{11} & \Phi_{12} & \cdots & \Phi_{1m} & A_1^{\mathrm T}H \\ \Phi_{02}^{\mathrm T} & \Phi_{12}^{\mathrm T} & \Phi_{22} & \cdots & \Phi_{2m} & A_2^{\mathrm T}H \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \Phi_{0m}^{\mathrm T} & \Phi_{1m}^{\mathrm T} & \Phi_{2m}^{\mathrm T} & \cdots & \Phi_{mm} & A_m^{\mathrm T}H \\ HA_0 & HA_1 & HA_2 & \cdots & HA_m & -H \end{bmatrix},$$

而 $H, \Phi_{ij}(i=0,1,\cdots,m;i\leqslant j\leqslant m)$ 定义于式(12).由引理1和式(4)，(13)成立的充要条件是存在 $\lambda>0$ 使得

$$\bar\Phi+\lambda^{-1}\Gamma_d^{\mathrm T}\Gamma_d+\lambda\Gamma_e^{\mathrm T}\Gamma_e<0. \tag{15}$$

利用Schur补，式(15)成立等价于 $\hat\Phi<0$ 成立.这样定理得证.

4 有界实引理(Bound real lemma)

下面，在稳定性讨论的基础上，给出标称系统(6)的有界实引理的时滞相关条件.由于

$$z^{\mathrm T}(t)z(t)=\sum_{i=0}^{m}x^{\mathrm T}(t-h_i(t))C_i^{\mathrm T}C_ix(t-h_i(t)), \tag{16}$$

并且对于 $j=1,2,\cdots,m$，对于任意合适维数的矩阵 $M_j, N_{ij}(i=0,1,2,\cdots,m)$，有

$$2\Big[\sum_{i=0}^{m}x^{\mathrm T}(t-h_i(t))N_{ij}\Big]\cdot$$

$$\Big[x(t)-x(t-h_j(t))-\int_{t-h_j(t)}^{t}\dot x(s)\mathrm ds\Big]=0, \tag{17}$$

$$2\omega^{\mathrm{T}}(t)M_j\cdot\left[x(t)-x(t-h_j(t))-\int_{t-h_j(t)}^{t}\dot{x}(t)\mathrm{d}s\right]=0. \tag{18}$$

同时,对于 $j=1,2,\cdots,m$, 对于任意的合适维数的对称半正定矩阵

$$X^{(j)}=\begin{bmatrix} X_{00}^{(j)} & X_{01}^{(j)} & X_{02}^{(j)} & \cdots & X_{0m}^{(j)} & X_{0,m+1}^{(j)} \\ [X_{01}^{(j)}]^{\mathrm{T}} & X_{11}^{(j)} & X_{12}^{(j)} & \cdots & X_{1m}^{(j)} & X_{1,m+1}^{(j)} \\ [X_{02}^{(j)}]^{\mathrm{T}} & [X_{12}^{(j)}]^{\mathrm{T}} & X_{22}^{(j)} & \cdots & X_{2m}^{(j)} & X_{2,m+1}^{(j)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ [X_{0m}^{(j)}]^{\mathrm{T}} & [X_{1m}^{(j)}]^{\mathrm{T}} & [X_{2m}^{(j)}]^{\mathrm{T}} & \cdots & X_{mm}^{(j)} & X_{m,m+1}^{(j)} \\ [X_{0,m+1}^{(j)}]^{\mathrm{T}} & [X_{1,m+1}^{(j)}]^{\mathrm{T}} & [X_{2,m+1}^{(j)}]^{\mathrm{T}} & \cdots & [X_{m,m+1}^{(j)}]^{\mathrm{T}} & X_{m+1,m+1}^{(j)} \end{bmatrix}\geqslant 0$$

有

$$\frac{\mathrm{d}V(x_t)}{\mathrm{d}t}+z^{\mathrm{T}}(t)z(t)-\gamma^2\omega^{\mathrm{T}}(t)\omega(t)\leqslant$$

$$\eta^{\mathrm{T}}(t)\Xi\eta(t)-\sum_{j=1}^{m}\int_{t-h_j(t)}^{t}\rho^{\mathrm{T}}(t,s)\Pi_j\rho(t,s)\mathrm{d}s. \tag{19}$$

其中

$\eta(t)=[\xi^{\mathrm{T}}(t)\quad\omega^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}}$,

$\rho(t,s)=[\eta^{\mathrm{T}}(t)\quad\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)]^{\mathrm{T}}$,

$$\Xi=\begin{bmatrix} \Xi_{00} & \Xi_{01} & \Xi_{02} & \cdots & \Xi_{0M} & \Xi_{0,m+1} \\ \Xi_{01}^{\mathrm{T}} & \Xi_{11} & \Xi_{12} & \cdots & \Xi_{1m} & \Xi_{1,m+1} \\ \Xi_{02}^{\mathrm{T}} & \Xi_{12}^{\mathrm{T}} & \Xi_{22} & \cdots & \Xi_{2m} & \Xi_{2,m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \Xi_{0m}^{\mathrm{T}} & \Xi_{1m}^{\mathrm{T}} & \Xi_{2m}^{\mathrm{T}} & \cdots & \Xi_{mm} & \Xi_{m,m+1} \\ \Xi_{0,m+1}^{\mathrm{T}} & \Xi_{1,m+1}^{\mathrm{T}} & \Xi_{2,m+1}^{\mathrm{T}} & \cdots & \Xi_{m,m+1}^{\mathrm{T}} & \Xi_{m+1,m+1} \end{bmatrix},$$

$$\Xi_{00}=\Phi_{00}+C_0^{\mathrm{T}}C_0+A_0^{\mathrm{T}}HA_0,$$

$$\Xi_{0j}=\Phi_{0j}+A_0^{\mathrm{T}}HA_j(j=1,2,\cdots,m),$$

$$\Xi_{jj}=\Phi_{jj}+C_j^{\mathrm{T}}C_j+A_j^{\mathrm{T}}HA_j(j=1,2,\cdots,m),$$

$$\Xi_{ij}=\Phi_{ij}+A_i^{\mathrm{T}}HA_j(i=1,2,\cdots,m;i<j\leqslant m),$$

$$\Xi_{0,m+1}=PB+\sum_{i=1}^{m}M_i^{\mathrm{T}}+A_0^{\mathrm{T}}HB+\sum_{k=1}^{m}\bar{h}_kX_{0,m+1}^{(k)},$$

$$\Xi_{j,m+1}=-M_j^{\mathrm{T}}+A_j^{\mathrm{T}}HB+\sum_{k=1}^{m}\bar{h}_kX_{j,m+1}^{(k)}$$

$$(j=1,,2,\cdots,m),$$

$$\Xi_{m+1,m+1}=-\gamma^2I+B^{\mathrm{T}}HB+\sum_{k=1}^{m}\bar{h}_kX_{m+1,m+1}^{(k)},$$

$$\Pi_j=\begin{bmatrix} X_{00}^{(j)} & X_{01}^{(j)} & X_{02}^{(j)} & \cdots & X_{0m}^{(j)} & X_{0,m+1}^{(j)} & N_{0j} \\ [X_{01}^{(j)}]^{\mathrm{T}} & X_{11}^{(j)} & X_{12}^{(j)} & \cdots & X_{1m}^{(j)} & X_{1,m+1}^{(j)} & N_{1j} \\ [X_{02}^{(j)}]^{\mathrm{T}} & [X_{12}^{(j)}]^{\mathrm{T}} & X_{22}^{(j)} & \cdots & X_{2m}^{(j)} & X_{2,m+1}^{(j)} & N_{2j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ [X_{0m}^{(j)}]^{\mathrm{T}} & [X_{1m}^{(j)}]^{\mathrm{T}} & [X_{2m}^{(j)}]^{\mathrm{T}} & \cdots & X_{mm}^{(j)} & X_{m,m+1}^{(j)} & N_{mj} \\ [X_{0,m+1}^{(j)}]^{\mathrm{T}} & [X_{1,m+1}^{(j)}]^{\mathrm{T}} & [X_{2,m+1}^{(j)}]^{\mathrm{T}} & \cdots & [X_{m,m+1}^{(j)}]^{\mathrm{T}} & X_{m+1,m+1}^{(j)} & M_j \\ N_{0j}^{\mathrm{T}} & N_{1j}^{\mathrm{T}} & N_{2j}^{\mathrm{T}} & \cdots & N_{mj}^{\mathrm{T}} & M_j^{\mathrm{T}} & W_j \end{bmatrix}(j=1,2,\cdots,m).$$

这样,有如下定理:

定理 3　对于系统(6),对给定 $\gamma>0$ 和 $\bar{h}_j\geqslant 0$, $d_j<1(j=1,2,\cdots,m)$, 如果一组 LMI

$$\Xi<0,\Pi_j\geqslant 0(j=1,2,\cdots,m)$$

存在关于 $P>0,Q_j>0(j=1,2,\cdots,m),W_j\geqslant 0$ $(j=1,2,\cdots,m),X^{(j)}\geqslant 0(j=1,2,\cdots,m),M_j\geqslant 0$ $(j=1,2,\cdots,m),N_{ij}(i=0,1,\cdots,m;j=1,2,\cdots,m)$ 的可行解,则 $J(\omega)<0$.

同样,有如下时滞无关的推论:

推论 2　对于系统(6),对给定 $\gamma>0$ 和 $d_j<1(j=1,2,\cdots,m)$, 如果 LMI

$$\begin{bmatrix} \Theta_{11} & PA_1 & PA_2 & \cdots & PA_m & PB \\ A_1^{\mathrm{T}}P & C_1^{\mathrm{T}}C_1-(1-d_1)Q_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ A_2^{\mathrm{T}}P & 0 & C_2^{\mathrm{T}}C_2-(1-d_2)Q_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_m^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 & \cdots & C_m^{\mathrm{T}}C_m-(1-d_m)Q_m & 0 \\ B^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\gamma^2I \end{bmatrix}<0 \tag{20}$$

存在关于 $P > 0, Q_j > 0 (j = 1,2,\cdots,m)$ 的可行解，则 $J(\omega) < 0$. 其中

$$\Theta_{11} = PA_0 + A_0^{\mathrm{T}}P + \sum_{i=1}^{m} Q_i + C_0^{\mathrm{T}}C_0.$$

显然，推论 2 包含于定理 3，时滞相关的有界实引理仍然包含时滞无关的有界实引理. 同样，有如下关于不确定性系统(1)的有界实引理：

定理 4 对于系统(1)，对给定 $\gamma > 0$ 和 $\bar{h}_j \geq 0$，$d_j < 1 (j = 1,2,\cdots,m)$，如果一组 LMI

$$\hat{\Xi} < 0, \Pi_j \geq 0 (j = 1,2,\cdots,m)$$

存在关于 $P > 0, Q_j > 0 (j = 1,2,\cdots,m), W_j \geq 0 (j = 1,2,\cdots,m), X^{(j)} \geq 0 (j = 1,2,\cdots,m), M_j \geq 0 (j = 1,2,\cdots,m), N_{ij} (i = 0,1,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,m)$ 和 $\lambda > 0$ 的可行解，则 $J(\omega) < 0$. 其中

$$\hat{\Xi} = \begin{bmatrix} \hat{\Xi}_{00} & \hat{\Xi}_{01} & \hat{\Xi}_{02} & \cdots & \hat{\Xi}_{0M} & \hat{\Xi}_{0,m+1} & PD + A_0^{\mathrm{T}}HD \\ \hat{\Xi}_{01}^{\mathrm{T}} & \hat{\Xi}_{11} & \hat{\Xi}_{12} & \cdots & \hat{\Xi}_{1m} & \hat{\Xi}_{1,m+1} & A_1^{\mathrm{T}}HD \\ \hat{\Xi}_{02}^{\mathrm{T}} & \hat{\Xi}_{12}^{\mathrm{T}} & \hat{\Xi}_{22} & \cdots & \hat{\Xi}_{2m} & \hat{\Xi}_{2,m+1} & A_2^{\mathrm{T}}HD \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{\Xi}_{0m}^{\mathrm{T}} & \hat{\Xi}_{1m}^{\mathrm{T}} & \hat{\Xi}_{2m}^{\mathrm{T}} & \cdots & \hat{\Xi}_{mm}^{\mathrm{T}} & \hat{\Xi}_{m,m+1}^{\mathrm{T}} & A_m^{\mathrm{T}}HD \\ \hat{\Xi}_{0,m+1}^{\mathrm{T}} & \hat{\Xi}_{1,m+1}^{\mathrm{T}} & \hat{\Xi}_{2,m+1}^{\mathrm{T}} & \cdots & \hat{\Xi}_{m,m+1}^{\mathrm{T}} & \hat{\Xi}_{m+1,m+1} & B^{\mathrm{T}}HD \\ D^{\mathrm{T}}P + D^{\mathrm{T}}HA_0 & D^{\mathrm{T}}HA_1 & D^{\mathrm{T}}HA_2 & \cdots & D^{\mathrm{T}}HA_m & D^{\mathrm{T}}HB & -\lambda I + D^{\mathrm{T}}HD \end{bmatrix},$$

而

$\hat{\Xi}_{ij} = \Xi_{ij} + \lambda E_i^{\mathrm{T}}E_j (i = 0,1,2,\cdots,m; i \leq j \leq m)$,

$\hat{\Xi}_{i,m+1} = \Xi_{i,m+1} + \lambda E_i^{\mathrm{T}}E_b (i = 0,1,2,\cdots,m)$,

$\hat{\Xi}_{m+1,m+1} = \Xi_{m+1,m+1} + \lambda E_b^{\mathrm{T}}E_b, \Pi_j (j = 1,2,\cdots,m)$,

Ξ_{ij} 定义于式(19)，H 定义于式(12).

5 实例(Examples)

例 1 考虑系统(1)当 $\omega(t) = 0$ 的稳定性，$n = 2, m = 1, A_0 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, D = I, E_0 = \mathrm{diag}\{1.6, 0.05\}, E_1 = \mathrm{diag}\{0.1, 0.3\}$. 由定理 2 得到的保证系统鲁棒稳定的最大时滞和文献[5,6,8]的结果的比较列于表 1 中，可以看出，本文结果大大优于已有结果.

表 1 不同时滞导数上限对应的时滞界

Table 1 Boundary of delay corresponding to different upper bound of the derivative of delay

d_1	Kim 的结果[5]	Yue 的结果[6]	Moon 的结果[8]	定理 2
0	0.2412	0.2412	0.7059	1.1490
0.5	<0.2	0.2195	—	0.9247
0.9	<0.1	0.1561	—	0.6954

例 2 考虑标称系统(6)的 H_∞ 性能，设 $n = 2, m = 1, A_0 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, B = [-0.5 \quad 1]^{\mathrm{T}}, C = [1 \quad 0]$. 当 $\dot{h}_1(t) = 0$ 时，可以计算当 $\bar{h}_1 = 4.47$ 时，系统(6)稳定. 当 $\bar{h}_1 = 0.846$ 时，文献[9]，[11]得到的最小性能指标 γ 分别为 2 和 0.32，利用定理 2 得到的 γ 为 0.27，这说明本文方法改善了已有方法的保守性. 更进一步，下表给出了时滞导数上限、时滞界以及最小性能指标的关系.

表 2 最小性能指标 γ

Table 2 Minimum performance γ

d_1	h_1		
	0.8	1	1.5
0	0.254	0.29	0.365
0.5	0.264	0.324	0.455
0.9	0.278	0.471	系统不稳定

6 结论(Conclusion)

作者对于具有多时变时滞的线性系统，获得了系统时滞相关的稳定准则及有界实引理，克服了已有结果的保守性，并说明了时滞相关条件和时滞无关条件的相互关系. 最后给出实例说明本文方法的有效性以及时滞界、时滞导数上限与稳定性及最小性能指标的关系.

参考文献(References):

[1] SU T J, HUANG C G. Robust stability of delay dependence for linear uncertain systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1992, 37(10): 1656 – 1659.

[2] LI X, de SOUZA C E. Delay-dependent robust stability and stabilization of uncertain linear dealy systems: A Linear Matrix Inequality approach [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1997, 42(8): 1144 – 1148.

[3] CAO Y Y, SUN Y X, CHENG C W. Delay-dependent robust stabilization of uncertain systems with multiple state delays [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1998, 43(11): 1608 – 1612.

[4] de SOUZA C E, LI X. Delay-dependent robust control of uncertain linear state-delayed systems [J]. *Automatica*, 1999, 35(7): 1313 – 1321.

[5] KIM J H. Delay and its time-derivative dependent robust stability of time-delayed linear systems with uncertainty [J]. *IEEE Trans on Au-*

tomatic Control, 2001,46(5):789-792.

[6] YUE D, WON S. An improvement on'Delay and its time-derivative dependent robust stability of time-delayed linear systems with uncertainty'[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 47(2):407-408.

[7] PARK P. A delay-dependent stability criterion for systems with uncertain time-invariant delays [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1999,44(4):876-877.

[8] MOON Y S. PARK P. KWON W H, et al. Delay-dependent robust stabilization of uncertain state-delayed systems [J]. *Int J Control*, 2001,74(14):1447-1455.

[9] SHAKED U, YAESH I, de SOUZA C E. Bounded real criteria for linear time-delay systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1998, 43(7):1016-1022.

[10] FRIDMAN E, SHAKED U. A new H_∞ filter design for linear time delay systems [J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2001,49(11): 2839-2843.

[11] FRIDMAN E, SHAKED U. New bounded real lemma representations for time-delay systems and their applications [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2001,46(12):1973-1979.

[12] BOYD S, GHAOUI L El, FERON E, et al. Linear matrix inequality in system and control theory [C]// *Studies in Applied Mathematics* [M]. Philadelphia: SIAM, 1994, 15.

[13] XIE L. Output feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainty [J]. *Int J Control* 1996,63(4):741-750.

作者简介:

何 勇(1969—) 男,副教授,博士研究生,主要研究方向为时滞系统、非线性控制等,E-mail:heyong08@yahoo.com.cn;

吴 敏(1963—) 男,教授,博士生导师,主要研究方向为时滞系统、非线性控制、智能控制和过程控制,E-mail:min@csu.edu.cn.