文章编号: 1000-8152(2004)05-0823-03

线性分式不确定系统保成本控制及其鲁棒界

张冬雯[1,2], 伍清河[1]
(1.北京理工大学 自动控制系,北京 100081; 2.河北科技大学 现代教育技术中心,河北 石家庄 050018)

摘要: 研究线性分式不确定系统的动态输出反馈保成本控制.采用线性矩阵不等式(LMI)方法证明了保成本控制器存在的充分必要条件等价于一个LMI可解性问题,通过该条件将求解闭环系统的成本函数上界的最小值问题转化为一个凸优化问题,利用该凸优化问题的解,得到动态输出反馈控制器的增益矩阵,并且给出了摄动参数允许最大摄动界的一种算法.

关键词: 线性分式不确定性;保成本控制;鲁棒界;线性矩阵不等式

中图分类号: TP13 **文献标识码**: A

Guaranteed cost control and robust bound for linear fractional uncertain system

ZHANG Dong-wen[1,2], WU Qing-he[1]
(1. Department of Automatic Control, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China;
2. Center of Modern Education and Technology, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang Hebei 050018, China;

Abstract: The dynamic output feedback guaranteed cost control for systems with linear fractional uncertainty was addressed. Based on linear matrix inequality(LMI), it was proved that necessary and sufficient condition for the existence of guaranteed cost controller was equivalent to the feasibility of a certain linear matrix inequality . A convex optimization problem was introduced to minimize the upper bound for the cost function of the closed-loop system, and the output feedback controllers were characterized by the solutions to this problem. By Finsler's lemma, an algorithm for finding a maximum perturbation bound for all admissbile perturbation parameters was also presented.

Key words: linear fractional uncertainty; guaranteed cost control; robust bound; linear matrix inequality

1 引言(Introduction)

在大多数控制工程中,人们不仅希望被控系统稳定而且希望它满足某些性能指标,保成本控制就是解决这些问题一种非常有用的方法.对于不确定线性系统,二次保成本控制不仅能保证系统二次鲁棒稳定,而且使系统的二次性能指标上界达到最小.这类控制器的设计方法有两种:一种基于Riccati方法方法[1,2];一种基于LMIs方法[3,4].这些方法绝大部分采用状态反馈控制.

本文中研究线性分式不确定系统的动态输出反馈保成本控制问题,状态矩阵、输入矩阵、输出矩阵均含有不确定性.设计目标为使闭环系统二次稳定且成本函数的上界最小.针对满足 $\Delta(t)^{\mathrm{T}}\Delta(t) \leqslant \rho^2 I$ 的 $\Delta(t)$,给出最大摄动界 $\rho_{\max}$ 的算法.

2 鲁棒性能分析(Robust performance analysis)

考虑如下不确定系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_p(t) = (A+\Delta A)x_p(t) + (B+\Delta B)u(t), \\ y_p(t) = (C+\Delta C)x_p(t) + (D+\Delta D)u(t), \\ \begin{bmatrix} \Delta A & \Delta B \\ \Delta C & \Delta D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} \hat{\Delta}(t) [E_1 \quad E_2], \\ x_p(0) = x_{p0}, \hat{\Delta}(t) = \Delta(t)[I - G\Delta(t)]^{-1}. \end{cases} \tag{1}$$

其中 $x_p(t) \in \mathbb{R}^n$ 为状态,$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $H \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $E \in \mathbb{R}^{q\times n}$ 是已知常数矩阵,$\Delta(t)$ 满足 $\Delta(t)^{\mathrm{T}}\Delta(t) \leqslant I$,同时设 $[I - G\Delta(t)]^{-1}$ 对所有允许的 $\Delta(t)$ 都是可逆的,且 $I - G^{\mathrm{T}}G > 0$.

考虑系统的成本函数

$$J = \int_0^\infty [x_p(t)^{\mathrm{T}} Q x_p(t) + u(t)^{\mathrm{T}} R u(t)]\mathrm{d}t, Q > 0, R > 0. \tag{2}$$

引理 1[5] 给定适当维数的矩阵 $\tilde{G} = \tilde{G}^{\mathrm{T}}, \tilde{H}$,

收稿日期:2003-04-28;收修改稿日期:2004-04-02.
基金项目:国家自然科学基金资助项目(69904003);教育部博士学科点专项科研基金资助项目(1999000701).

$\tilde{E},\hat{\Delta},\hat{\Delta}$ 如式(1)定义,则 $\tilde{G}+\tilde{H}\hat{\Delta}\tilde{E}+\tilde{E}^{\mathrm{T}}\hat{\Delta}^{\mathrm{T}}\tilde{H}^{\mathrm{T}}<0$ 成立的充要条件是存在标量 $\varepsilon>0$, 使得

$$\tilde{G}+[\varepsilon\tilde{E}^{\mathrm{T}}\quad \varepsilon^{-1}\tilde{H}]\begin{bmatrix} I & -G\\ -G^{\mathrm{T}} & I\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\varepsilon\tilde{E}\\ \varepsilon^{-1}\tilde{H}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}<0.$$

下面的定理是本文的主要结果之一,它说明线性分式不确定系统二次成本矩阵存在的充要条件.

定理 1 对于给定不确定系统(1)(设 $u(t)=0$) 和成立函数(2),二次成本矩阵存在的充要条件是存在标量 $\varepsilon>0$ 和正定矩阵 $W>0$, 使得下列 LMI 成立

$$\begin{bmatrix} WA^{\mathrm{T}}+AW & WE^{\mathrm{T}} & H & WQ^{\frac{1}{2}}\\ EW & -I & G & 0\\ H^{\mathrm{T}} & G^{\mathrm{T}} & -I & 0\\ Q^{\frac{1}{2}}W & 0 & 0 & -\varepsilon I\end{bmatrix}<0. \quad (3)$$

证 设二次保成本矩阵为 P, 对所有允许的 $\hat{\Delta}(t)$, 系统(1)中的二次成本矩阵 P 满足 $(A+H\hat{\Delta}(t)E^{\mathrm{T}})P+P(A+H\hat{\Delta}(t)E)+Q<0$, 又由引理1,该式成立的充要条件是存在标量 $\varepsilon_1>0$, 使得

$$A^{\mathrm{T}}P+PA+Q+[\varepsilon_1E^{\mathrm{T}}\quad \varepsilon_1^{-1}PH]\cdot$$
$$\begin{bmatrix} I & -G\\ -G^{\mathrm{T}} & I\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\varepsilon_1E\\ \varepsilon_1^{-1}H^{\mathrm{T}}P\end{bmatrix}<0.$$

利用 Schur 补,并将两边分别乘以 $\mathrm{diag}\{\varepsilon_1P^{-1},I,I\}$, 且设 $\varepsilon=\varepsilon_1^2, W=\varepsilon P^{-1}$, 可得

$$\begin{bmatrix} WA^{\mathrm{T}}+AW+\varepsilon^{-1}WQW & WE^{\mathrm{T}} & H\\ EW & -I & G\\ H^{\mathrm{T}} & G^{\mathrm{T}} & -I\end{bmatrix}<0.$$

对项 $\varepsilon^{-1}WQW$ 利用 Schur 补,得到式(3).

如果 ε,W 存在,则相应的成本函她的上界为 $J<\varepsilon x_p^{\mathrm{T}}(0)W^{-1}x_p(0)$.

3 保成本控制器设计(Design for guarantted cost controllers)

文中采用动态输出反馈控制:

$$\begin{cases}\dot{x}_c(t)=A_cx_c(t)+B_cy_p(t), x_c(0)=x_{c0},\\ u(t)=C_cx_c(t).\end{cases}\quad (4)$$

由式(1),(4)得到闭环系统:

$$\dot{\bar{x}}(t)=(\bar{A}+\bar{H}\hat{\Delta}(t)\bar{E})\bar{x}(t), \bar{x}(0)=\bar{x}_0. \quad (5)$$

这里 $\bar{x}(t)=\begin{bmatrix}x_p(t)\\ x_c(t)\end{bmatrix}, \bar{A}=\begin{bmatrix}A & BC_c\\ B_cC & A_c+B_cDC_c\end{bmatrix}$,

$\bar{H}=\begin{bmatrix}H_1\\ B_cH_2\end{bmatrix}, \bar{E}=[E_1\quad E_2C_c]$.

对应的闭环系统成本函数为

$$J=\int_0^{\infty}\bar{x}(t)^{\mathrm{T}}\bar{Q}\bar{x}(t)\mathrm{d}t, \bar{Q}=\begin{bmatrix}Q & 0\\ 0 & C_c^{\mathrm{T}}RC_c\end{bmatrix}$$

应用定理1,很容易得到闭环系统保成本控制器的存在条件.

推论 1 对于给定系统(1)和成本函数(2),保成本控制器(4)存在的充要条件是存在标量 $\varepsilon>0$ 和正定矩阵 $V>0$, 使得

$$\begin{bmatrix} V\bar{A}^{\mathrm{T}}+\bar{A}V & V\bar{E}^{\mathrm{T}} & \bar{H} & V\bar{Q}^{\frac{1}{2}}\\ \bar{E}V & -I & G & 0\\ \bar{H}^{\mathrm{T}} & G^{\mathrm{T}} & -I & 0\\ \bar{Q}^{\frac{1}{2}}V & 0 & 0 & -\varepsilon I\end{bmatrix}<0. \quad (6)$$

系统成本函数的上界为 $J<\varepsilon\bar{x}^{\mathrm{T}}(0)V^{-1}\bar{x}(0)$.

式(6)是关于 $V,\varepsilon,A_c,B_c,C_c$ 的非 LMI. 采用文献[6]介绍的变换方法,将式(6)转换成 LMI.

首先,对矩阵 V,V^{-1} 进行分块,则有

$$V=\begin{bmatrix}Y & N\\ N^{\mathrm{T}} & Y_1\end{bmatrix}, V^{-1}=\begin{bmatrix}X & M\\ M^{\mathrm{T}} & X_1\end{bmatrix}.$$

定义 $F_1:=\begin{bmatrix}X & I\\ M^{\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix}, F_2:=\begin{bmatrix}I & Y\\ 0 & N^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$.

下面再定义一组新的变量:

$$\hat{A}=XAY+XB\hat{C}+\hat{B}CY+MA_cN^{\mathrm{T}}+\hat{B}D\hat{C},$$
$$\hat{B}=MB_c,\ \hat{C}=C_cN^{\mathrm{T}}.$$

因此,当给定矩阵 X,Y 和 M,N 时,控制器增益 $\{A_c,B_c,C_c\}$ 就能由 $\hat{A},\hat{B},\hat{C}$ 唯一确定. 下面定理给出了基于 LMI 的输出反馈保成本控制的综合过程.

定理 2 对于给定系统(1)和成本函数(2),保成本输出反馈控制器(4)存在的充要条件是存在一个标量 $\varepsilon>0$ 和正定矩阵 $X>0, Y>0$ 且 $\begin{bmatrix}X & I\\ I & Y\end{bmatrix}>0$, 以及 $\hat{A},\hat{B},\hat{C}$, 使得下列 LMI 成立:

$$\begin{bmatrix}\Psi_1 & \hat{A}+A^{\mathrm{T}} & E_1^{\mathrm{T}} & \Psi_2 & Q^{\frac{1}{2}} & 0\\ * & \Psi_3 & \Psi_4 & H_1 & YQ^{\frac{1}{2}} & \hat{C}^{\mathrm{T}}R^{\frac{1}{2}}\\ * & * & -I & G & 0 & 0\\ * & * & * & * & -\varepsilon I & 0\\ * & * & * & * & * & -\varepsilon I\end{bmatrix}<0. \quad (7)$$

其中

$$\Psi_1=A^{\mathrm{T}}X+XA+\hat{B}C+C^{\mathrm{T}}\hat{B}^{\mathrm{T}},$$
$$\Psi_2=XH_1+\hat{B}H_2,$$
$$\Psi_3=AY+YA^{\mathrm{T}}+B\hat{C}+\hat{C}^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}},$$
$$\Psi_4=YE_1^{\mathrm{T}}+\hat{C}^{\mathrm{T}}E_2^{\mathrm{T}}.$$

证 将式(6)左右两边分别乘以 $\mathrm{diag}\{F_1^{\mathrm{T}},I,I,I\}$ 和它的转置,再利用式 V,F_1,F_2 和 $\hat{A},\hat{B},\hat{C}$ 的定义,则得到式(7).

求控制器增益矩阵的步骤,已知给定(7)的解 $X^*, Y^*, \hat{A}^*, \hat{B}^*, \hat{C}^*$.

第一步　已知 $I - X^* Y^* = MN^{\mathrm{T}}$,对 $I - X^* Y^*$ 进行奇异值分解,计算矩阵 M, N.

第二步　设控制器初始状态 $x_c(0) = 0$,成本值上界为 $\bar{x}_0^{\mathrm{T}} P \bar{x}_0 = \varepsilon x_p^{\mathrm{T}}(0) X x_p(0)$,这是关于 ε, X 的非凸函数,由于 $\varepsilon > 0, X > 0$,求 $\min(\varepsilon x_p^{\mathrm{T}}(0) X x_p(0))$ 用 $\min(\varepsilon + x_p^{\mathrm{T}}(0) X x_p(0))$ 来替代,得到次优控制器增益矩阵:

$$\text{minimize } \varepsilon + x_p^{\mathrm{T}}(0) X x_p(0). \quad \text{s.t.}(7) \tag{8}$$

若上式解为 $\varepsilon^{**}, X^{**}, Y^{**}, \hat{A}^{**}, \hat{B}^{**}, \hat{C}^{**}$,成本值上界的最小值为 $J < J^* = \varepsilon^{**} x_p^{\mathrm{T}}(0) X^{**} x_p(0)$,求次优控制器的过程同上述.

4　保成本控制系统的鲁棒界(Robust bound for guaranteed cost control system)

假设 $\Delta^{\mathrm{T}}(t)\Delta(t) \leqslant \gamma^{-2} I, \rho^2 = \gamma^{-2}$,本节研究摄动矩阵 $\Delta(t)$ 允许变化的范围 $\rho_{\max}$. 下面的定理主要依据 Finsler's Lemma.

引理 2(Finsler's Lemma)　设有矩阵 M, N, 且 M 是满列秩, $N = N^{\mathrm{T}}$, 下列叙述是等价的:

i) 存在一个标量 μ,使得 $\mu MM^{\mathrm{T}} - N > 0$.

ii) $M^{\perp} N M^{\perp \mathrm{T}} < 0$.

如果 i)、ii)满足,则满足 i)的所有 μ 由下式给出:

$$\mu > \mu_{\min} = \lambda_{\max}[M^{+}(N - NM^{\perp \mathrm{T}}(M^{\perp} N M^{\perp \mathrm{T}})^{-1} M^{\perp} N) M^{+\mathrm{T}}].$$

定理 3　对于给定不确定系统(1),成本函数(2)和输出反馈控制器(4),其中 $\Delta^{\mathrm{T}}(t)\Delta(t) \leqslant \gamma^{-2} I, \rho^2 = \gamma^{-2}$,如果对于任意不确定性 $\Delta(t)$,有

$$\rho < \rho_{\max} = \frac{1}{\gamma_{\min}} = \frac{1}{\lambda_{\max}\begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{12}^{\mathrm{T}} & \Phi_{22} \end{bmatrix}}.$$

其中

$$\begin{cases} \Phi_{11} = -\varepsilon^2 \bar{E}(\bar{A}^{\mathrm{T}} P + P\bar{A} + \bar{Q})^{-1} \bar{E}^{\mathrm{T}}, \\ \Phi_{12} = G - \bar{E}(\bar{A}^{\mathrm{T}} P + P\bar{A} + \bar{Q})^{-1} P\bar{H}, \\ \Phi_{22} = -\varepsilon^2 \bar{H}^{\mathrm{T}} P(\bar{A}^{\mathrm{T}} P + P\bar{A} + \bar{Q})^{-1} P\bar{H}. \end{cases} \tag{9}$$

则该不确定系统是鲁棒保成本的.

证　对于闭环系统(5)应用引理 2 和 Schur 补,可知

$$\begin{bmatrix} \bar{A}^{\mathrm{T}} P + P\bar{A} + \bar{Q} & \varepsilon \bar{E}^{\mathrm{T}} & \varepsilon^{-1} P\bar{H} \\ \varepsilon \bar{E} & -\gamma I & G \\ \varepsilon^{-1} \bar{H}^{\mathrm{T}} P & G^{\mathrm{T}} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0.$$

上式又可改写为 $\gamma MM^{\mathrm{T}} - N > 0$,

这里

$$M^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

$$N = \begin{bmatrix} \bar{A}^{\mathrm{T}} P + P\bar{A} + \bar{Q} & \varepsilon \bar{E}^{\mathrm{T}} & \varepsilon^{-1} P\bar{H} \\ \varepsilon \bar{E} & 0 & G \\ \varepsilon^{-1} \bar{H}^{\mathrm{T}} P & G^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}.$$

又注意到

$$M^{\perp} = [I \quad 0 \quad 0], M^{+} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$

由于 $\bar{A}^{\mathrm{T}} P + P\bar{A} + \bar{Q} < 0$, 则 Finsler's Lemma 的条件 ii)满足,因此 $\gamma_{\min} = \lambda_{\max}\begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{12}^{\mathrm{T}} & \Phi_{22} \end{bmatrix}$. 其中 Φ_{11}, Φ_{12}, Φ_{22} 由式(9)所定义.　证毕.

5　结论(Conclusion)

采用 LMI 方法解决了线性分式不确定系统动态输出反馈保成本控制问题,提出了保成本控制器存在的充分必要条件等价于 LMI 可解性问题,利用该条件使求系统成本函数的上界最小值问题成为一个凸优化问题,利用该凸优化问题的解,可以求得控制器增益矩阵,文中还给出了不确定系统摄动参数的最大摄动界的计算方法.

参考文献(References):

[1] PETERSEN I R, McFARLANE D C. Optimal Guaranteed cost control and filtering for uncertain linear system [J]. *IEEE Trans on Automat Control*, 1994, 39(9): 1971 - 1977.

[2] YU L, GAO F. Output feedback guaranteed cost control for uncertain discrete-time systems using linear matrix inequalities [J]. *J of Optimization Theory and Applications*, 2002, 113(3): 621 - 634.

[3] Mahmoud M S, XIE L. Guaranteed cost control of uncertain discrete systems with delays [J]. *Int J Control*, 2000, 73(2): 105 - 114.

[4] NAGATO O, KEISUKE O. Guaranteed cost controllers under pole placement for uncertain linear systems: an LMI approach [C]// *Proc of 1998 IEEE Int of Conference on Control Applications*. Arlington, VA: [s.n.], 1998: 123 - 128.

[5] XIE L. Output feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainty [J]. *Int J of Control*, 1996, 63(4): 741 - 750.

[6] SCHERER C, GAHINET P, CHILALI M. Mulitiobjective output feedback control via LMI optimization [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1997, 42(7): 892 - 911.

作者简介:

张冬雯　(1964 —),女,河北科技大学副教授,博士,研究领域为鲁棒控制, E-mail: zhangdongwen343@sohu.com;

伍清河　(1955 —),男,北京理工大学教授,博士生导师,研究领域为智能控制、鲁棒控制、H_∞ 控制理论及应用.