文章编号: 1000 - 8152(2004)06 - 0907 - 04

一类随机人口发展系统的指数稳定性

张启敏¹, 聂赞坎²

(1. 宁夏大学 数学计算机学院, 宁夏 银川 750021; 2. 西安交通大学 理学院, 陕西 西安 710049)

摘要: 对人口系统的讨论, 通常的数学模型没有考虑外界环境对系统的影响. 在假设随机的外界环境对迁移产生扰动的条件下, 给出 Hilbert 空间中一类随机时变人口发展系统. 对随机时变人口发展系统的均方稳定性和指数稳定性进行了讨论. 利用 Burkholder-Davis-Gundy 不等式, Gronwall 引理和 Kolmogorov 不等式得到了均方稳定和指数稳定的充分条件. 最后提出如果生育率选作控制变量, 系统仍然是均方和指数稳定的, 并可进一步讨论它的最优控制问题.

关键词: 随机系统; Itô 公式; 人口; 指数稳定性

中图分类号: O175 **文献标识码:** A

Exponential stability of stochastic age-dependent population dynamics system

ZHANG Qi-min¹, NIE Zan-kan²

(1. School of Mathematics and Computer, Ningxia University, Yinchuan Ningxia 750021, China;

2. School of Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an Shaanxi 710049, China)

Abstract: The influence of the stochastic external environment upon the population dynamics system have never been considered in ordinary age-dependent system models. A class of stochastic age-dependent population dynamics system is proposed, on the condition that migration is perturbed by random external environment. The mean square and almost sure exponential stability of stochastic age-dependent population dynamics system are discussed in Hilbert space. Sufficient conditions of mean square and almost sure exponential stability are established for a class of stochastic age-dependent population dynamics system. The analyses are conducted by using Burkholder-Davis-Gundy inequality, Gronwall lemma and Kolmogorov inequality derived for our stability purposes. It is also proposed that if the birth rate can be regarded as a controllable variable, the system is still mean square and almost sure exponential stability. The optimal control can be further studied for stochastic age-dependent population dynamics system.

Key words: stochastic system; Itô formula; population; exponential stability

1 引言 (Introduction)

人口发展系统的研究历史悠久, 由多个数学家提出, 并不断完善为如下的数学模型:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial a} = -\mu(t, a)P + f(t, P(t, a)), & \text{在 } Q = (0, T) \times (0, A), \\ P(0, a) = P_0(a), & \text{在 } [0, A], \\ P(t, 0) = \int_0^A \beta(t, a)P(t, a)da, & \text{在 } [0, T]. \end{cases} \quad (1)$$

其中 $P(t, a)$ 表示 t 时间、年龄为 a 的人口密度函数, $\beta(t, a)$ 是女性的生育率函数, $\mu(t, a)$ 表示人口

的死亡率, $f(t, P(t, a))$ 是迁移率, 表示外部环境对所研究系统的影响.

在生育率与时间无关的条件下, 文献[1]利用了算子半群理论研究了该问题解的存在唯一性和稳定性. 文献[2]在 $f(t, P) \equiv 0$ 的假设下, 讨论了方程(1)的稳定性. 文献[3, 4]在数学理论上进一步发展了人口系统的稳定性理论. 然而, 人们发现人口系统经常受到随机环境噪声的影响^[5, 6], 一些文献开始对随机的人口系统进行研究. 例如, 文献[7]对随机的人口系统解的爆破进行了讨论. 文献[8]假设 $f(t, P(t, a))$ 是随机的条件下, 研究了方程(1)解的存在唯一性. 当 $f(t, P(t, a))$ 是随机的, 并且可以

表示为如下形式时:

$f(t, P(t, a)) \rightarrow f(t, p(t, a)) + g(t, P(t, a))\dot{\omega}(t)$
(其中 $\dot{\omega}(t)$ 是白噪声), 则这个系统可以用下列方程表示:

$$\begin{cases} d_t P = -\frac{\partial P}{\partial a} dt - \mu(t, a) P dt + f(t, P) dt + g(t, P) d\omega_t \\ P(0, a) = P_0(a), \\ P(t, 0) = \gamma(t)\beta(t) \int_0^A \mu(t, a) P(t, a) da, \end{cases}$$

在 $Q = (0, T) \times (0, A)$,
在 $[0, A]$,
在 $[0, T]$.

(2)

其中 $d_t P$ 表示 $P(t, a)$ 关于 t 的微分(即固定 a). 本文讨论方程(2)的指数稳定性.

2 预备知识(Preliminaries)

令 $V = H^1([0, A]), H = L^2([0, A])$, 显然有 $V \rightarrow H \equiv H' \rightarrow V'$.

分别用 $\|\cdot\|, |\cdot|$ 和 $\|\cdot\|_*$ 表示 V, H 和 V' 中的范数; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 V' 和 V 的对偶积; $(\cdot, \cdot)$ 是 H 中的内积, 并且存在一个常数 m , 使得

$$|x| \leq m \|x\|, \forall x \in V.$$

ω_t 定义在完备的概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 取值在可分的 Hilbert 空间 K 上的 Wiener 过程, 具有增量协方差算子 W . $\|\cdot\|_2$ 表示 Hilbert-Schmidt 范数, 即 $\|B\|_2^2 = \text{tr}(BWB^T)$.

根据 P 的实际意义, P 还应满足边界条件 $P(t, A) = 0$, 它有等价条件 $\int_0^A \mu(t, a) da = +\infty$, 当 $r < A$ 时, $\int_0^r \mu(t, a) da < +\infty$.

假设系统满足下列条件:

$H_1) \mu(t, a), \beta(t, a)$ 是非负可测的, 并且有

$$\begin{cases} 0 \leq \mu_0 \leq \mu(t, a) < \infty, (t, a) \in Q, \\ 0 \leq \beta(t, a) \leq \bar{\beta} < \infty, (t, a) \in Q. \end{cases}$$

令 $f(t, \cdot): v \rightarrow H$ 是一族几乎处处有定义的非线性算子; $g(t, \cdot): v \rightarrow \mathcal{L}(K, H)$, 从 K 到 H 的一族非线性算子. $\forall x \in V, f(t, x)$ 和 $g(t, x)$ 是 Lebesgue 可测, 并且满足

$H_2)$ 对于任意 $t \in \mathbb{R}^+, f(t, 0) = 0, g(t, 0) = 0$.

$H_3) \forall x, y \in V$ 存在常数 $k > 0$ 使得

$$\|g(t, y) - g(t, x)\| \leq k \|y - x\| \text{ a.e.t.}$$

$H_4) t \in \mathbb{R}^+$, 存在常数 $\alpha > 0, \xi > 0, \lambda \in \mathbb{R}$, 和一个非负连续函数 $\gamma(t)$, 使得

$$\begin{aligned} 2\langle f(t, v), v \rangle + \|g(t, v)\|_2^2 \leq \\ -\alpha \|v\|^2 + \lambda |v|^2 + \gamma(t)e^{-\xi t}, v \in V, \end{aligned}$$

对于任意 $\delta > 0, \gamma(t)$ 满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t)/e^{\delta t} = 0$.

3 强解的稳定性(Stability of strong solution)

定理 3.1 P_t 是方程(2)的全局强解^[9]. $\forall t \geq 0$ 如果上述假设条件成立, 并且 $\alpha/m^2 - \lambda - A\bar{\beta}^2 + 2\mu_0 > 0$, 则存在常数 $\tau > 0, C > 0$ 使得

$$E|P_t|^2 \leq C \cdot e^{-\tau t}. \quad (3)$$

证 为了证明方便, 令 $P_t = P(t, a), P_0 = P(0, a)$. 首先, 可以取一个尽可能小的数 $\delta > 0$, 使得 $\mu - \delta > 0$. 则由 Itô 可得

$$\begin{aligned} e^{(\xi-\delta)t} |P_t|^2 - |P_0|^2 = \\ (\xi - \delta) \int_0^t e^{(\xi-\delta)s} |P_s|^2 ds + \\ 2 \int_0^t e^{(\xi-\delta)s} \langle -\frac{\partial P_t}{\partial a} - \mu(s, a) P_s, P_s \rangle ds + \\ 2 \int_0^t e^{(\xi-\delta)s} \langle f(s, P_s), P_s \rangle ds + \\ 2 \int_0^t e^{(\xi-\delta)s} \langle g(s, P_s) d\omega_s, P_s \rangle + \\ \int_0^t e^{(\xi-\delta)s} \|g(s, P_s)\|_2^2 ds. \end{aligned} \quad (4)$$

根据 $-2\langle \frac{\partial P}{\partial a}, P_s \rangle = (\int_0^A \beta(s, a) P_s da)^2$ 可得

$$\begin{aligned} e^{(\xi-\delta)t} E|P_t|^2 \leq \\ E|P_0|^2 + (\xi - \delta) \int_0^t e^{(\xi-\delta)s} E|P_s|^2 ds + \\ E \int_0^t e^{(\xi-\delta)s} \|g(s, P_s)\|_2^2 ds - \\ 2\mu_0 \int_0^t e^{(\xi-\delta)s} E|P_s|^2 ds + \\ 2E \int_0^t e^{(\xi-\delta)s} \langle f(s, P_s), P_s \rangle ds + \\ \int_0^t e^{(\xi-\delta)s} (\int_0^A \beta^2(s, a) da) E \int_0^A P_s^2 da ds. \end{aligned} \quad (5)$$

由假设 H_4) 可得

$$\begin{aligned} e^{(\xi-\delta)t} E|P_t|^2 \leq \\ E|P_0|^2 + (\xi - \delta + \lambda) \int_0^t e^{(\xi-\delta)s} E|P_s|^2 ds - \\ \alpha \int_0^t e^{(\xi-\delta)s} E\|P_s\|_2^2 ds + \\ (A\bar{\beta}^2 - 2\mu_0) \int_0^t e^{(\xi-\delta)s} E|P_s|^2 ds + \int \gamma(t) e^{-\delta s} ds. \end{aligned} \quad (6)$$

式(6)又可以被表示为

$$\begin{aligned} e^{(\xi-\delta)t} E|P_t|^2 \leq \\ E|P_0|^2 + (\xi - \delta - \nu) \int_0^t e^{(\xi-\delta)s} E|P_s|^2 ds + \end{aligned}$$

$$\int_0^t \gamma(s)e^{-\delta s} ds. \tag{7}$$

其中 $\nu = \alpha/m^2 - \lambda - A\bar{\beta}^2 + 2\mu_0$.

当 $\xi - \nu \leq 0$ 时,可得到

$$e^{(\xi-\delta)t} E|P_t|^2 \leq E|P_0|^2 + \int_0^t \gamma(s)e^{-\delta s} ds.$$

即存在一个常数 $k = k(\delta) > 0$ 使得

$$E|P_t|^2 \leq (E|P_0|^2 + k(\delta))e^{-(\xi-\delta)t}. \tag{8}$$

另一方面,当 $\xi - \nu > 0$ 时,总可以找一个适当的数 $\delta > 0$,使得 $\xi - \delta - \nu > 0$. 则,根据式(7)和 Gronwall 引理,存在一个正的常数 $k(\delta) > 0$ 使得

$$E|P_t|^2 \leq (E|P_0|^2 + k(\delta))e^{-\nu t}. \tag{9}$$

引理 3.1 如果定理 3.1 的假设成立,则存在一个常数 $C > 0, \tau > 0$, 使得

$$\int_0^t E \| (g(u, P_u)) \|^2 du \leq Ce^{-\tau s}, 0 \leq s \leq t. \tag{10}$$

证 类似定理 3.1 的证明,对任意的 $\delta > 0, \xi - \delta > 0$. 如果 $\xi - \nu \leq 0$, 根据(7)可得

$$\int_0^t e^{(\xi-\delta)s} E|P_s|^2 ds \leq \frac{E|P_0|^2 + \int_0^t \gamma(s) \cdot e^{-\delta s} ds}{\nu + \delta - \xi}. \tag{11}$$

将式(11)代入式(6),直接得到

$$\begin{aligned} & \int_0^t e^{(\xi-\delta)s} E \| P_s \|^2 ds \leq \\ & \frac{1}{\alpha} \left[\frac{\xi - \delta + \lambda + A\bar{\beta}^2 - 2\mu_0}{\nu + \delta - \xi} + 1 \right] [E|P_0|^2 + \int_0^t \gamma(s)e^{-\delta s} ds] \leq \\ & \frac{1}{\alpha} \left[\frac{\xi - \delta + \lambda + A\bar{\beta}^2 - 2\mu_0}{\nu + \delta - \xi} + 1 \right] [E|P_0|^2 + k(\delta)]. \end{aligned} \tag{12}$$

所以,对 $0 \leq s \leq t$,

$$\begin{aligned} & \int_s^t E \| P_u \|^2 du \leq \\ & e^{-(\xi-\delta)s} \int_0^t e^{(\xi-\delta)u} E \| P_u \|^2 du \leq \\ & \frac{1}{\alpha} \left[\frac{\xi - \delta + \lambda - 2\mu_0 + A\bar{\beta}^2}{\nu + \delta - \xi} + 1 \right] \cdot [E|P_0|^2 + k(\delta)] e^{-(\xi-\delta)s}. \end{aligned} \tag{13}$$

根据 H_3) 和 H_4) ,有

$$\begin{aligned} & \int_s^t E \| g(u, P_u) \|^2 du \leq \\ & 2 \int_s^t E \| g(u, P_u) - g(u, 0) \|^2 du + \\ & 2 \int_s^t E \| g(u, 0) \|^2 du \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & k_1 \int_s^t E \| P_u \|^2 du + k_2 \int_s^t \gamma(u) e^{-\xi u} du \leq \\ & C(\delta) e^{-(\xi-\delta)s}, \end{aligned} \tag{14}$$

这里 k_1, k_2 是正的常数.

另一方面,如果 $\xi - \nu > 0$,能够选择一个适当的 $\delta > 0$,使得 $\nu - \delta > 0$. 这样由 Itô 公式和假设得

$$\begin{aligned} & e^{(\nu-\delta)t} E|P_t|^2 \leq \\ & E|P_0|^2 + (\nu - \delta + \lambda + A\bar{\beta}^2 - \\ & 2\mu_0) \int_0^t e^{(\nu-\delta)s} E|P_s|^2 ds + \\ & \int_0^t \gamma(s) e^{-\delta s} ds - \alpha \int_0^t e^{(\nu-\delta)s} E \| P_s \|^2 ds. \end{aligned} \tag{15}$$

根据式(9),由式(15)可以得到

$$\begin{aligned} & \alpha \int_0^t e^{(\nu-\delta)s} E \| P_s \|^2 ds \leq \\ & E|P_0|^2 + C(\nu - \delta + \lambda + \\ & A\bar{\beta}^2 - 2\mu_0) \int_0^t e^{-\delta s} ds + K(\delta). \end{aligned}$$

采用与式(13)和(14)相似的方法,可以证明式(10)也成立.这样,引理 3.1 得证.

引理 3.2 如果定理 3.1 的假设成立,则存在一个常数 $M > 0$, 使得

$$E(\sup_{0 \leq t \leq \infty} |P_t|^2) \leq M.$$

证 由 Itô 公式

$$\begin{aligned} & |P_t|^2 - |P_0|^2 = \\ & 2 \int_0^t \left\langle -\frac{\partial P_s}{\partial a} - \mu(s, a) P_s, P_s \right\rangle ds + \\ & 2 \int_0^t \langle f(s, P_s), P_s \rangle ds + \int_0^t \| g(s, P_s) \|^2 ds + \\ & 2 \int_0^t \langle P_s, g(s, P_s) d\omega_s \rangle. \end{aligned} \tag{16}$$

根据 Burkholder-Davis-Gundy 不等式,对任意 $T \in \mathbb{R}^+$, 有

$$\begin{aligned} & 2E \left[\sup_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t \langle P_s, g(s, P_s) d\omega_s \rangle \right| \right] \leq \\ & \frac{1}{2} E \left[\sup_{0 \leq s \leq T} |P_s|^2 \right] + K_2 \int_0^T \| g(s, P_s) \|^2 ds. \end{aligned} \tag{17}$$

其中 K_1, K_2 是两个正的常数.因此,由上式可得

$$\begin{aligned} & E(\sup_{0 \leq s \leq T} |P_s|^2) \leq \\ & E|P_0|^2 + \nu \int_0^T E|P_s|^2 ds + \int_0^T \gamma(s) e^{-\xi s} ds + \\ & \frac{1}{2} E \left[\sup_{0 \leq s \leq T} |P_s|^2 \right] + K_2 \int_0^T \| g(s, P_s) \|^2 ds. \end{aligned} \tag{18}$$

根据定理 3.1 和引理 3.1,可以证明引理 3.2.

定理 3.2 如果定理 3.1 的假设成立, 则存在正的常数 M, ε 和集合 $N_0 \subset \Omega$, 且 $P(N_0) = 0$, 使得对每一个 $\omega \in N_0$, 存在一个正的数 $T(\omega)$ 使得下式成立:

$$|P_t|^2 \leq M \cdot e^{-\varepsilon t}, \quad \forall t \geq T(\omega). \quad (19)$$

证 对于自然数 N , 当 $T \geq N$ 时. 特别地, 当 N 取充分大时, 容易得到

$$\begin{aligned} P\left\{ \sup_{t \in \{N, N+1\}} |P_t|^2 \geq \varepsilon_N^2 \right\} &\leq \\ P\left\{ |P_N|^2 \geq \varepsilon_N^2/4 \right\} + P\left\{ \int_N^{N+1} |P_s|^2 ds \geq \varepsilon_N^2/4 \right\} + \\ P\left\{ \int_N^{N+1} \gamma(s) e^{-\varepsilon s} ds \geq \varepsilon_N^2/4 \right\} + \\ P\left[\sup_{t \in \{N, N+1\}} \left| \int_N^t \langle P_s, g(s, P_s) \rangle d\omega_s \right| \geq \varepsilon_N^2/4 \right], \end{aligned} \quad (20)$$

其中 $\varepsilon_N^2 = C e^{-\tau N/4}$.

对式(20)的第一项和第二项应用 Kolmogorov 不等式和定理 3.1, 并且对最后一项应用 Burkholder-Davis-Gundy 不等式和 Hölder 不等式, 采用与上面分析相同的方法, 则存在一个正的常数 K_3 使得

$$P\left[\sup_{t \in \{N, N+1\}} |P_t|^2 \geq \varepsilon_N^2 \right] \leq K_3 e^{-\tau N/4}.$$

应用 Borel-Cantelli 引理, 几乎对所有 $\omega \in \Omega$, 存在一个正的数 $T(\omega)$, 使得

$$|P_t|^2 \leq M \cdot e^{-\varepsilon t}, \quad \forall t \geq T(\omega). \quad (21)$$

定理 3.2 得证.

4 结论(Conclusion)

给出一类随机时变人口发展系统, 并对系统的指数稳定性进行了讨论. 本文的结论对人口的预测与控制有一定的指导意义. 在系统模型中, 如果把 $\beta(t, a)$ 选作控制变量, 对系统的稳定性没有影响. 可采用与文献[2]相同的方法讨论生育率 $\beta(t, a)$ 的最优控制.

参考文献(References):

[1] 宋健, 于景元. 人口控制理论[M]. 北京: 科学出版社, 1985: 17 - 23.

(SONG Jian, YU Jingyuan. *Control Theory of Population* [M]. Beijing: Science Press, 1985: 17 - 23.)

[2] 申建中, 徐宗本. 时变人口系统的适定性及关于生育率的最优控制[J]. 系统科学与数学, 2001, 21(3): 274 - 282.

(SHEN Jianzhong, XU Zongben. The well posedness of the time-dependent population dynamics system and the optimal control on the fertility rate [J]. *J of System Science & Mathematics Sciences*, 2001, 21(3): 274 - 282.)

[3] 宋健, 于景元, 朱广田, 等. 人口发展方程解及其渐进性质[J]. 科学通报, 1982, 27(22): 1356 - 1359.

(SONG Jian, YU Jianguyuan, ZHU Guangtian, et al. The population evolution equation and asymptotically character [J]. *Chinese Science Bulletin*, 1982, 27(22): 1356 - 1359.)

[4] 宋健, 于景元. 人口系统稳定性理论和妇女生育率[J]. 自动化学报, 1981, 17(1): 1 - 12.

(SONG Jian, YU Jingyuan. The stability theory of the population system and the fertility rate [J]. *Acta Automatica Sinica*, 1981, 17(1): 1 - 12.)

[5] KIFER Y. Principal eigenvalues, topological pressure and stochastic stability of equilibrium states [J]. *J of Mathematics*, 1990, 70(1): 1 - 47.

[6] RAMANAN K, ZEITOUNI O. The quasi-stationary distribution for small random perturbations of certain one-dimensional maps [J]. *Stochastic Processes and Their Applications*, 1999, 86(1): 25 - 51.

[7] MAO X R. Environmental Brownian noise suppresses explosions in population dynamics [J]. *Stochastic Processes and Their Applications*, 2002, 97(2): 95 - 110.

[8] 张国伟, 惠淑荣. 一类具有随机周期移民扰动的非线性人口发展方程随机周期解的存在唯一性[J]. 生物数学学报, 2002, 17(1): 60 - 63.

(ZHANG Guowei, HUI Shurong. The existence and uniqueness of random periodic solutions for a class of nonlinear population dynamics with random periodic migration perturbations [J]. *J of Biomathematics*, 2002, 17(1): 60 - 63.)

[9] 黄志远. 随机分析学基础[M]. 北京: 科学出版社, 2001: 213 - 240.

(HUANG Zhiyuan. *Stochastic Analysis Basic* [M]. Beijing: Science Press, 2001: 213 - 240.)

作者简介:

张启敏 (1964 —), 女, 副教授, 博士, 研究方向随机模型的计算及应用, E-mail: zhangqimin64@sina.com;

聂赞坎 (1939 —), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向随机模型的计算及应用, E-mail: niewang@mailst.jxtu.edu.