

分数阶线性定常系统的稳定性及其判据

王振滨, 曹广益, 朱新坚
(上海交通大学 自动化系, 上海 200030)

摘要: 介绍了分数阶微分方程和分数阶系统, 给出分数阶线性定常系统的传递函数描述和状态空间描述. 给出了分数阶线性定常系统的稳定性条件, 并结合分数阶状态方程给出定理的证明. 直接从复分析中的辐角原理出发, 推导出分数阶线性定常系统 2 个有效的稳定性判据: 分数阶系统奈奎斯特判据和分数阶系统对数频率判据. 通过实例验证了其有效性.

关键词: 分数阶系统; 线性定常; 稳定性判据; 奈奎斯特路径; 波德图
中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Stability conditions and criteria for fractional order linear time-invariant systems

WANG Zhen-bin, CAO Guang-yi, ZHU Xin-jian

(Department of Automation, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200030, China)

Abstract: The fractional order differential equations and the fractional order linear time-invariant systems are introduced, and their transfer function representation and state-space representation are given. The stability conditions are proposed for the fractional order linear time-invariant systems. A proof is also given based on the fractional order state-space equation. Starting directly from the argument principle of complex analysis, two efficient stability criteria are deduced for fractional order linear time-invariant systems: Nyquist criterion of fractional systems and logarithmic-frequency criterion of fractional systems. An example verifies the effectiveness of the criteria aforementioned.

Key words: fractional order systems; linear time-invariant; stability criteria; Nyquist path; Bode plots

1 引言 (Introduction)

虽然分数微积分 (Fractional calculus) 已有 300 多年的历史, 但分数微积分理论的发展主要完成于 19、20 世纪中叶, 且主要集中在纯数学领域. 近年来, 分数微积分已经开始逐渐向工程应用领域内渗透. 把分数微积分用于控制领域还是个新兴的研究领域, 这方面的开创性工作有: Podlubny I 研究了分数阶 PP^D^α 控制器^[1,2]; Matignon D 研究了分数阶微分系统的稳定性、可控性、可观测性理论^[3,4]; Oustaloup A 提出了 CRONE 控制原理^[5,6].

系统的稳定性是系统设计时需要考虑的最重要的因素之一, 分数阶系统也不例外. 考虑到分数阶系统的传递函数一般不是复变量 s 的有理函数, 因而目前还没有什么有效的多项式判据, 如 Routh 判据和 Jury 判据, 可以用来分析分数阶系统的稳定性. 为此本文直接从复分析中的辐角原理出发, 推导出

分数阶线性定常系统两个有效的稳定性判据: 分数阶系统奈奎斯特判据和分数阶系统对数频率判据.

2 分数阶线性定常系统 (Fractional order linear time-invariant systems)

2.1 传递函数描述 (Transfer function representation)

分数阶线性定常系统可以表示为如下形式的分数阶微分方程:

$$D^{\alpha n}y(t) + a_{n-1}D^{\alpha(n-1)}y(t) + \dots + a_0y(t) = b_mD^{\alpha m}u(t) + b_{m-1}D^{\alpha(m-1)}u(t) + \dots + b_0u(t). \quad (1)$$

其中

$$D^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau \quad (2)$$

是阶次为 $\alpha = 1/q$ 的分数阶导数, q, m, n 为正整数, 且 $m < n$, 式(2)中 $\Gamma(\cdot)$ 表示伽马函数.

考虑到零初始条件下 $D^{\alpha}f(t)$ 的拉普拉斯变换为

$$L(D^{\alpha}f(t)) = s^{\alpha}F(s), \quad (3)$$

则系统(1)的传递函数描述如下:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^{\alpha m} + b_{m-1} s^{\alpha(m-1)} + \dots + b_0}{s^{\alpha n} + a_{n-1} s^{\alpha(n-1)} + \dots + a_0} \quad (4)$$

2.2 状态方程描述(State space representation)

可以把式(1)写成如下的状态方程形式:

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t). \end{cases} \quad (5)$$

其中, $x(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}, y(t) \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times 1}, C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$,

$$x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T, \quad (6)$$

$$\begin{cases} x_1(t) = x(t), \\ x_2(t) = D^\alpha x_1(t) = D^\alpha x(t), \\ \vdots \\ x_n(t) = D^\alpha x_{n-1}(t) = D^{\alpha(n-1)} x(t), \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ C = [b_0 \quad \dots \quad b_m \quad 0 \quad \dots \quad 0] \end{cases} \quad (8)$$

3 稳定性条件(Stability conditions)

定义1 分数阶线性定常系统

$$D^\alpha x(t) = Ax(t), 0 < \alpha < 1, x(0) = x_0 \quad (9)$$

被称为是

- 稳定的,当且仅当, $\forall x_0, \exists M > 0, \forall t > 0,$
 $\|x(t)\| \leq M; \quad (10)$

- 渐近稳定的,当且仅当
 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0. \quad (11)$

以上定义称为分数阶线性定常系统的内部稳定性定义.

定义2 分数阶线性定常系统(1)是有界输入有界输出(Bounded input and bounded output)稳定的,当且仅当

$$\forall u \in L^\infty, y = g(t) * u(t) \in L^\infty. \quad (12)$$

其中, $g(t)$ 为 $G(s)$ 的拉普拉斯逆变换.称定义2为分数阶线性定常系统的外部稳定性定义.

引理1 如果 $0 < \alpha < 2, \beta \in \mathbb{C}, \mu \in \mathbb{R}, \pi\alpha/2 < \mu < \min\{\pi, \pi\alpha\}$,则对 $\forall \rho \geq 1$ 有

$$\begin{cases} E_{\alpha, \beta}(z) = \\ - \sum_{k=1}^{\rho} \frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta - \alpha k)} + O(|z|^{-1-\rho}), \\ |z| \rightarrow \infty, \mu \leq |\arg(z)| \leq \pi. \end{cases} \quad (13)$$

其中, $E_{\alpha, \beta}(z)$ 为双变量 Mittag-Leffler 函数^[2].引理的证明可以参考文献[2].

定理1 系统(9)是渐近稳定的充要条件是矩阵 A 的所有特征值 $\lambda_i, \det(\lambda_i I - A) = 0$, 满足条件

$$|\arg(\lambda_i)| > \frac{\alpha\pi}{2}, \forall i. \quad (14)$$

证 设 A 有 n 个不同的特征值 $\lambda_i (i = 1, \dots, n)$, 存在非奇异变换阵 T , 使得式(9)可以变换为

$$D^\alpha \bar{x}(t) = \Lambda \bar{x}(t), \bar{x}(0) = \bar{x}_0. \quad (15)$$

其中

$$\bar{x}(t) = Tx(t), \quad (16)$$

$$\Lambda = TAT^{-1} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}. \quad (17)$$

设 T 的最大奇异值为 σ_{\max} , 最小奇异值为 σ_{\min} , 则有

$$\sigma_{\min} \|x(t)\| \leq \|\bar{x}(t)\| \leq \sigma_{\max} \|x(t)\|. \quad (18)$$

从而若式(11)成立,只需

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\bar{x}(t)\| = 0. \quad (19)$$

式(15)的解析解可以用函数 $E_{\alpha, \beta}(z)$ 表示为

$$\bar{x}(t) = E_{\alpha, 1}(\Lambda t^\alpha) \bar{x}_0. \quad (20)$$

这样,若要 $\|\bar{x}(t)\| \rightarrow 0$ 成立,只需

$$E_{\alpha, 1}(\lambda_i t^\alpha) \rightarrow 0, \forall i. \quad (21)$$

由引理1知,上式成立等价于式(14)成立.对于 A 有重特征值的情况,可以用类似的方法证明.

注1 对于稳定系统(9),其在初始值作用下的系统响应是以 $t^{-\alpha}$ 速度衰减,而其脉冲响应是以 $t^{-\alpha-1}$ 的速度衰减,显然此种衰减速度与相应整数阶系统以指数速度衰减相比要慢许多,因而可以称其为慢衰减,即它对过去有较长的记忆作用,这种具有长期记忆的行为正是分数阶微分系统所特有的,而整数阶微分系统没有这种性质.对线性定常分数阶微分系统来说,内部稳定一定能推出外部稳定,反之不一定.

4 稳定性判据(Stability criteria)

设 $G(s)$ 为某分数阶单位反馈系统的开环传递函数(见图1),且

$$G(s) = \frac{Q(s^\alpha)}{P(s^\alpha)}. \quad (22)$$

其中, $P(\lambda)$ 和 $Q(\lambda) (\lambda = s^\alpha)$ 是两个互质多项式,且 $\deg[P(\lambda)] = n, \deg[Q(\lambda)] = m, n > m, \alpha = 1/q, q$ 为正整数,则其单位闭环传递函数 $\Phi(s)$ 为

$$\Phi(s) = \frac{Q(s^\alpha)}{P(s^\alpha) + Q(s^\alpha)}, \quad (23)$$

其闭环特征多项式为

$$D(s) = P(s^\alpha) + Q(s^\alpha). \quad (24)$$

设辅助函数 $F(s)$ 为

$$F(s) = 1 + \frac{Q(s^\alpha)}{P(s^\alpha)} = \frac{P(s^\alpha) + Q(s^\alpha)}{P(s^\alpha)}, \quad (25)$$

显然, $F(s)$ 的零点和极点分别是闭环系统的极点和开环系统的极点.

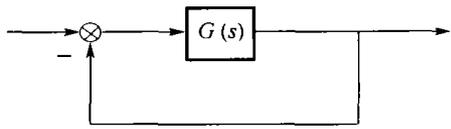


图1 单位反馈系统

Fig. 1 Unit feedback system

引理 2(辐角原理^[7]) 如果封闭曲线 Γ_s 内有 Z 个 $F(s)$ 的零点, P 个 $F(s)$ 的极点, 则 s 沿 Γ_s 顺时针转一圈时, 在 $F(s)$ 平面上, $F(s)$ 曲线绕其原点逆时针转过的圈数 R 为 P 和 Z 的差, 即

$$R = P - Z. \quad (26)$$

定理 2(分数阶系统奈奎斯特判据) 分数阶单位反馈系统(见图1)稳定的充要条件是 $G(s)$ 的奈奎斯特曲线逆时针包围临界点 $(-1, j0)$ 的圈数 R 等于 $G(\lambda)$ ($\lambda = s^\alpha$) 在角形区域 $(-\alpha\pi/2, \alpha\pi/2)$ 内的极点数 P ; 否则闭环系统不稳定, 且闭环系统不稳定特征根的个数 Z 可按式(27)确定:

$$Z = P - R. \quad (27)$$

证 考虑到闭环系统的特征多项式 $D(s)$ 通常不是个有理多项式, 它的根有无穷多个, 其中只有有限个根在黎曼主平面内, 即

$$-\pi < \arg(s_i) \leq \pi. \quad (28)$$

这些根称为结构根(structural roots), 根据它们在黎曼主平面的位置, 系统有6种不同的响应:

- 1) 黎曼主平面内无根, 系统响应为一单调下降函数;
- 2) 黎曼主平面内有根, 且 $\text{Re}(s) < 0, \text{Im}(s) = 0$, 系统响应为一单调下降函数;
- 3) 黎曼主平面内有根, 且 $\text{Re}(s) < 0, \text{Im}(s) \neq 0$, 系统响应为一阻尼振荡函数;
- 4) 黎曼主平面内有根, 且 $\text{Re}(s) = 0, \text{Im}(s) \neq 0$, 系统响应为一等幅振荡函数;
- 5) 黎曼主平面内有根, 且 $\text{Re}(s) > 0, \text{Im}(s) \neq 0$, 系统响应为一发散振荡函数;
- 6) 黎曼主平面内有根, 且 $\text{Re}(s) > 0, \text{Im}(s) = 0$, 系统响应为一单调上升函数.

因而只需考虑黎曼主平面内根的分布情况, 就可以判断系统的稳定性. 把黎曼主平面 s 的虚轴和半径 ρ 为无穷的半圆取为闭曲线 Γ_s , 如图2所示, 那么 Γ_s 就扩大为包括虚轴的整个右半 s 平面. 辐角原

理表达式(26)中的 P 和 Z 则分别表示辅助函数 $F(s)$ 位于右半 s 平面的极点数和零点数, 而且 P 也等于 $G(\lambda)$ ($\lambda = s^\alpha$) 在角形区域 $(-\alpha\pi/2, \alpha\pi/2)$ 内的极点数 P . $F(s)$ 曲线绕原点逆时针转过的圈数 R 就是开环传递函数 $G(s)$ 绕 $(-1, j0)$ 逆时针转过的圈数. 此外由于 $n > m$, 当 s 沿 ρ 为无穷的半圆取值时, 通过 $G(s)$ 映射到 $G(s)$ 平面的象是原点, 这也恰好是 s 平面虚轴无穷远点映射到 $G(s)$ 平面的象. 这样, R 就是奈氏曲线(s 沿虚轴 $-j\infty$ 到 $j\infty$ 取值, 频率特性 $G(j\omega)$ 的辐相曲线) 绕临界点 $(-1, j0)$ 转过的圈数. 显然若要闭环系统稳定, 只需 $R = P$; 否则闭环系统不稳定, 且不稳定特征根个数按式(27)确定. 若 $|\arg(\lambda_i)| = \alpha\pi/2$, 则闭环系统临界稳定.

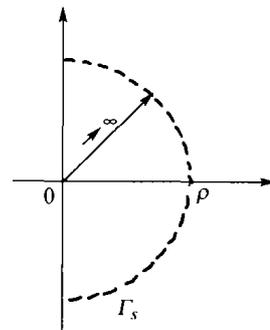


图2 包含右半 s 平面的封闭曲线 Γ_s .

Fig. 2 Closed curve Γ_s containing the half-right plane s .

定理 3(分数阶系统对数频率判据) 分数阶单位反馈系统(见图1)不稳定的根的个数 Z , 可以根据 $G(\lambda)$ ($\lambda = s^\alpha$) 在角形区域 $(-\alpha\pi/2, \alpha\pi/2)$ 内的极点数 P 和开环对数幅频特性为正值的所有频率范围内, 对数相频曲线与 $\pm 180^\circ$ 线的正负穿越数之差 $N = N_+ - N_-$ 确定:

$$Z = P - 2N. \quad (29)$$

若 Z 等于零, 闭环系统稳定; 否则, 不稳定.

证 开环传递函数 $G(s)$ 的对数幅频特性和对数相频特性分别定义为

$$L(\omega) = 20 \log |G(j\omega)| =$$

$$20 \log |Q((j\omega)^\alpha)| - 20 \log |P((j\omega)^\alpha)|, \quad (30)$$

$$\varphi(\omega) = \angle Q((j\omega)^\alpha) - \angle P((j\omega)^\alpha). \quad (31)$$

$G(j\omega)$ 的辐相曲线绕 $(-1, j0)$ 旋转的圈数, 由 ω 增加时幅相曲线自下向上(相角减少)和自上向下(相角增加)穿越实轴区间 $(-\infty, -1)$ 的次数决定. 把自上向下的穿越称为正穿越 N_+ , 自下向上的穿越称为负穿越 N_- , 则

$$N = N_+ - N_-. \quad (32)$$

N_+ 和 N_- 也可以分别看成对数幅频曲线在大于0dB

的频率范围内, 对数相频曲线自下向上地穿越 $\pm 180^\circ$ 线的次数和对数相频曲线自上向下地穿越 $\pm 180^\circ$ 线的次数. 显然若闭环系统稳定, 必成立 $P = 2N$; 否则不稳定, 且不稳定根的个数满足式(29).

5 例子(Example)

例 设系统开环传递函数 $G(s) = \frac{K}{s - 2s^{1/2} + 1}$, 讨论使闭环系统稳定时, K 的取值范围.

令 $G(\lambda) = \frac{K}{\lambda^2 - 2\lambda + 1}$, $\lambda = s^{1/2}$, 则其开环特征多项式

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1.$$

开环极点 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, 显然 $|\arg(\lambda_{1,2})| < \frac{\pi}{4}$, 从而 $G(s)$ 在黎曼主平面内有两个不稳定极点.

图 3~5 分别给出 $K = 0.5, K = 1, K = 2$ 时, $G(s)$ 的奈奎斯特图. 从中可以发现, $K = 0.5$ 时, 奈奎斯特曲线不包含点 $(-1, j0)$, 因而闭环系统不稳定; $K = 1$ 时, 奈奎斯特曲线通过点 $(-1, j0)$, 因而闭环系统处于临界稳定; $K = 2$ 时, 奈奎斯特曲线逆时针绕点 $(-1, j0)$ 旋转 2 圈, 因而闭环系统稳定.

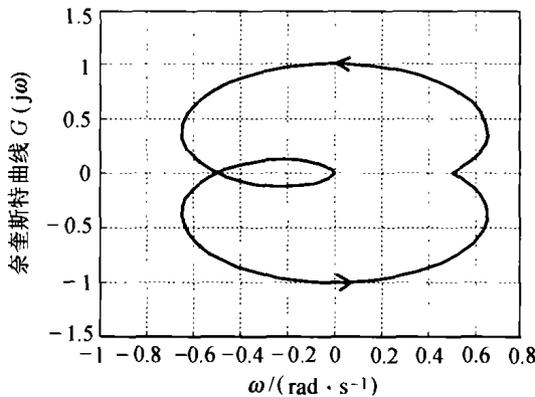


图 3 $K = 0.5$ 时的奈奎斯特路径图
Fig. 3 Nyquist path at $K = 0.5$

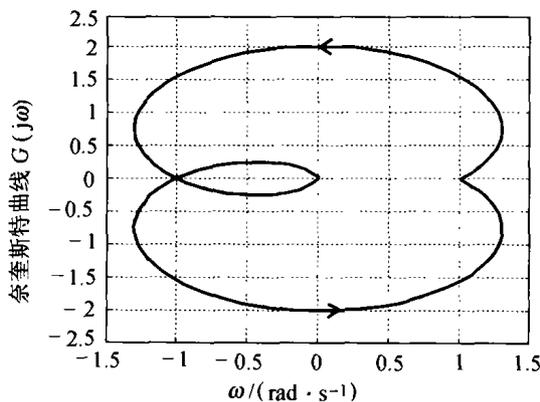


图 4 $K = 1$ 时的奈奎斯特路径图
Fig. 4 Nyquist path at $K = 1$

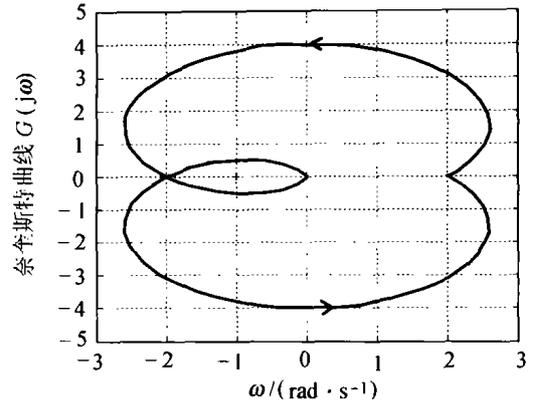


图 5 $K = 2$ 时的奈奎斯特路径图
Fig. 5 Nyquist path at $K = 2$

图 6~8 分别给出了 $K = 0.5, K = 1, K = 2$ 时, $G(s)$ 的伯德图. 从中可以发现, $K = 0.5$ 时, 在对数幅频曲线大于零的频率范围内, 对数相频曲线不穿过 180° 线, 因而闭环系统不稳定; $K = 1$ 时, 在对数幅频曲线大于零的频率范围内, 对数相频曲线恰好穿过 180° 线, 因而闭环系统临界稳定; $K = 2$ 时, 在对数幅频曲线大于零的频率范围内, 对数相频曲线自下向上穿过 180° 线 1 次, $N_+ = 1, N_- = 0, N = N_+ - N_- = 1, Z = P - 2N = 0$, 因而闭环系统稳定.

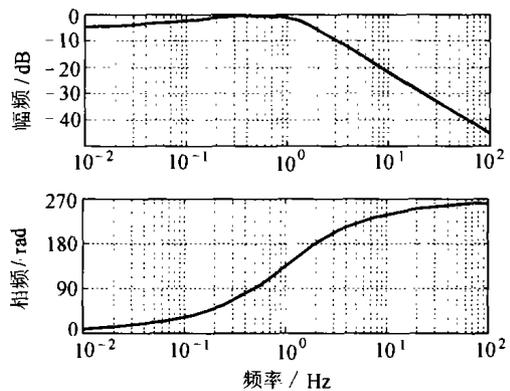


图 6 $K = 0.5$ 时的伯德图
Fig. 6 Bode plots at $K = 0.5$

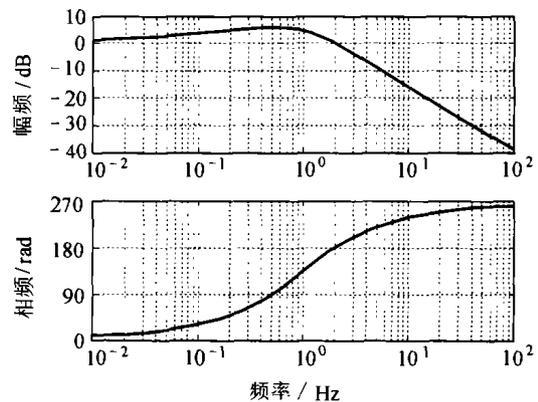


图 7 $K = 1$ 时的伯德图
Fig. 7 Bode plots at $K = 1$

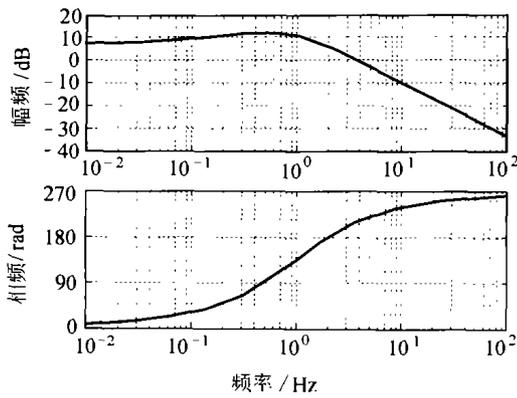


图8 $K = 2$ 时的伯德图
Fig. 8 Bode plots at $K = 2$

从上面的讨论可以看出,这两种判据得出的结果一致.综上所述,当 $K > 1$ 时,闭环系统稳定.

6 结论(Conclusion)

分数阶系统的稳定性分析远比整数阶系统复杂,其中一个重要原因是分数阶系统的传递函数一般不是复变量 s 的有理函数,因而不能运用判断整数阶系统稳定性的 Routh 判据和 Jury 判据来分析分数阶系统的稳定性.本文直接从辐角原理出发推出了两种判断分数阶线性定常系统稳定性判据:分数阶系统奈奎斯特判据和分数阶系统对数频率判据.利用它们不需具体求出分数阶闭环系统的结构特征根就可以知道分数阶闭环系统的稳定性,给出的实例验证了这两种判据的有效性.

参考文献(References):

- [1] PODLUBNY I. Fractional-order systems and -controllers [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1999, 44 (1): 208 - 214.
- [2] PODLUBNY I. *Fractional Differential Equations* [M]. San Diego: Academic Press, 1999: 243 - 260.

- [3] MATIGNON D. Stability results for fractional differential equations with applications to control processing [C]// *Proc of Computational Engineering in Systems and Application Multiconference*. France: IMACS, IEEE-SMC (Systems, Man and Cybernetics), 1996, 2: 963 - 968.
- [4] MATIGNON D, D' ANDRÉA-NOVEL B. Some results on controllability and observability of finite-dimensional fractional differential systems [C]// *Computational Engineering in Systems and Application multiconference*. France: IMACS, IEEE-SMC (Systems, Man and Cybernetics), 1996, 2: 952 - 956.
- [5] OUSTALOUP A. *La Command CRONE* [M]. Paris: Hermes Science, 1991.
- [6] OUSTALOUP A. The great principles of CRONE control [C]// *Systems Engineering in the Service of Humans, Int Conf on Systems, Man and Cybernetics*. Paris: Le Touquet, 1993, 2: 118 - 129.
- [7] 陆庆乐, 王绵森. 工程数学——复变函数[M]. 第4版. 北京: 高等教育出版社, 1996: 172 - 177.
(LU Qingle, WANG Miansen. *Engineering Mathematics-Complex Function* [M]. 4th Edition 4. Beijing: Advanced Education Press, 1996: 172 - 177.)

作者简介:

王振滨 (1973 —), 男, 2001 年于江苏理工大学电气工程系获硕士学位, 现为上海交通大学博士生, 主要研究方向为分数阶系统建模与辨识及熔融碳酸盐型燃料电池的建模与控制, E-mail: wzb123@sjtu.edu.cn;

曹广益 (1941 —), 男, 上海交通大学电子信息与电气工程学院教授, 博士生导师, 燃料电池研究所所长, 1964 年于上海交通大学电子信息学院自动化系毕业, 1997 年获日本工学博士, 主要研究方向为燃料电池的建模与动态分析和机器人控制理论研究, 国内外发表学术论文 80 余篇, 出版学术专著 3 部, E-mail: gycao@sjtu.edu.cn;

朱新坚 (1958 —), 男, 上海交通大学电子信息与电气工程学院自动化系教授, 博士生导师, 燃料电池研究所副所长, 1995 年于上海交通大学自动化系获博士学位, 1997 年上海交通大学机械学院博士后出站, 主要研究方向为燃料电池的建模与动态分析, 国内外发表学术论文 70 余篇, E-mail: xjzhu@sjtu.edu.cn.