

关于耦合混沌系统完全同步的参数选择

闵富红^{1,2}, 王执铨¹

(1. 南京理工大学 自动化系, 江苏 南京 210094; 2. 南京师范大学 电气与电子工程学院, 江苏 南京 210042)

摘要: 以系统的瞬间特征值作为高质量同步的指标, 讨论了两个耦合的混沌系统完全同步时参数选择的问题. 当运用线性定常系统稳定性的理论判定耦合后混沌吸引子的线性化同步系统的瞬间特征值时, 即使其处处有负实部, 混沌完全同步也会失去. 但是, 使用线性时变连续系统的稳定性理论分析其瞬间特征值, 给出耦合函数参数的选择范围, 耦合的混沌吸引子完全同步的状态就能够达到稳定. 将该分析方法分别应用于 Rössler 和 Lorenz 混沌系统, 通过数值仿真, 发现其结果与理论分析相符, 从而表明了该分析方法的有效性.

关键词: 混沌; 完全同步; 瞬间特征值; 线性时变系统

中图分类号: TP391

文献标识码: A

Parameter selection in complete synchronization for coupled chaotic system

MIN Fu-hong^{1,2}, WANG Zhi-quan¹

(1. Department of Automation, Nanjing University of Science & Technology, Nanjing Jiangsu 210094, China;

(2. College of Electronic and Electrical Engineering, Nanjing Normal University, Jiangsu Nanjing 210042, China)

Abstract: The instantaneous eigenvalues are used as indicators of complete synchronization quality in coupled chaotic system. Unfortunately, the synchronization is lost when the stability's criterion of linear constant coefficient system is employed, even if the eigenvalues of the linearized synchronization dynamics have negative real parts everywhere on the attractor. However, by using the criterion of the stability of time-varying systems, the synchronization state is stable when the range of the parameters in a vector coupling function is given. Moreover, the analytic method is tested in coupled Rössler and Lorenz system, and the numerical results demonstrate the effectiveness of the theoretical analysis.

Key words: chaos; complete synchronization; instantaneous eigenvalues; time-varying systems

1 引言 (Introduction)

近年来, 混沌的研究是科学界热点问题之一, 而混沌控制由于其在通讯、信息科学、生物、工程等领域中的巨大潜力和发展前途, 已经引起了国内外科研工作者的广泛关注. 混沌控制的含义非常广泛, 包括混沌的诱导与控制. 混沌完全同步是一种特殊的混沌系统控制问题, 由于混沌同步在保密通讯、信号处理和生命科学等方面有着十分广泛的应用前景, 近年来人们提出了许多混沌同步的方法^[1~3], 为使混沌同步能够得到更好的应用, 也为了保证有高质量的同步, 对混沌同步条件的研究同样重要, 已经受到人们的重视. 对于耦合的两个相同的混沌吸引子, 确定完全同步状态稳定的条件, 通常是计算响应系统的李亚谱诺夫指数, 如果所有指数都是负的, 则说

明两个系统同步. 但是, 由于混沌吸引子的局部不稳定性, 这个条件并不能够总是保证有高质量的同步, 因此人们使用驱动-响应系统的瞬间特征值来描述系统同步存在时的条件^[4]. 显然, 对于线性定常系统来说, 如果两个混沌吸引子的线性化同步的系数矩阵的特征值处处都具有负实部, 可以确保两个混沌系统完全同步. 但是, 对于时变系统, 则不能运用线性定常运动理论来判定^[5,6]. 文献[5,6]中说明了两个耦合的混沌系统, 以其瞬间特征值作为系统同步的指标, 用线性定常系统的理论来分析, 得到的参数取值, 并不能确定混沌系统会完全同步, 而且举例说明了混沌系统同步状态的失去. 但是, 并没有进一步解决在这种情况下, 耦合的混沌系统完全同步存在的条件. 本文运用了线性时变系统的稳定性理论^[7,8]

分析瞬间特征值,给出了混沌系统完全同步存在时的充分条件,则两个耦合的混沌系统的误差系统渐进稳定.数值仿真结果表明,将该方法应用于两个耦合的 Rössler 和两个耦合的 Lorenz 混沌系统,得到了令人满意的结果,实现了两个耦合的混沌系统之间的完全同步.

2 问题的描述(Description of issue)

考虑两个相同结构的耦合混沌系统,设驱动系统为

$$\ddot{u} = f(u). \quad (1)$$

其中, $u = u(t)$ 是驱动系统的向量, f 是混沌流形上的非线性向量函数.并假定系统(1)呈现混沌状态.设耦合后的响应系统为

$$\ddot{v} = f(v) + (g(u) - g(v)). \quad (2)$$

其中, $v = v(t)$ 是响应系统的状态向量, g 是耦合向量函数,可以是线性的也可以是非线性的. $g(u)$ 可以看作是从驱动系统到响应系统的传输信号.当两个系统实现完全同步时,有 $v(t) = u(t)$.为了更好地研究混沌系统完全同步时的稳定性,定义误差信号

$$\varepsilon = v - u, \quad (3)$$

那么,误差系统为

$$\ddot{\varepsilon} = (f(v) - f(u)) - (g(v) - g(u)). \quad (4)$$

当系统同步时只有很小的微扰,可将误差动态系统线性化,表示成如下的微分方程:

$$\ddot{\varepsilon} = J\varepsilon. \quad (5)$$

其中

$$J = Df(u) - Dg(u). \quad (6)$$

$Df(u)$ 和 $Dg(u)$ 分别是 f 和 g 沿着驱动系统的混沌轨迹 $u(t)$ 的偏微分.可见,驱动-响应系统的系数矩阵(6)是随时间变化的,同步状态的稳定性不能够立即确定.为了确保高质量的同步,假定系数矩阵的瞬间特征值处处具有负实部.但是,用线性定常系统的稳定性作为瞬间特征值的判据,给出的参数选择范围,不能够确保混沌系统同步.下面考虑用线性时变连续系统理论来分析瞬间特征值,使其处处具有负实部,从而给出了两个耦合混沌系统完全同步时的充分条件.

2.1 线性时变连续系统的稳定性判别方法^[8] (Discriminative method of stability's theory in linear time-varying continuous systems)

这里先介绍一下线性时变系统的稳定性判别方法,为后面分析实际的线性时变系统做准备.对于线性时变系统的稳定性,应用了导数不连续的 V 函数结合比较原理,把高维时变系统的稳定性判定,简

化为低维定常辅助方程组稳定性判定(其中省略了子系统稳定的假定条件),减弱了时变大系统的稳定性条件.

定义^[8] 泛函数 $\varphi_i(x_i, \dot{x}_i)$ 由下式定义:

$$\varphi_i(x_i, \dot{x}_i) = \begin{cases} 1, & x_i > 0 \text{ 或 } x_i = 0, \dot{x}_i > 0; \\ 0, & x_i = 0, \text{ 且 } \dot{x}_i = 0; \\ -1, & x_i < 0, \text{ 或 } x_i = 0, \dot{x}_i < 0. \end{cases} \quad (7)$$

考虑具有如下形式的三阶线性时变系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + a_{13}(t)x_3, \\ \dot{x}_2 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + a_{23}(t)x_3, \\ \dot{x}_3 = a_{31}(t)x_1 + a_{32}(t)x_2 + a_{33}(t)x_3. \end{cases} \quad (8)$$

假设其系数 $a_{ij}(t)$ 都连续有界,且设 $a_{ii}(t) \leq -a < 0 (i = 1, 2, 3), \forall t \geq t_0$, 将系数矩阵 $A(t)$ 进行 2×2 分块.

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) \\ A_{21}(t) & A_{22}(t) \end{pmatrix}. \quad (9)$$

令

$$\begin{aligned} b_{11} &= \sup_{t_0 \leq t < +\infty} \{ |a_{11}(t)| + |a_{21}(t)|, |a_{22}(t)| + |a_{12}(t)| \}, \\ b_{12} &= \sup_{t_0 \leq t < +\infty} \{ |a_{13}(t)|, |a_{23}(t)| \}, \\ b_{21} &= \sup_{t_0 \leq t < +\infty} \{ |a_{31}(t)|, |a_{32}(t)| \}, \\ b_{22} &= \sup_{t_0 \leq t < +\infty} \{ |a_{33}(t)| \}, \\ B &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (10)$$

选取时变系统(8)的李雅普诺夫函数

$$V_1 = |x_1| + |x_2|, \quad V_2 = |x_3|,$$

则有

$$\begin{aligned} D^+ V_1 &= \varphi_1 \dot{x}_1 + \varphi_2 \dot{x}_2 = \\ &\varphi_1(a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + a_{13}(t)x_3) + \\ &\varphi_2(a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + a_{23}(t)x_3) \leq \\ &(|a_{11}(t)| + |a_{21}(t)|)|x_1| + (|a_{12}(t)| + |a_{22}(t)|)|x_2| + (|a_{13}(t)| + |a_{23}(t)|)|x_3| \leq \\ &b_{11}(|x_1| + |x_2|) + b_{12}|x_3| = b_{11}V_1 + b_{12}V_2, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} D^+ V_2 &= \varphi_3 \dot{x}_3 = \\ &\varphi_3(a_{31}(t)x_1 + a_{32}(t)x_2 + a_{33}(t)x_3) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & |a_{31}(t)| |x_1| + |a_{32}(t)| |x_2| + |a_{33}(t)| |x_3| \leq \\ & b_{21}(|x_1| + |x_2|) + b_{22}|x_3| = b_{21}V_1 + b_{22}V_2. \end{aligned} \quad (12)$$

考虑辅助方程

$$\begin{cases} \dot{V}_1^* = b_{11}V_1^* + b_{12}V_2^*, \\ \dot{V}_2^* = b_{21}V_1^* + b_{22}V_2^*. \end{cases} \quad (13)$$

如果辅助方程(13)的系数满足:

- 1) $b_{11} \leq -\beta < 0, b_{22} \leq -\beta < 0, \beta$ 是正常数;
- 2) 所有的特征根都有负实部.

则系统(13)之零解渐进稳定.

引理^[8] B 是一个有负的对角元素, 而所有其他元素为非负的矩阵. 若 $x(t; x_0, t_0)$ 及 $y(t; x_0, t_0)$ 是 $\dot{x} \leq Bx, \dot{y} = By$ 的解, 并且 $x_0 = y_0$, 则对所有 $t_0 \leq t < \infty$, 不等式 $x(t; x_0, t_0) \leq y(t; y_0, t)$ 成立.

由以上的引理知

$$\begin{cases} V_1(t; V_1^0, t_0) \leq V_1^*(t; V_1^0, t_0), \\ V_2(t; V_2^0, t_0) \leq V_2^*(t; V_2^0, t_0), \end{cases} \quad (14)$$

故有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V_1(t; V_1^0, t_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} V_2(t; V_2^0, t_0) = 0,$$

而 $V_1 = |x_1| + |x_2|, V_2 = |x_3|$, 所以 $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0 (i = 1, 2, 3)$, 即线性时变(9)系统是渐进稳定的.

2.2 实例分析与仿真 (Analysis example and simulation)

以两个耦合的 Rössler 和两个耦合的 Lorenz 混沌系统为例, 分别用线性定常系统的稳定性和线性时变系统的稳定性判据, 来分析两个混沌系统的线性化误差系统的系数矩阵的瞬间特征值, 给出耦合函数的参数选择范围, 再从仿真结果进行比较, 进一步说明理论分析的正确性.

首先, 考虑具有如下相同结构的两个 Rössler 混沌系统(只是初始值不同):

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y - z \\ x + 0.2y \\ 0.2 + z(x - 4.5) \end{pmatrix}. \quad (15)$$

设两个 Rössler 混沌系统的耦合函数为

$$g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z + ax \\ b(y - x) - cx^2 \\ y + z(x - 3.5) \end{pmatrix}. \quad (16)$$

其中, a, b, c 为耦合函数的参数. 则相应于式(6)的系数矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} -a & -1 & 0 \\ 1 + b + 2cx & 0.2 - b & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

可见, 系数矩阵(17)是时变的, 其特征值随着 x 变化而变化.

若用线性定常系统的稳定性来判定, 只需要特征值到处都有负实部, 误差系统就应该渐进稳定. 通过计算其特征值为

$$\begin{cases} \lambda_1 = -1, \\ \lambda_{2,3} = -\frac{1}{2}(a + b - 0.2) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(a + b - 0.2)^2 - (ab - 0.2a + (1 + b + 2cx))}. \end{cases} \quad (18)$$

在 Rössler 混沌吸引子中 $x \in (-8, 8)$, 总可以选择合适的参数, 满足式(18), 使得系数矩阵的特征值具有负实部. 如选参数为 $a = 0, b = 0.3, c = 0.08125$, 用四阶龙格库塔法对其进行仿真, 两个系统的初始值分别为 $(0.5, -2, 0.1)$ 和 $(0.01, 0.01, 0)$. 结果如图 1(a) ~ (c) 所示. 图 1(a), (b) 分别为驱动系统和响应系统的混沌吸引子, 两者并不同步; 图 1(c) 表示两个耦合的 Rössler 系统在 x 方向的偏差. 可见, 随着时间的变化, 两个混沌系统同步失去了, 时间再延长, 其偏差将会呈指数发散.

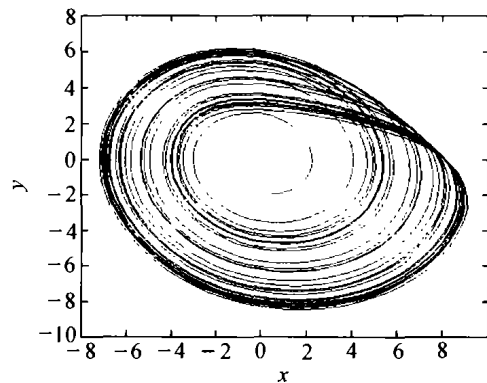


图 1(a) 驱动系统的混沌吸引子

Fig. 1(a) Attractor of the drive system

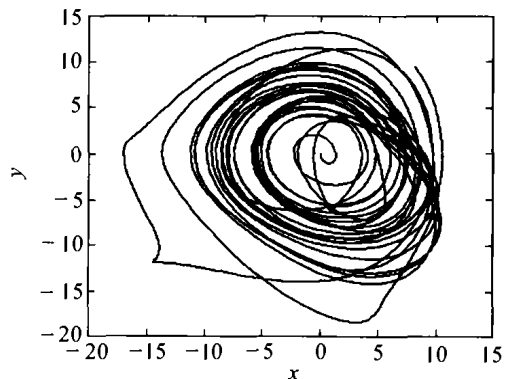


图 1(b) 响应系统的混沌吸引子

Fig. 1(b) Attractor of the response system

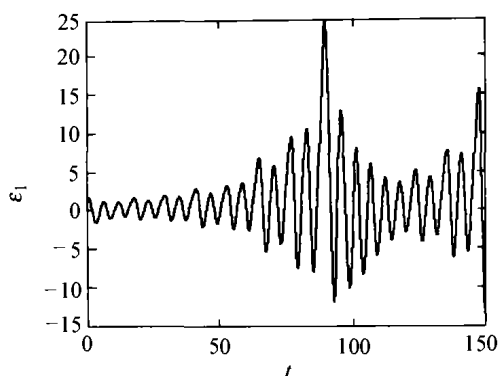


图 1(c) 耦合混沌系统的偏差 (\$\epsilon_1 = x_1 - x_2\$)

Fig. 1(c) Difference of the coupled chaotic system (\$\epsilon_1 = x_1 - x_2\$)

下面运用线性时变系统的稳定性理论分析以上系数矩阵的瞬间特征值,系数矩阵(17)写成具有系统(8)的形式的线性时变系统为

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_1 = -a\epsilon_1 - \epsilon_2, \\ \dot{\epsilon}_2 = (1+b+2cx)\epsilon_1 + (0.2-b)\epsilon_2, \\ \dot{\epsilon}_3 = -\epsilon_2 - \epsilon_3, \end{cases} \quad (19)$$

那么有

$$b_{11} = \sup_{0 \leq t < +\infty} \{-a + |1+b+2cx|, 0.2-b+1\}, \\ b_{12} = 0, b_{21} = 1, b_{22} = -1.$$

构造如下的辅助方程:

$$\dot{V}_1^* = b_{11}V_1^*, \dot{V}_2^* = V_1^* - V_2^*,$$

求出辅助方程的特征根为 \$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = b_{11}\$。根据以上线性时变系统的稳定性理论,只要满足条件:

- 1) \$b_{11} \leq -\beta < 0, b_{22} = -1 \leq -\beta < 0, \beta\$ 是正常数;
- 2) 所有的特征根都有负实部,即

$$\lambda_1 = -1 < 0, \lambda_2 = b_{11} < 0.$$

则误差系统(19)一定稳定.可见,只要选择合适的参数能够满足以上的不等式.选参数 \$a = 4, b = 1.3, c = 0.08125\$ 进行仿真.仿真结果如图 2(a), (b) 所示.图 2(a) 表示驱动-响应系统的混沌吸引子,尽管它们的初始值不同,却很快达到了完全同步.图 2(b) 反映了驱动系统与响应系统在 \$x\$ 方向的偏差.可见随着时间的变化,偏差快速地收敛到零.

其次,考虑初始值不同的结构相同的两个 Lorenz 混沌系统

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10(y-x) \\ x(28-z)-y \\ xy - \frac{8}{3}z \end{pmatrix}. \quad (20)$$

设耦合函数为

$$g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10y - ax - z^2 \\ x(27-z) \\ x(y+b) - cz \end{pmatrix}. \quad (21)$$

\$a, b, c\$ 为耦合函数的参数,相应于式(6)的系数矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} a-10 & 0 & 2z \\ 1 & -1 & 0 \\ -b & 0 & c-\frac{8}{3} \end{pmatrix}. \quad (22)$$

式(22)的系数矩阵是时变的,其特征值随着 \$z\$ 变化而变化.

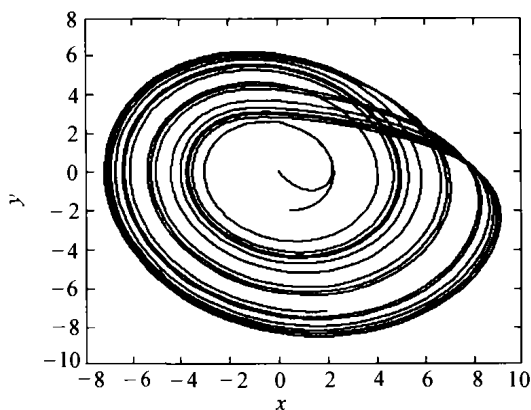


图 2(a) 驱动-响应系统的混沌吸引子

Fig. 2(a) Attractor of the drive-response system

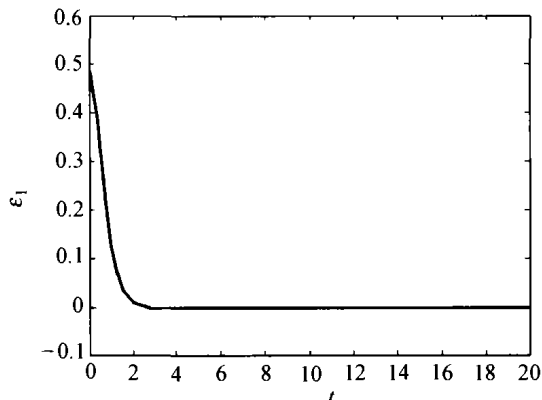


图 2(b) 耦合混沌系统完全同步实现时的偏差 (\$\epsilon_1 = x_1 - x_2\$)

Fig. 2(b) Difference of the complete synchronization in the coupled chaotic system (\$\epsilon_1 = x_1 - x_2\$)

先用线性定常系统的稳定性判别方法,即需要特征值到处都有负的实部,误差系统就应该渐进稳定.计算式(22)的特征值为

$$\begin{cases} \lambda_1 = -1, \\ \lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \left(a + c - \frac{38}{3} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(a + c - \frac{38}{3} \right)^2 \left(ac - 10c - \frac{8}{3}a + \frac{80}{3} + 2bz \right)}. \end{cases} \quad (23)$$

因为 Lorenz 混沌吸引子中 \$z > 0\$, 所以总可以选择合适的参数,使得系数矩阵的特征值具有负实部.不妨选参数为 \$a = 9.95, b = 1.445, c = 2.6167\$, 用四阶龙格库塔法对其进行仿真,初始值分别为 \$(2, 0.01, 0.1)\$

和(0.01,0.1,0.2).结果如图3(a)~(c)所示.可见,随着时间的变化,两个混沌系统同步失去了.

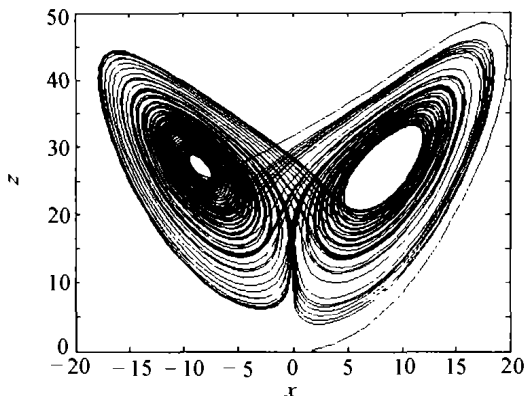


图 3(a) 驱动系统的混沌吸引子
Fig. 3(a) Attractor of the drive system

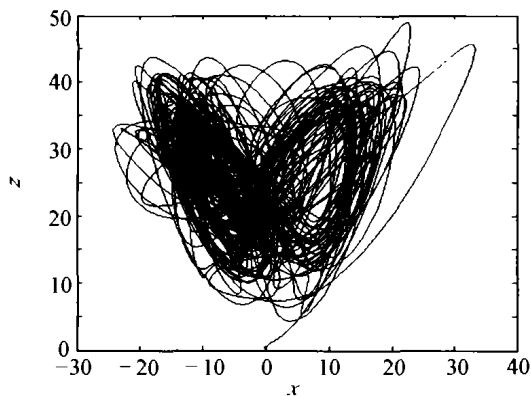


图 3(b) 响应系统的混沌吸引子
Fig. 3(b) Attractor of the response system

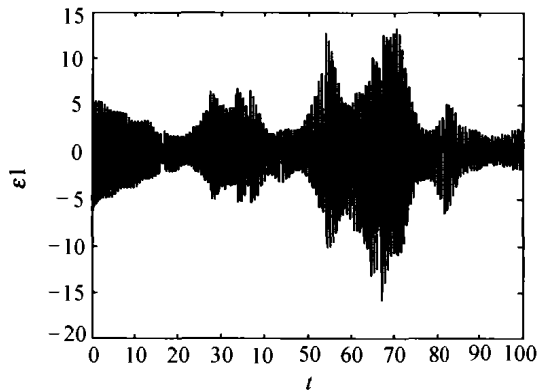


图 3(c) 耦合混沌系统的偏差 ($\epsilon_1 = x_1 - x_2$)
Fig. 3(c) Difference of the coupled chaotic system ($\epsilon_1 = x_1 - x_2$)

接下去,运用线性时变系统的稳定性理论判别方法来分析以上系数矩阵的瞬间特征值,系数矩阵(22)写成如下形式的线性时变系统:

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_1 = (a - 10)\epsilon_1 + 2z\epsilon_2, \\ \dot{\epsilon}_2 = -b\epsilon_1 + (c - 8/3)\epsilon_2, \\ \dot{\epsilon}_3 = \epsilon_1 - \epsilon_3, \end{cases} \quad (24)$$

那么有

$$b_{11} = \sup_{0 \leq t < +\infty} |a - 10 + |b||, c - 8/3 + |2z||, \\ b_{12} = 0, b_{21} = 1, b_{22} = -1.$$

以下分析与 Rössler 混沌系统耦合同步的分析雷同,这里省略.只要选择合适参数满足线性时变系统的稳定性条件,就可以使得耦合的两个初值不同的 Lorenz 混沌系统实现完全同步.设参数 $a = 5$, $b = 1.445$, $c = -25$, 进行仿真,仿真结果如图 4(a),(b)所示.

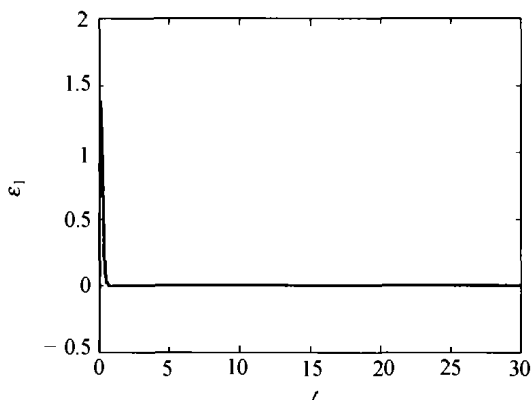


图 4(a) 耦合混沌系统完全同步实现时的偏差
Fig. 4(a) Difference of complete synchronization in the coupled chaotic system

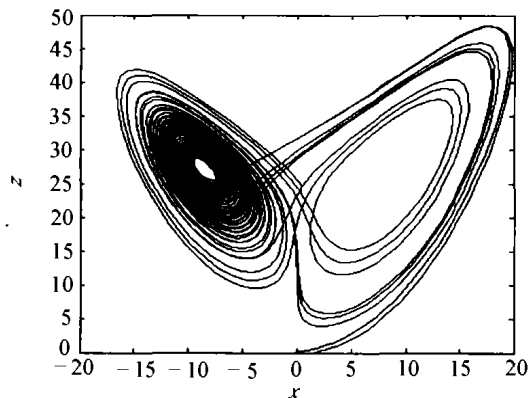


图 4(b) 驱动-响应系统的混沌吸引子
Fig. 4(b) Attractor of the drive-response system

3 结论 (Conclusion)

分别讨论了耦合的两个混沌系统完全同步时的参数选择问题,说明了运用线性定常系统的稳定性来确定两个混沌系统的线性化误差系统的瞬间特征值具有负实部,并不能够确保两个相同的混沌系统具有高质量的完全同步.但是,当使用线性时变系统的稳定性分析其瞬间特征值时,给出耦合函数参数的选择范围,就能够实现两个耦合混沌系统的完全同步.至于耦合的混沌系统完全同步存在的必要条件,还有待于研究.只有混沌系统同步质量的提高,混沌同步才能够得到更广泛的应用.

参考文献(References):

- [1] PECORA L M, CARROLL T L. Synchronization in chaotic systems [J]. *Physical Review Letters*, 1990, 64(4): 821 - 825.
- [2] WANG C, GE S S. Adaptive synchronization of uncertain chaotic systems via backstepping design [J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2001, 12(6): 1199 - 1206.
- [3] AGIZA H N, YASSEN M T. Synchronization of Rossler and Chen chaotic dynamical systems using active control [J]. *Physics Letters A*, 2001, 278(1): 191 - 197.
- [4] BLAKELY J N, GAUTHIER D, JOHNSON G, et al. Experimental investigation of high-quality synchronization of coupled oscillators [J]. *Chaos*, 2000, 10(3): 738 - 744.
- [5] CORRON N J. Loss of synchronization in coupled oscillators with ubiquitous local stability [J]. *Physical Review E*, 2001, 63(4): 5203 - 4.
- [6] YANCHUK S, MAISTRENKO Y, MOSEKILDE E. Loss of synchronization in coupled Rossler systems [J]. *Physics D*, 2001, 154(1): 26

- 42.

- [7] LIU Yongqing, LIU Jinxian. The stability of linear time-dependent continuous large-scale systems [J]. *Advances in Modeling and Simulation*, 1987, 9(2): 29 - 37.
- [8] 刘永清, 宋中昆. 大型动力系统的理论与应用——分解、稳定与结构[M]. 广州: 华南理工大学出版社, 1988.
(LIU Yongqing, SONG Zhongkun. *Theory and application of large-scale dynamic systems: Decomposition Stability and Structure* [M]. Guangzhou: South China University of Technology Press, 1988.)

作者简介:

闵富红 (1970 —), 女, 南京师范大学教师电气与电子工程学院讲师, 现在南京理工大学自动化系攻读博士学位, 目前研究方向为混沌控制、非线性控制等, E-mail: minfuhong@njnu.edu.cn;

王执铨 (1939 —), 男, 南京理工大学自动化系, 教授, 博士生导师, 主要从事动态大系统的建模以及混沌控制等方面的研究, E-mail: whzwzq@mail.njust.edu.cn.

(上接第 934 页)

- [3] LANDA P S, PERMINOV S M. Interaction of periodic and stochastic self-oscillating system [J]. *Electron*, 1985, 28(4): 285 - 287.
- [4] ANISCHENKO V S, VADIVASOVA T E, POSTNOV D E, et al. Synchronization of chaos [J]. *Int J of Bifurcation and Chaos*, 1992, 2(3): 633 - 644.
- [5] BLEKHMANN I I, LANDA P S, ROSENBLUM M G. Synchronization and chaotization in interacting dynamical systems [J]. *Applied Mechanics Review*, 1995, 48(11): 733 - 752.
- [6] ROSENBLUM M G, PIKOVSKY A S, KURTHS J. Phase synchronization in driven and coupled chaotic oscillators [J]. *IEEE Trans on Circuits and Systems - I*, 1997, 44(10): 874 - 881.
- [7] ROSENBLUM M G, PIKOVSKY A S, KURTHS J. Phase synchronization in chaotic oscillators [J]. *Physical Review Letters*, 1996, 76(11): 1804 - 1807.
- [8] ZAKS M, PARK E, KURTHS J. On phase synchronization by periodic force in chaotic oscillators with saddle equilibria [J]. *Int J of Bifurcation and Chaos*, 2000, 10(11): 2649 - 2667.
- [9] ZAKS M, PARK E, ROSENBLUM M G, et al. Alternating locking ratios in imperfect phase synchronization [J]. *Physical Review Letters*, 1999, 82(43): 4228 - 4231.
- [10] BI Qinsheng, DAI Huihui. Analysis of nonlinear dynamics and bifurcations of a show arch subjected to periodic excitation with internal resonance [J]. *J of Sound and Vibration*, 2000, 233(4): 557 - 571.
- [11] BI Qinsheng, YU Pei. Double Hopf bifurcations and chaos of a nonlinear vibration system [J]. *Nonlinear Dynamics*, 1999, 19(4): 294 - 317.

- [12] BI Qinsheng. Dynamics of dynamical analysis of two coupled parametrically excited van der Pol oscillators [J]. *Int J of Nonlinear Mechanics*, 2004, 39(1): 33 - 54.
- [13] ROSENBLUM M G, PIKOVSKY A S, KURTHS J. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators [J]. *Physical Review Letters*, 1997, 78(22): 4193 - 4196.
- [14] SCHAFER C S, ROSENBLUM M G, KURTHS J, et al. Heartbeat synchronized with ventilation [J]. *Nature*, 1998, 392(19): 239 - 240.

作者简介:

毕勤胜 (1968 —), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 先后在加拿大、美国、香港、德国等从事合作研究, 在非线形动力学、控制理论及其应用等方面发表论文近 40 余篇, 其中在国际刊物上发表论文近 20 篇, 目前作为项目负责人承担国家自然科学基金两项, 省部级基金两项, E-mail: qbi@ujs.edu.cn;

邹勇 (1978 —), 男, 2004 年 3 月江苏大学理学院硕士毕业, 目前在德国 Potsdam 大学攻读博士学位, 导师是 Juergen Kurths 教授;

刘曾荣 (1946 —), 男, 教授, 博士生导师, 在国内外发表学术论文 100 多篇, 在非线形动力系统理论及其应用等领域做了大量的开拓性工作, 曾获江苏科技进步一等奖, 上海市科技科技进步二等奖;

陈关荣 (1948 —), 男, 博士, IEEE Fellow, 香港城市大学电子工程学系讲座教授, 香港城市大学混沌控制和同步学术研究中心主任, 已发表期刊论文 250 篇, 出版著作 14 部, 目前主要从事混沌控制和同步研究工作。