

基于向量图分析的迭代学习控制非线性算法

谢胜利¹, 田森平², 谢振东¹

(1. 华南理工大学 无线电与自动控制研究所, 广东 广州 510640; 2. 华南理工大学 自动化学院, 广东 广州 510640)

摘要: 打破多年来人们一直囿于 Arimoto 的思路, 另辟途径寻找新的迭代学习控制的研究方法, 以期构架迭代学习控制的几何理论. 基于数学的几何方法, 通过对通常算法所构成的向量图进行分析, 获得了一类快速的迭代学习控制新算法, 然后对这种新结构的算法在理论上进行了完整的收敛性分析. 这类新算法与目前所有迭代学习控制算法不同, 具有非线性结构. 仿真结果表明了该类算法的有效性与优越性.

关键词: 迭代学习控制; 向量图分析; 非线性算法

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Iterative learning control nonlinear algorithms based on vector plots analysis

XIE Sheng-li¹, TIAN Sen-ping², XIE Zhen-dong¹

(1. Institute of Radio and Automatic Control, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China;

2. College of Automation, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China)

Abstract: A new approach to seek the research method of the iterative learning control is proposed, which is completely different from Arimoto's idea. The purpose of the attempt is to establish the geometrical theory of iterative learning control. Based on the mathematical geometrical analysis, this paper obtains a class of new fast algorithms of iterative learning control by analyzing the vector plots of the basic algorithms. Then, for the new structure of algorithms, a complete theoretical analysis of convergence is given. The new algorithm is different from the algorithms of iterative learning control proposed recently, and is with nonlinear structure. Simulations illustrate the effectiveness and superiority of the new algorithms.

Key words: iterative learning control; vector plots analysis; nonlinear algorithm

1 引言 (Introduction)

迭代学习控制方法自 Arimoto^[1]在研究机器人系统轨道跟踪问题时提出至今, 一直受到控制界的广泛关注. 其各种研究方法和相应的算法^[2~6]以及应用范围^[7~10]在不断涌现和扩大, 目前的这些研究方法及其相应的算法虽各自有着自己的特点和优势, 但都是沿着 Arimoto 当年所提算法

$$u_{k+1} = u_k + Le_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

演化而成, 全属“线性算法”类型. 该类算法的主要优点是具备较好的稳定性能, 而最大的劣势是收敛性能存在着较大的保守性. 在自适应滤波中非线性算法能有效地提高算法的收敛速度而缩短滤波时间, 人们自然会提出, “迭代学习控制存不存在相应的非线性算法?”, “如何有效地避免非线性算法陷入无限

循环而影响算法的收敛性”等问题.

本文针对以上问题进行了探索, 避开 Arimoto 初提算法的原始思想, 另寻途径, 采用几何分析的方法, 对基本算法所构成的向量图进行分析, 提出了一类非线性算法. 由于该类算法是基于向量图的几何分析, 它总是沿着收敛的方向在进行较快速的调整, 故可有效地避免算法陷入无限循环的情形.

2 向量图分析及其算法结构 (Analysis of vector charts and structure of the algorithm)

考虑线性控制系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} \quad t \in [0, T]. \quad (2)$$

其中, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^l$, A, B, C, D 是相应阶数的不确定矩阵. 考虑线性控制系统只是为了叙述

的方便,对一般形式的非线性控制系统可完全类似地进行讨论.

对于预先给定的系统理想输出 $y_d(t)$, 通常用如下的学习算法来寻找系统的控制输入 $u_d(t)$:

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + Le_k(t), \quad t \in [0, T], \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

其中, $e_k(t) = y_d(t) - y_k(t)$, 而 $y_k(t)$ 是系统(2)对应于输入 $u_k(t)$ 的输出, L 是待定的学习增益矩阵. 若由式(3)所确定的输入序列 $\{u_k(t)\}$ 收敛, 则其极限 $u^*(t)$ 就是要寻求的控制输入 $u_d(t)$.

为了寻找到更为有效的快速收敛算法, 本文将采用几何的方法来进行分析. 由算法(3), 可以得到与之相应的几何向量图, 如图1所示.

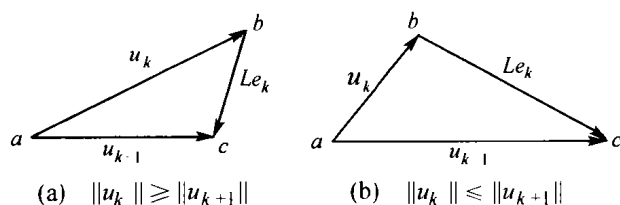


图1 向量分析图

Fig. 1 Graph of vector analysis

从图1中可以看出, 调整的目的就是要使得 $\|Le_k\|$ 逐渐变小, 以使 b, c 两端点非常接近. 先考虑图1(a)的情形. 为此, 过 b 点作 $\vec{ab}$ 的垂线 l , 希望新的下一步被调整的 $\hat{u}_{k+1}$ 的端点 d 在 l 上滑动, 这样便能使得, 当 $\|Le_k\|$ 较小时, $\|\hat{u}_{k+1}\| - \|u_k\|$ 也较小, 如图2所示.

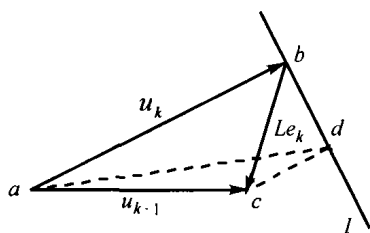


图2 向量分析图

Fig. 2 Graph of vector analysis

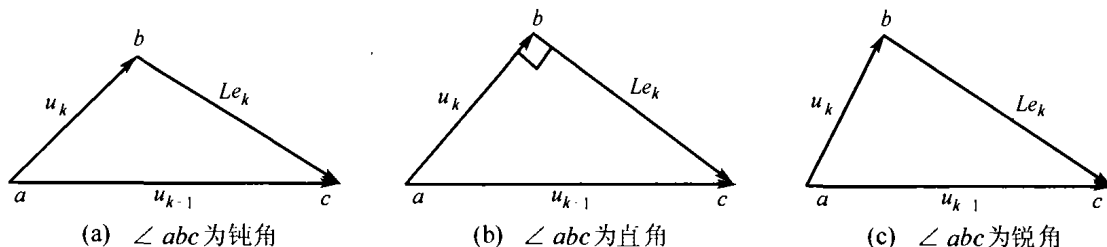


图3 向量分析图

Fig. 3 Graph of vector analysis

要实现以上设想, 必须解决两个问题: 一是直线 l 的描述(而且只能利用第 k 步的信息); 二是 d 点的确定.

由于 $u_k^T \left(Le_k - \frac{u_k^T Le_k}{u_k^T u_k} u_k \right) = 0$, 故 $G = \left(Le_k - \frac{u_k^T Le_k}{u_k^T u_k} u_k \right)$ 与 u_k 垂直, 从而可取 $l = G$.

若在 l 上确定了点 d , 并记 $\hat{e}_k = \vec{bd}$, 则新的算法应是

$$\hat{u}_{k+1} = u_k + \hat{e}_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

选取

$$\hat{e}_k = Le_k - \frac{u_k^T Le_k}{u_k^T u_k} u_k, \quad (5)$$

则由式(3)~(5)可得

$$\hat{u}_{k+1} - u_{k+1} = - \frac{u_k^T Le_k}{u_k^T u_k} u_k. \quad (6)$$

从式(6)可知, d 点在 l 上的选择应该使得 $\vec{cd} \parallel u_k$, 于是在图1(a)的情形下, 可得新的算法结构为

$$u_{k+1} = u_k + Le_k - \frac{u_k^T Le_k}{u_k^T u_k} u_k. \quad (7)$$

再考虑图1(b)(即 $\|u_k\| < \|u_{k+1}\|$) 的情形. 此时有如下3种可能: 1) $\angle abc$ 为钝角; 2) $\angle abc$ 为直角; 3) $\angle abc$ 为锐角. 见图3.

先看 $\angle abc$ 为钝角的情形, 即图3(a)的情形. 若按以上方法, 则可得到图4(a).

因 $\vec{cd} \parallel u_k$, 则 $\triangle bdc$ 为直角三角形, 故有 $|\vec{bd}| < |\vec{bc}|$. 此时新的算法结构仍可取为式(7)的形式.

再看 $\angle abc$ 为锐角的情形, 即图3(c)的情形. 同前理, 可得到图4(b), 由于 $\triangle bdc$ 为直角三角形, 故有 $|\vec{bd}| < |\vec{bc}|$. 此时新的算法结构仍可取为式(7)的形式.

最后看 $\angle abc$ 为直角的情形, 即图3(b)的情形. 此时点 d 与 c 点是重合的, 从而 $|\vec{bd}| = |\vec{bc}|$. 在这种情况下, 仍取通常的算法结构(3).

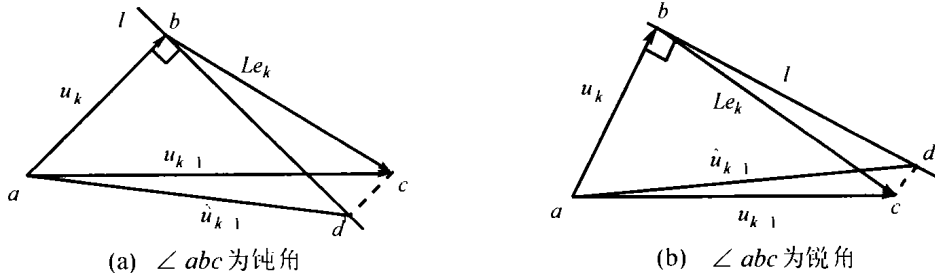


图4 向量分析图

Fig. 4 Graph of vector analysis

通过以上分析,将各种情况综合后,可得到如下新的算法结构:

$$u_{k+1} = u_k + Le_k - \sigma \frac{u_k^T Le_k}{u_k^T u_k} u_k, \quad (8)$$

其中, $\sigma = 0, 1$.

但是在迭代的过程中,图2和图3所对应的各种情形可能是在交替进行,且交替中有一个渐近的过渡.这样要用形如式(8)的算法结构刻画相应的迭代过程,参数 σ 应是一个变化因子.根据前面的分析,缩小 $\|Le_k\|$ 是本文的目的,故可选取 $\sigma = \sigma(e_k) \in (0, 1)$,且 σ 关于 $\|e_k\|$ 是递增的.这样当 $\|e_k\|$ 很小时,“基本上”采用老算法结构.现选取

$$\sigma(e_k) = \alpha(1 - e^{-\beta\|e_k\|}). \quad (9)$$

其中, $(\alpha, \beta) \in (0, 1) \times [0, +\infty)$, 则 $\sigma(e_k)$ 满足上述要求,从而算法结构(8)可修正为

$$u_{k+1} = u_k + Le_k - \alpha(1 - e^{-\beta\|e_k\|}) \frac{u_k^T Le_k}{u_k^T u_k} u_k. \quad (10)$$

3 新算法的收敛性分析 (Convergence of the new algorithm)

在上一节,通过对通常算法所构成的向量图的各种情况进行几何分析,导出了形如式(10)的新算法结构,这类算法与通常算法完全不一样,具有非线性结构形式.但这类结构仅仅只是通过对向量图的几何直观加以综合而得到的,其算法的收敛性和实效性还有待进行完整的理论分析和仿真实验,下面对新算法结构的收敛性进行证明.

假定 $x_k(0) = x_0, k = 1, 2, 3, \dots$, 并记 $\Delta u_k(t) = u_{k+1}(t) - u_k(t)$. 在讨论新算法的收敛性问题的过程中,本文不加证明地引用如下两个引理,文中涉及的各种范数与文献[9]相同.

引理1 若 $\rho, \sigma \in (0, 1)$, 且对正常数 d, l , 有不等式 $dl\rho\sigma/(1-\rho) < 1$ 成立, 则存在 $\xi < 1$ 及适当的正数 λ , 使得对正常数 c, a 有 $F(\lambda, \xi) \in (0, 1)$, 其中

$$F(\lambda, \xi) = \frac{\xi\rho}{1-\xi\rho} \left[\frac{\xi cal(1+\sigma)}{\lambda(\lambda-a)} + \sigma\xi dl \right].$$

引理2 对适当的 λ 及 $\xi > 1$, 有估计式

$$\|x_{k+1} - x_k\|_{(\lambda, \xi)} \leq \frac{b}{\lambda(\lambda-a)} \|\Delta u_k\|_{(\lambda, \xi)}$$

成立. 其中

$$\|A\| \leq a, \quad \|B\| \leq b.$$

定理3 若算法(10)中的 α 及 L 满足: 1) $\|I - DL\| \leq \rho \in (0, 1)$; 2) $\rho\alpha dl/(1-\rho) < 1$. 则由式(10)确定的系统(2)的输入序列 $\{u_k(t)\}$ 于 $[0, T]$ 上是一致收敛的, 且 $\lim_{k \rightarrow \infty} e_k(t) = 0, \forall t \in [0, T]$. 其中, $\|L\| = l, \|D\| \leq d$.

证 由 $e_k(t)$ 的定义及式(2), (10)和定理的条件1)(假设 $\|C\| \leq c$)有

$$\begin{aligned} \|e_{k+1}(t)\| &= \|(I - DL)e_k(t) - C(x_{k+1}(t) - x_k(t)) + \\ &\alpha(1 - e^{-\beta\|e_k(t)\|}) D \frac{u_k^T(t) Le_k(t)}{u_k^T(t) u_k(t)} u_k(t)\| \leq \\ &\rho \|e_k(t)\| + \|C\| \|x_{k+1}(t) - x_k(t)\| + \\ &\alpha \|D\| \|Le_k(t)\|, \end{aligned} \quad (11)$$

从而

$$\|e_k(t)\| \leq \rho^k \|e_0(t)\| + \sum_{i=1}^{k-1} \rho^{k-i-1} (c \|x_{i+1}(t) - x_i(t)\| + \alpha d \|Le_i(t)\|), \quad (12)$$

由式(10)显然有

$$\|\Delta u_k\|_{(\lambda, \xi)} \leq (1 + \alpha) l \|e_k\|_{(\lambda, \xi)}. \quad (13)$$

选取适当的 λ 使得 $\lambda - a > 0$, 再由 $\rho, \alpha \in (0, 1)$ 及定理的条件2), 由引理1知, 存在 $\xi > 1$ 使得 $F(\lambda, \xi) \in (0, 1)$. 其中

$$F(\lambda, \xi) = \frac{\xi\rho}{1-\xi\rho} \left[\frac{\xi cal(1+\alpha)}{\lambda(\lambda-a)} + \alpha\xi dl \right].$$

对如上所选取的 λ 和 ξ , 由引理2有

$$(\|e_k(t)\| \xi^k) e^{-\lambda t} \leq$$

$$(\rho\xi)^k \|e_0\|_{\lambda} + \sum_{i=1}^{k-1} (\rho\xi)^{k-i-1} \xi.$$

$$\left(\frac{cb}{\lambda(\lambda-a)} \|\Delta u_i\|_{(\lambda, \xi)} + \alpha dl \|e_i\|_{(\lambda, \xi)} \right) \leq$$

$$\|e_0\|_{\lambda} + F(\lambda, \xi) + \sup_{1 \leq i \leq k} \|e_i\|_{(\lambda, \xi)}. \quad (14)$$

因为式(14)的右端与 t 和 k 无关,故有

$$\sup_{1 \leq i \leq k} \|e_i\|_{(\lambda, \xi)} \leq \|e_0\|_{\lambda} + F(\lambda, \xi) \sup_{1 \leq i \leq k} \|e_i\|_{(\lambda, \xi)}. \quad (15)$$

由引理1有, $F(\lambda, \xi) \in (0, 1)$, 故

$$\sup_{1 \leq i \leq k} \|e_i\|_{(\lambda, \xi)} \leq \frac{\|e_0\|_{\lambda}}{1 - F(\lambda, \xi)}, \quad (16)$$

因此,对 $t \in [0, T]$, 有

$$\|e_k(t)\| \leq \xi^{-k} e^{\lambda t} \sup_{1 \leq i \leq k} \|e_i\|_{(\lambda, \xi)} \leq \xi^{-k} e^{\lambda T} \frac{\|e_0\|_{\lambda}}{1 - F(\lambda, \xi)}. \quad (17)$$

由于 $\xi > 1$, 故有 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|e_k(t)\| = 0, \forall t \in [0, T]$.

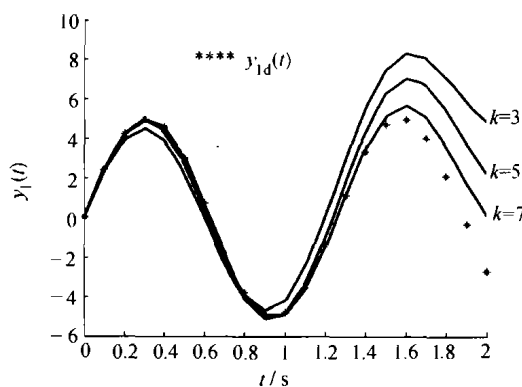
关于 $\{u_k(t)\}$ 的一致收敛性证明从略.

4 数值仿真比较 (Comparison by numerical simulations)

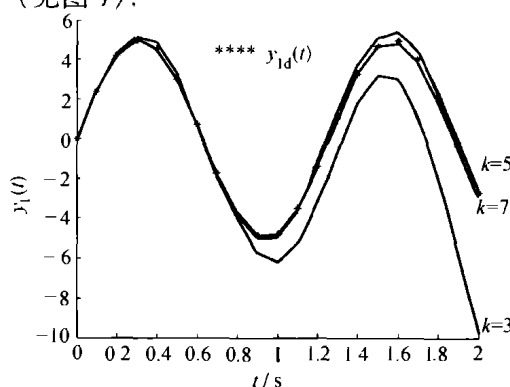
为了说明本文所给新算法的有效性和优越性,考虑如下算例:

例1 考虑如下2-输入2-输出线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} \quad (18)$$



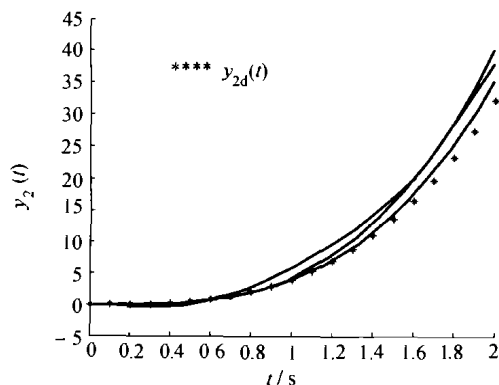
(a) 通常算法



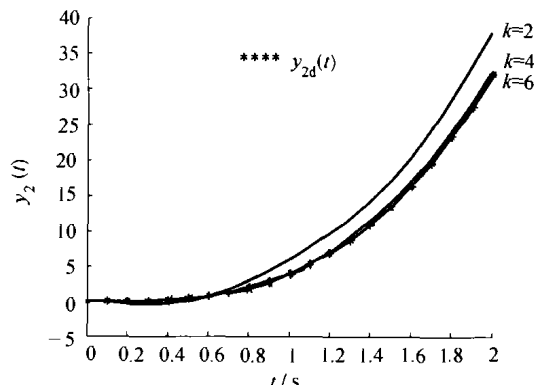
(b) 新算法

图5 学习控制系统输出的第一分量

Fig. 5 The first output component of the learning control system



(a) 通常算法



(b) 新算法

图6 学习控制系统输出的第二分量

Fig. 6 The second output component of the learning control system

设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.5 & 1 \end{pmatrix}, \\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

要求在 $t \in [0, 2]$ 内跟踪期望轨迹 $y_d = (y_{1d}, y_{2d})^T = (5\sin 5t, 4t^3)^T$, 取 $\alpha = 0.55, \beta = 1.1$, 则新算法(10)变为

$$u_{k+1} = \left(1 - 0.55(1 - e^{-1.1 \|r_k\|}) \frac{u_k^T L e_k}{\|u_k\|^2} \right) u_k + L e_k. \quad (19)$$

设系统(18)开始学习时的初始状态和初始输入分别为 $x_0 = (0, 0)^T, u_0 = (1, 0.6)^T$. 图5是通常算法(3)和新算法(19)在迭代第3次、第5次和第7次时关于 $y_{1d}(t)$ 的跟踪情况. 而图6是通常算法(3)和新算法(19)在迭代第2次、第4次和第6次时关于 $y_{2d}(t)$ 的跟踪情况. 从图5和图6中可清楚地看出, 当新算法已跟踪到目标曲线时, 通常算法跟踪目标曲线却还存在着很大的误差. 相同的结论也可从两种算法相应的跟踪误差曲线图中明显地看出(见图7).

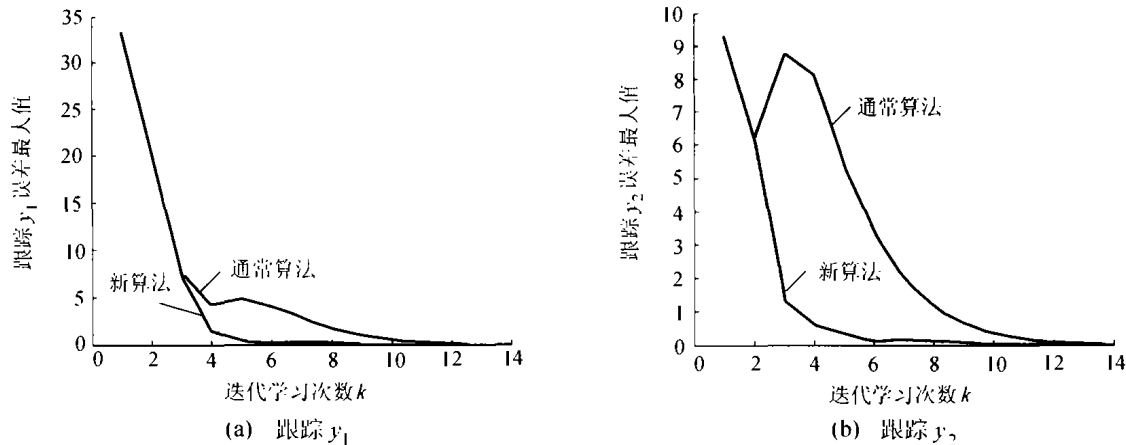


图7 跟踪误差最大值的变化曲线

Fig. 7 Maximum tracking error curve

5 结束语(Conclusion)

本文对迭代学习控制的探索,避开了 Arimoto 初提算法的原始思想,另寻途径,采用几何分析的方法,对基本算法所构成的向量图进行分析,提出了一类非线性学习算法.虽然这类学习算法不是(也不可能是)迭代学习控制中最好最快的算法,但它确打破了多年来人们一直囿于 Arimoto 的思路,另辟途径寻找新的研究方法,以期构架迭代学习控制的几何理论.

参考文献(References):

- [1] ARIMOTO S, KAWAMURA S, MIYAZAKI F. Bettering operation of robots by learning [J]. *J of Robotic Systems*, 1984, 1(2): 123 - 140.
- [2] XU Jianxin, VISWANATHAN B. Adaptive robust iterative learning control with dead zone scheme [J]. *Automatica*, 2000, 36(1): 91 - 99.
- [3] DOH T Y, MOON J H, JIN K B, et al. Robust iterative learning control with current feedback for uncertain linear systems [J]. *Int J of Systems Science*, 1999, 30(1): 39 - 47.
- [4] ORIOLO G, PANZIERI S. An iterative learning controller for non-holonomic mobile robots [J]. *Int J of Robotics Research*, 1998, 17(9): 954 - 970.
- [5] CHIEN C J. A discrete iterative learning control for a class of nonlinear time-varying systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1998, 43(5): 748 - 752.
- [6] CHEN Yangqun, WEN Changyun, SUN Mingxuan. A robust high-order P-type iterative learning controller using current iteration tracking error [J]. *Int J of Control*, 1997, 68(2): 331 - 342.

- [7] KUREK J E. Counterexample to iterative learning control of linear discrete-time multivariable systems [J]. *Automatica*, 2000, 36(2): 327 - 328.
- [8] FANG Yong, CHOW T W S. Iterative learning control of linear discrete-time multivariable systems [J]. *Automatica*, 1998, 34(11): 1459 - 1462.
- [9] 谢胜利, 谢振东, 刘永清. 滞后广义系统状态跟踪的学习控制算法[J]. *系统工程与电子技术*, 1999, 21(5): 10 - 16.
(XIE Shengli, XIE Zhendong, LIU Yongqing. Learning control algorithm for state tracking of singular systems with delay [J]. *Systems Engineering and Electronics*, 1999, 21(5): 10 - 16.)
- [10] 谢胜利, 谢振东, 韦岗. 非线性分布参数系统跟踪控制的学习算法[J]. *自动化学报*, 1999, 25(5): 627 - 632.
(XIE Shengli, XIE Zhendong, WEI Gang. Learning algorithm for tracking control of nonlinear distributed parameter systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 1999, 25(5): 627 - 632.)

作者简介:

谢胜利 (1958 —), 男, 教授, 博士生导师, 出版学术专著(国家“九五”重点图书)一部, 发表学术论文 70 多篇, 4 次获得省部级科技奖励, 主要研究方向为非线性系统学习控制、机器人系统、自适应多路回波消除、盲信号处理以及图像处理等, E-mail: adshlxie@scut.edu.cn;

田森平 (1961 —), 男, 1988 年在华中师范大学获硕士学位, 1999 年在华南理工大学获博士学位, 现为华南理工大学自动化学院副教授, 于微分方程定性和稳定性理论、迭代学习控制算法与计算机仿真等方面发表了近 20 篇论文, 目前感兴趣的研究方向是非线性系统的迭代学习控制理论与算法, E-mail: ausptian@scut.edu.cn;

谢振东 (1966 —), 男, 2000 年在华南理工大学控制理论与控制工程专业获博士学位, 已发表学术论文 20 多篇, 目前感兴趣的研究方向为迭代学习控制的理论和方法、智能交通系统。