文章编号：1000-8152(2004)06-0966-09

系统动态性能的多样性分析与控制
——后绝对稳定性研究

黄　琳，杨　莹，耿志勇，王金枝，段志生
（北京大学 力学与工程科学系 系统与控制研究中心，北京 100871）

摘要：控制理论长期以来将控制目的主要集中于系统平衡位置稳定性和设计控制器以保证对系统进行镇定上，已不能符合控制系统当今的实际要求．首先介绍了区别于单平衡位置稳定性的其它动态性能，包括系统中过程的有界性(Lagrange稳定性)、双态性、类梯度性以及刻画不产生平衡位置过渡的Bakaev稳定性、及如何运用频域手段和线性矩阵不等式(LMI)来实现对它们的控制．其次介绍了高阶系统中周期过程(自振与强迫振动)的分析与控制，再次介绍了与奇怪吸引子相关的Hausdorff维数与Lyapunov指数的估计和与混沌相关的研究，最后给出了一个结论．

关键词：总体性质；多平衡点；分析与控制；周期过程；奇怪吸引子
中图分类号：TP273　　**文献标识码**：A

Analysis & control of diversity of system dynamic properties: on the post-absolute stability

HUANG Lin, YANG Ying, GENG Zhi-yong, WANG Jin-zhi, DUAN Zhi-sheng
(Center for Systems and Control, Department of Mechanics and Engineering Science, Peking University, Beijing 100871, China)

Abstract: The main objective of control theory has long focused on the stability analysis of system equilibrium and stabilizing controller synthesis. But these can not meet the practical need anymore. Firstly, some dynamic properties different from the stability of the single equilibrium are introduced, including the boundedness of system trajectories (i.e. Lagrange stability), dichotomy, gradient-like behavior and the Bakaev stability (ensuring no transition of equilibria). Frequency-domain methods as well as linear matrix inequalities methods are established on how to design a feedback controller guaranteeing the above mentioned properties. Secondly, the stability and control of periodic oscillations (the auto-oscillations and the forced oscillations) of high order systems are investigated. Finally, some researches on estimates of the Hausdorff dimension and the Lyapunov exponent of strange attractors are introdueed.

Key words: global properties; multiple equilibria; analysis and control; periodic oscillations; strange attractors

1　绝对稳定性研究的历史地位(Historical status of the absolute stability)

线性系统的一个重要特征就是它在整个相空间中的全部特性都可以在其原点附近的一个领域内得到，因此线性系统无论从理论和方法上看均相对简单．由于在以前的控制系统设计中首先还是讨论单平衡点(对应标准工作状态)的问题，因而即使对于存在非线性环节的系统，基本上也只是讨论保证单平衡点稳定性，其中有深远影响的是有关绝对稳定性的研究．1944年，前苏联学者Lur'e和Postnikov以飞机自动驾驶仪的稳定性分析为背景，建立了一类具有广泛代表意义的非线性控制系统的模型，即Lur'e系统，并提出了绝对稳定性的概念[1]．Lur'e系统是一类前馈通道为线性时不变系统而反馈通道含有扇区非线性的闭环反馈系统，如图1所示．

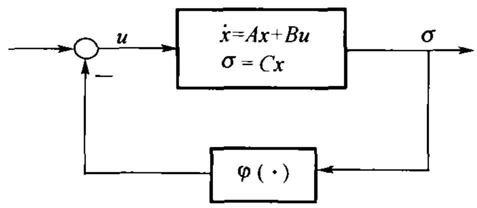


图1　非线性Lur'e系统
Fig. 1　Nonlinear Lur'e system

收稿日期：2004-02-25；收修改稿日期：2004-10-12．
基金项目：国家自然科学基金项目(60334030，10272001，60404007，60374039，60204007)．

前馈通道的系统由以下微分方程描述:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu,\ u = -\varphi(\sigma), \\ \sigma = Cx. \end{cases} \tag{1}$$

反馈通道的非线性函数 $\varphi(\cdot):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是满足以下条件的连续函数:

$$(\forall \sigma \in \mathbb{R}): \mu_1\sigma \leqslant \sigma\varphi(\sigma) \leqslant \mu_2\sigma^2, \tag{2}$$

其等价于

$$F(x,u) = -(\mu_2 C^{\mathrm{T}}x + u)(u + \mu_1 C^{\mathrm{T}}x) \geqslant 0. \tag{3}$$

系统(2)称为是绝对稳定的,系指对任意满足系统(2)的 $\varphi(\sigma)$、系统的零解全局渐近稳定.从绝对稳定性概念的提出到现在为止的几十年中,对于系统(2)稳定性的研究,吸引了众多学者的兴趣.一开始人们习惯于用 Lyapunov 函数方法来进行分析,这样可以提供系统参数的选择方法,最后得到的是由一些代数方式表达的充分性条件,但是由于方法本身的特点,限制了对这一问题研究的突破.1961 年,当 V.M.Popov 将频域方法引入研究绝对稳定性这类问题时,使得人们的思路产生了变化,也大大推进了人们对控制系统的认识[2].频域方法这种用传递函数来描述动态系统的方法,一方面由于没有坐标系的参与而真正抓住了系统的物理本质,另一方面由于其可以依据实验数据且简单方便而受到工程设计人员的欢迎.Popov 把研究线性系统渐近稳定性的 Nyquist 判据引入到非线性系统中,创立了判断非线性 Lur'e 系统绝对稳定性的 Popov 判据,即利用开环频率特性曲线加以改造后的一类修正频率特性曲线与 μ_1 和 μ_2 的关系,即可判断闭环系统的绝对稳定性.由于 Popov 开创性的工作,包括 Popov 判据以及圆判据等这类方法,因其有较明显的控制方面的含义而更乐于为应用及工程方面的人士所接受,同时这种方法与 Lyapunov 方法之间的深刻的富于启迪的联系也促进了这一领域的发展.随后人们把兴趣集中到 Lyapunov 方法与 Popov 频域方法本质上是否一致上,这方面的代表人物是 Yakubovich 和 Kalman,他们把系统的绝对稳定性问题归结为一个代数问题,给出了新的稳定性判据,并提出了著名的 Yakubovich-Kalman 引理(也叫 KYP 引理)[3~5].Yakubovich-Kalman 引理被视为系统理论中最基本的工具之一.它是利用 S 过程给出了二次型 Lyapunov 函数在满足另一个二次型约束的条件下,其沿系统解的全导数小于零的充要条件.比如研究图 1 所示 Lur'e 系统,考虑二次型 Lyapunov 函数 $V(x) = x^{\mathrm{T}}Px$,其沿系统解的全导数为 $\dot{V}(x) = F(x,u) = 2x^{\mathrm{T}}P(Ax+Bu)$.引进二次型

$$G(x,u) = 2x^{\mathrm{T}}P(Ax+Bu).$$

利用 S 过程,Yakubovich-Kalman 引理给出了在满足约束(3)的条件下,二次型 $S(x,u) = G(x,u) + F(x,u) \leqslant 0$ 的充要条件,这个充要条件是以频域不等式表达的,它反映了这样一个基本事实:在频域分析中,当系统存在谐波过程时,其所受二次型约束取反号.这实际上表明系统中不存在谐波过程,而 Popov 判据和圆判据可以看成是 Yakubovich-Kalman 引理在单平衡点 Lur'e 系统稳定性研究上的特例.

上个世纪 70 年代开始的研究非线性控制系统的微分几何方法,由于采用微分同胚变换而将非线性系统设法转化成线性系统,类似的微分代数方法也是力求将非线性系统采用平行于线性系统的方法.这两种方法也主要是针对单平衡点系统某个特定运动的稳定性、镇定与解耦这一类问题.而从系统的运转来说,有时感兴趣的是整个系统的性能,例如现今电力系统,其感兴趣的已不是工作点在 Lyapunov 意义下的稳定性,而是整个电网稳定运行,又如对一些经济系统,我们更关心的是其经济效益的稳定增长,而不是在某一经济水平上的踏步不前.另外,有些非线性系统很难达到 Lyapunov 稳定性或系统的 Lyapunov 函数参数选择较困难,使得人们转而去研究系统中一些较易实现的总体性质.例如系统中扰动过程保持有界有时就可以既满足需求也不难实现.另外系统中是否存在自振、同宿轨乃至混沌,这些都不再能归结为单平衡点的稳定性,而是由系统决定的特性.国际上针对非线性系统的一些总体性质的分析已有研究,而在保证系统总体性质条件下的鲁棒性分析以及如何设计控制器使得系统具有或避免这些总体性质的研究则刚刚开始.

2 系统的总体性质(Global properties of nonlinear systems)

多平衡位置非线性系统,是现代工业,社会乃至自然界大量存在的系统.其中最具代表性的是工程技术中大量出现的具多平衡位置的非线性力学系统,其动力学行为表现为长时间尺度远离平衡位置的大范围非线性特性,系统的总体性质具有复杂多样的动力学行为模式,现有的控制理论不能很好地解决这类系统中存在的各种问题,而面临严峻的挑战,使得其研究必须面对其中的非线性以及多平衡位置问题.非线性系统的复杂性表现为:由于平衡位置不单一,使得其动力学行为对系统的初始状态有很强的敏感性和依赖性;动力学模式复杂多样,除收敛及无界外,还可能存在各种时空周期、非周期振动

乃至混沌运动;其动力学模式对微小的外界激励十分敏感.对于线性系统,其解的全部性质都可以在平衡点附近得到,因此对线性系统实际上不存在总体性质与局部性质的区别.而对于非线性系统,它与线性系统的一个重要区别就是存在多平衡点,在非线性系统中平衡位置可能出现的情况大致有:

· 单一的平衡位置;

· 非单一的但相互隔离的平衡位置;

· 平衡位置以区间或连通有界集合出现.

如果在第三种情况中平衡位置只组成单个连通集合,其稳定性研究就可以借助对单一平衡位置的方法进行.但当平衡点是可数个并且相互隔离(如果平衡位置只有一个那就是已研究很多的全局渐近稳定)时,就能证明此时即使系统的一切解均收敛,在平衡位置中也一定存在不渐近稳定的平衡点.这一事实说明多平衡位置系统本身的复杂性需要对这类系统的性质特别是总体性质进行研究.对这类系统的研究,远远超出了 Lyapunov 稳定性的研究范畴,已进入研究系统的总体性质.同时,伴随多平衡态非线性系统中的动态过程也是多种多样的,这在各种具旋转机构、摆等为部件的力学系统中极为常见.由于具多平衡点的系统的动态性能的复杂性,企图从一般意义下讨论非线性系统的总体特性几乎是不可能的.即使一个阶次并不很高的非线性系统,随着元件参数的变化,系统就会表现出不同的渐近性质:从单平衡点的全局渐近稳定直到多平衡点及混沌运动,例如现在被国际上广泛研究的 Chua 氏回路[6,7].

2.1 基本定义(Basic definitions)

考虑非线性系统

$$\dot{x} = f(t, x). \tag{4}$$

确定什么是系统的总体性质有两个原则:一是它应能刻画发生在系统中解所具有的共性,因此这类性质不可能也不应该刻划解之间的区别,而是刻画系统的全体动态过程具有的概括性图像;另一方面,这类性质是可以进行操作的,即可以用数学和计算来进行研究.由于总体性质的研究常与系统中是否存在特定动态过程有关,因此人们也常将是否存在一些特定过程的系统属性的研究归为总体性质的范畴.这方面的性质有

· Lagrange 稳定:系统中一切解均有界,即不存在发散运动;

· 类梯度性:系统中一切解均收敛(类梯度性常指非单一平衡点的收敛性);

· 双态性:有界解均收敛,以保证不发生自振与混沌这些有界但具特性的动态过程;

· Bakaev 稳定:系统不产生平衡点过渡;

· 同宿轨道:存在 l 使得 $\lim\limits_{t\to-\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = l$,称 $x(t)$ 为同宿轨;

· 异宿轨道:存在 $l_1 \neq l_2$ 使得 $\lim\limits_{t\to-\infty} x(t) = l_1$, $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = l_2$, 称 $x(t)$ 为异宿轨;

· 吸引子:不变集 $K \in \mathbb{R}^n$ 称为系统(4)的吸引子,是指存在 $D \supset K$, 使得 $\forall x_0 \in D$, 当 $t \to +\infty$ 时, $\mathrm{dist}(x(t, t_0, x_0), K) \to 0$, 若 $D = \mathbb{R}^n$, 则为全局吸引子;

· Levinson 耗散:存在有界闭集 M,使对任何解均有 $\lim\limits_{t\to\infty}\mathrm{dist}(x(t, t_0, x_0), M) \to 0$.

2.2 主要工具(Main tools)

自从20世纪40年代人们开始关注非线性力学以来,研究主要集中在低阶系统的理论研究和高阶系统的计算方法上.对于一般非线性系统而言,由于问题本身的复杂性,统一的研究方法和手段是不可能存在的,必须针对具有一定特色的典型系统进行研究.基于非线性反馈的 Lur'e-Postnikov 型系统,就是典型的一类.一方面非线性反馈的引入可以刻画大量工程中实际存在的非线性力学系统;另一方面,借助于与线性系统的联系,我们可以利用 KYP 引理所揭示的频域与时域描述的本质联系,而采用频域与 Lyapunov 方法相结合作为研究手段.频域方法在线性控制系统研究中已大获成功,其深刻的内在原因是这种表达是反映系统用频域表达的输入输出关系的直接表述,无论是自振、分岔还是混沌,都与系统中发生的谐波过程有关,这就使频域方法在这些问题上可能发挥较好的作用.利用 KYP 引理及 Lyapunov 类函数,可以对多平衡位置非线性系统的总体性质进行分析.值得注意的是,由于多平衡位置系统自身的特点,经典的二次型 Lyapunov 函数已不再适用,此时在参数空间中得到的稳定域往往为空.因此,构造新的 Lyapunov 函数是研究多平衡位置非线性系统的一个重要特点.例如对下述 Lur'e 型类摆系统:

$$\dot{x} = Ax + bu,\ u = -\varphi(\sigma),\ \sigma = c^{\mathrm{T}}x,$$
$$\det A = 0,\ \varphi(\sigma + \Delta) = \varphi(\sigma).$$

由于非线性函数 $\varphi(\cdot)$ 是 σ 的周期函数,其平衡位置若有就必为无穷多个.对这类系统可利用下述主要工具进行讨论:

1) KYP 引理——联系频域方法与 Lyapunov 方

法的最主要工具.

引理 1[8]　给定 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times n}, M = M^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$，且 $\det(\mathrm{j}\omega I - A) \neq 0, \omega \in \mathbb{R}, (A, B)$ 可控，则以下两个条件等价：

1° $\begin{bmatrix}(\mathrm{j}\omega I - A)^{-1}B \\ I\end{bmatrix}^{*} M \begin{bmatrix}(\mathrm{j}\omega I - A)^{-1}B \\ I\end{bmatrix} \leqslant 0$、$\forall \omega \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$；

2° 存在矩阵 $P = P^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 使得

$$M + \begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}P + PA & PB \\ B^{\mathrm{T}}P & 0 \end{bmatrix} \leqslant 0.$$

在以上引理中，1°是频域不等式而 2°为时域不等式，它给出了时域和频域的一种等价关系，可以根据需要应用于不同场合.

2) 不变锥.

命题 1　对 Lyapunov 函数 $V = x^{\mathrm{T}}Px, M = \{x \mid x^{\mathrm{T}}Px \leqslant 0\}$ 是一个锥，若对于任意 $x \in M$，有 $\dot{V} \leqslant 0$，则 M 是正不变锥.

如果对于一个系统能构造一个正不变锥，则可以断言，在该锥内发生的解决不能流出该锥. 这将有利于界定一些可能发生的特殊过程. 为了用二次型构造不变锥，可以利用下述代数引理：

引理 2[9]　给定不变锥 $M = \{x \mid x^{\mathrm{T}}Px < 0\}$ 和超平面 $\Pi = \{x \mid c^{\mathrm{T}}x = 0\}$，则

$$\dot{M} \cap \Pi = \varnothing.$$

当且仅当 P 有一负特征值，其余皆正且 $c^{\mathrm{T}}H^{-1}c \leqslant 0$.

不变锥及相关的理论方法在讨论 Bakaev 稳定性、自振的存在等问题中有独特的作用.

3) 非局部化简.

对于非线性系统来说，Lyapunov 意义下的稳定性是一个基本的性质，但本质上只是系统的局部性质，由于扰动解从来不是单指一个解，因而对其性质的讨论就常借助 Lyapunov 函数的办法进行. 当系统的 Lyapunov 函数具有定号导数 $\dot{V}$ 时(例如 $\dot{V} < 0$)，此时对应的 V 将只能是正定的或变号的，而不可能是半正定的，并且系统中一般将不可能有周期过程，于是依据 V 的性质可以断言系统中的解或无界或收敛. 这一事实使人们利用 S 过程的方法对以上 Lure 型的系统寻求满足 $\dot{V} < 0$ 的 V，然后用对应的频域不等式刻划，从而揭开了对系统各种总体性质的研究. 这方面已经得到一些可用的充分性条件. 由于充分性条件主要是用由系统传递函数描述的频域不等式进行刻划的，这种频域不等式的成立将标志系统中不产生谐波过程. 这种频域不等式配合以改造后的 Lyapunov 方法就可以对系统的 Lagrange 稳定性、双态性乃至类梯度性有清楚的了解. 在这一思想指导下人们就开始用低阶非线性系统与高阶非线性系统在频域不等式上的类似作为过渡，建立了一种称之为非局部化简的方法，其基本思想是，利用低阶系统的总体性质和高阶系统的频域条件来判断高阶系统的总体性质. 这不同于过去的比较原理，一方面这里是依据频域而不是时域的微分不等式，另一方面，这里不仅可以研究单平衡点的稳定性而且也能研究系统的总体性质. 例如一个利用非局部化简法判断系统 Lagrange 稳定的定理为：

定理 1[9]　设有 $\lambda > 0, \varepsilon >, \tau \geqslant 0$ 与 $\kappa \neq 0$ 使

1) $\ddot{\theta} + 2\sqrt{\lambda\varepsilon}\dot{\theta} + \varphi(\theta) = 0$ 的一切解均有界；

2) $A + \lambda I$ 是 Hurwitz 稳定；

3) $(\forall \omega \in \mathbb{R})$：

$$\mathrm{Re}\{\kappa K(\mathrm{j}\omega - \lambda) - \varepsilon \mid K(\mathrm{j}\omega - \lambda)\mid^2 - \tau[K(\mathrm{j}\omega - \lambda) + \mu_1^{-1}(\mathrm{j}\omega - \lambda)]^{*}[K(\mathrm{j}\omega - \lambda) + \mu_2^{-1}(\mathrm{j}\omega - \lambda)]\} \geqslant 0.$$

则类摆系统

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + b\varphi(\sigma), \\ \dot{\sigma} = c^{\mathrm{T}}z + \rho\varphi(\sigma), \\ \varphi(\sigma + \Delta) = \varphi(\sigma) \end{cases}$$

是 Larange 稳定的，其中 $K(s) = c^{\mathrm{T}}(A - sI)^{-1}b - \rho$. 进而若 $\tau\mu_1^{-1}\mu_2^{-1} = 0$ 且 $\tau(\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1})\rho \leqslant 0$，则系统还是类梯度的.

这一结果对于锁相环(Phase-locked loops)电路的研究很有价值. 锁相技术广泛应用于无线电通讯、雷达、计算机、空间技术等各个领域，系统的类梯度性往往对应锁相电路的锁相功能. 以上非局部化简方法也可应用于由积分方程或积分 - 微分方程描述的类摆系统，还可以对一些控制系统指出正不变集的位置和利用它寻求产生吸引子的条件，同样也可以用来讨论产生周期解、旋转解乃至估计吸引子的 Hausdorff 维数等总体性质的问题，从而为参数分岔、混沌等的研究提供新的途径.

对于多平衡态系统的研究，国际上主要是前苏联经历了近 20 多年的发展，他们从一些工程上有意义的系统出发，经过提炼，取得了一系列有价值的成果. 他们把频域不等式的方法与 Lyapunov 方法相结合运用到具有多平衡位置的非线性系统的总体性质的研究中，并以类摆系统为例，给出了判断这类系统具有或避免某种总体性质的频域判据[9]，但目前这一研究主要是针对确定性系统的且多为分析性结果. 一方面，这些研究中并没有提出如何设计反馈以

保证系统具有或避免这些性质的出现,进而有效地按照需要去进行控制;另一方面,没有考虑系统不确定因素的影响,特别是系统基本的线性部分存在的结构性或非结构性摄动,对应总体性质的的鲁棒性研究,目前几乎还是空白.对于这两方面的问题,我国学者做了有意义的研究[10~13].

3 周期过程的研究(Researches on periodic oscillations)

周期过程是比平衡位置稍为复杂的动态过程,它在现代机械、通讯等工程领域有重要的研究价值.高维系统的周期过程大致可以分为3种,自振(即极限环,也叫第一类周期解)、第二类周期解及强迫振动.利用频域方法可以对高维系统中这类问题进行研究.

3.1 自振(Self-oscillations)

首先来看平面情形.证明自振存在性通常应用Poincare映射和Bendixon定理.Poincare映射在拓扑学上的对应也叫压缩映射不动点定理,通过一个集合向同一集合的压缩映射时存在不动点,来证明系统存在极限环.而Bendixon定理则是利用外圆方向场向内,内圆方向场向外,环区内无奇点,来判定环区内有稳定周期解,如图2所示.

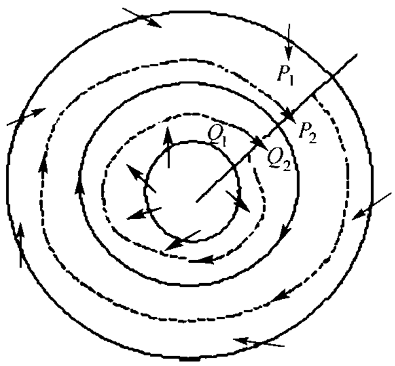


图2 平面情形
Fig. 2 Two-dimensional case

在三维空间中研究周期解的存在性,其思路是将平面情形的Poincare映射与Bendixson定理结合,构造一个类似平面情形下环面的三维区域,在该域上设置一截面,然后应用Brower定理(即对于连续映射,若将紧凸集映入到紧凸集,则该映射在紧凸集上存在不动点)来证明周期解的存在.具体做法是作一个内部无奇点的环面,使环表面方向场均向内,这可以通过不变锥加耗散性来实现,如图3所示.取一个与环面不相切的截面.如果截面上出发的解均流回截面,就可以构造一个映射,该映射将截面映射到它自身,再利用Brower定理证明存在不动点,该不动点即对应周期解,但周期解个数则难以估计.

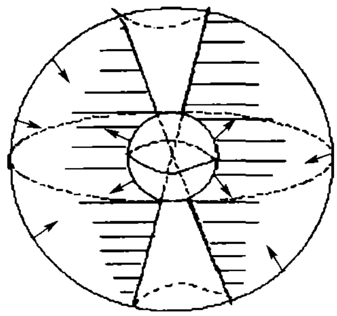


图3 三维情形
Fig. 3 Three-dimensional case

最后来看高维系统的情形.对于系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu,\ \sigma = c^{\mathrm{T}}x, \\ u = \varphi(\sigma),\ \det A \neq 0, \\ \mu_1\sigma^2 \leqslant \sigma\varphi(\sigma) \leqslant \mu_2\sigma^2, \end{cases} \tag{5}$$

证明其存在周期解的主要思路为

1) 构造可以建立Poincare映射的低维截面 S.

在 n 维相空间中求一个 $n-1$ 维截面 S,要求 S 与系统方向场不相切且在 S 上不存在平衡点,并使从 S 上出发的轨道具有可返回性,即 $x(t,x_0)$ 是解,有 τ 存在使 $x(0,x_0)\in S, x(\tau,x_0)\in S$,但 $\forall t\in(0,\tau): x(t,x_0)\notin S$.这样形成Poincare映射 F: $x(0,x_0)\rightarrow x(\tau,x_0), S\rightarrow S$,它是连续映射,而对如何确定 S,可以利用过原点的平面(其法向为 d)及下述引理构造:

引理3(可返回性引理) 若 $x(t)$ 是解,d 为常向量,$d^{\mathrm{T}}x$ 不变号,则 $\lim\limits_{t\to\infty} d^{\mathrm{T}}x = 0$.

对该引理可有下述逆命题:若 $\lim\limits_{t\to\infty} d^{\mathrm{T}}x \neq 0$, $d^{\mathrm{T}}x$ 必穿越以 d 为法向的过原点的平面无数次.

2) 不变锥与大、小球面的构造,以形成一环形区域作为不变集合.

$P = P^{\mathrm{T}}$ 非奇异, $\Omega = \{x \mid x^{\mathrm{T}}Px < 0\}$,取 $V = x^{\mathrm{T}}Px$,使

$$\dot{V} + 2\lambda V = 2x^{\mathrm{T}}P(Ax + bu) + 2\lambda x^{\mathrm{T}}Px \leqslant 0, \tag{6}$$

引入约束

$$G(x,u) = \begin{cases} (\mu_1\sigma - u)(u - \mu_2\sigma), & \text{其他}, \\ \sigma(\mu_2\sigma - u), & \mu_1 = -\infty, \\ (\mu_1\sigma - u)\sigma, & \mu_2 = +\infty. \end{cases}$$

$[\mu_1,\mu_2]$ 是非线性 $\varphi(\sigma)$ 所在的扇区,则变为 $G(x,u)\geqslant 0$ 约束下保证式(6)成立.这可归为频域不等式条件.对于构造小球面,在可微条件下,利用系统(5)与对应线性系统 $\dot{x} = [A + bc^{\mathrm{T}}\varphi(0)]x$ 的解在原点附近一一对应,拓扑结构类似.在假设 $A +$

$bc^{\mathrm{T}}\varphi(0)$ 有两个右半平面特征根的前提下,可以构造一小球面使其与锥的截面上方向场指向小球外.最后设系统具 Levinson 耗散性,则存在大球面使解最终均留在大球内.将这三者整个合在一起,一个 n 维空间的类似三维环的不变集合就形成了.

3) 在 1)与 2)的基础上应用压入映射在紧凸集上有不动点就可以判定系统存在周期解.

对于系统

$$\dot{x} = Ax + bu,\ u = \Psi(\sigma)\dot{\sigma},\ \sigma = c^{\mathrm{T}}x, \tag{7}$$

其极限环存在的充分条件也已有结果.系统(5)可以化为式(7),然后用 $x^{\mathrm{T}}Px + \int_0^{\sigma}\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau$ 构造类似三维环的不变集,上述方法比已有的结果选择参数范围大.目前有关自振存在的鲁棒性以及摄动界估算的结果还不多,另外如何设计控制器使得系统产生或避免极限环的工作也尚少见.

在对于系统的自振研究中,利用频域条件也可以确定某种频率(例如 $\omega > \omega_0$)下的振动为不可能,这对于一些力学系统的设计是有意义的.

3.2 第二类周期解(Cycles of the second kind)

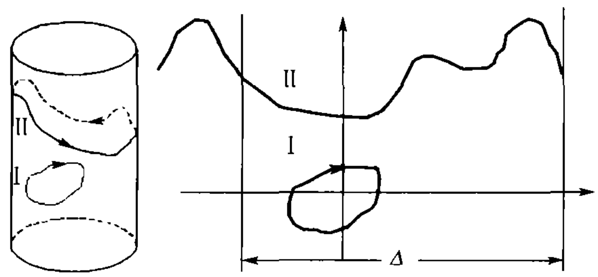
考虑类摆系统

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + bu,\ u = \varphi(\sigma), \\ \dot{\sigma} = c^{\mathrm{T}}z + \rho\varphi(\sigma), \\ \varphi(\sigma + \Delta) = \varphi(\sigma),\ \forall\sigma\in\Xi. \end{cases} \tag{8}$$

对于这类系统,如果描述其状态的相空间与真实的物理空间一致,则其相空间应具有柱面的特性,即是柱面空间.

定义 1 　$(z(t),\sigma(t))$ 称为是第二类周期解是指存在 $T > 0$,使 $z(T) = z(0),\sigma(T) = \sigma(0) + \Delta$.

以二阶系统为例,系统的第一类周期解,即极限环,在相平面和相柱面上都是围绕平衡位置的闭轨,而第二类周期解在相柱面上是围绕柱面的闭轨,在相平面上却不是闭合的,如图 4 所示.它对应的物理图象为一个有旋转部件的机械,转子等速转动而其余物理量作周期运动.



(a) 柱面　　(b) 平面

图 4　两类周期解

Fig. 4　Two kinds of periodic solutions

证明系统存在第二类周期解的思路为

1) 对于特定的二阶系统

$$\dot{\theta} = \eta + \frac{\rho}{\sqrt{\Gamma}}\varphi(\theta),$$

$$\dot{\eta} = -\frac{\lambda}{\sqrt{\Gamma}}\eta - \varphi(\theta),$$

确定其具有第二类周期解的条件,有关二阶系统具有第二类周期解的条件可用定性理论得到;

2) 应用非局部化简技术,以及与高阶系统相关的特征值条件和频域不等式推出高阶系统具有第二类周期解的条件.

所得到的结果可以涵盖 Hayes 等知名结果.在锁相回路系统中,第二类周期解往往对应系统的异步现象,这在工程上是需要避免的.目前尚需解决的问题是第二类周期解的鲁棒性,以及如何设计控制器使系统产生或消除这类周期过程.

3.3 强迫振动(Forced oscillations)

强迫振动的研究是一个关系到受振系统品质的问题,它通常与分岔.混沌密切相关.在机械加工过程中,一方面,强迫振动因不能自然衰减而产生较大危害,另一方面,很多工程装置需要一种强迫振动,如激光器等.对于系统

$$\Sigma:\quad \dot{x} = f(x,d) + g(x,d)w, \tag{9}$$

其中外强迫力 $w\in W := \{w_\mu(t) = \mu\bar{w}(t),\mu\geqslant 0,\ \|\bar{w}\|_\infty\leqslant 1,\bar{w}(t+T) = \bar{w}(t),T>0\}$,扰动 $d\in D_s := \{d(t): d\in L_2,\|d\|_\infty\leqslant\varepsilon\}$.假定 $\dot{x} = f(x,0)$ 原点一致指数渐近稳定且有

$$f(0,0) = 0,\ g(x,0)\neq 0,$$

$$\left.\frac{\partial f(x,d)}{\partial x}\right|_{(0,0)} = A,\ \lambda(A)\subset\mathbb{C}_-,$$

则有结论:存在 $\bar{\mu}$,使 $\mu\in(0,\bar{\mu})$,对 $w_\mu\in W$,系统有唯一以 T 为周期的解.$\bar{w}(t)$ 是谐波输入 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ 时,

$$\|x_\mu(t) - \mu x_L(t)\|\leqslant\rho\mu^2,\ \forall t\geqslant 0.$$

其中 $x_L(t)$ 是线性系统的解,即 $x_L(t) = (\mathrm{j}\omega I - A)^{-1}g(0,0)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$.

通常在研究以上周期过程的稳定性时,经典的做法是利用 Floquet 分析,将周期解代入系统进行线性化,看对应周期系数线性系统的特征指数 p 是否满足 $|p| < 1$.值得注意的问题是:线性化系统依赖于原系统的确定周期解,不便用于含参数不确定或具未建模动态的系统.当系统具有不确定性时,周期系统变为线性系统族,此时可以将周期过程稳定性的研究放在 IQC 的框架下.IQC 是基于 Lur'e 系统

绝对稳定性的框架发展起来的，将系统看成线性环节和非线性环节的反馈联接，如图 5 所示，其中 Δ 代表一类因果算子，它可以有非线性，可以具不确定性，也可以是其它因果算子．系统的输入输出描述为

$$\begin{cases} v = Gu + f, \\ u = \Delta(v) + e. \end{cases}$$

一个基本的鲁棒稳定性结论是

定理 2[14] $G(s) \in \mathbb{R}\mathrm{H}_\infty$，$\Delta$ 是有界因果算子，若有

1) $\tau \in [0,1]$，G-$\tau\Delta$ 的联接适定；

2) 由 $\Pi(\mathrm{j}\omega) = \Pi^*(\mathrm{j}\omega)$ 定义的 IQC

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \begin{bmatrix} \tilde{v}(\mathrm{j}\omega) \\ \tilde{u}(\mathrm{j}\omega) \end{bmatrix}^* \Pi(\mathrm{j}\omega) \begin{bmatrix} \tilde{v}(\mathrm{j}\omega) \\ \tilde{u}(\mathrm{j}\omega) \end{bmatrix} \mathrm{d}\omega \geqslant 0$$

对一切 $u = \tau\Delta(v)$，$0 \leqslant \tau \leqslant 1$ 均成立；

3) 存在 $\varepsilon > 0$，使

$$\begin{bmatrix} G(\mathrm{j}\omega) \\ I \end{bmatrix}^* \Pi(\mathrm{j}\omega) \begin{bmatrix} G(\mathrm{j}\omega) \\ I \end{bmatrix} \leqslant -\varepsilon I,\ \forall \omega \in \mathbb{R},$$

则上述反馈结构内稳定．

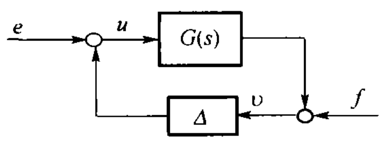


图 5 $G(s)$-Δ

Fig. 5 $G(s)$-Δ

IQC 的优点是 Π 选取的不同可以对应不同的控制问题，绝对稳定性、H_∞、无源、严格正实等均可化成 IQC，并且可以用来研究含不确定性、未知非线性的受摄动系统．应用于强迫振动鲁棒稳定性的研究时，可以将问题归结为上述经典 IQC 框架进行研究，也可以建立一套以 T 为周期的复杂系统的 IQC 框架进行研究．

4 混沌与奇怪吸引子(Chaos and the strange attractors)

有关混沌的研究在上个世纪 70 ~ 80 年代得到蓬勃发展，但至今除了在一些低阶系统，如 Lorenze 系统上有定性结果以外[15]，对于高阶系统，大部分是通过计算和仿真的手段来验证系统中是否存在混沌．混沌的研究具有非常重要的理论及应用价值，如某些工程系统中由于混沌的存在和工程系统的瞬变运动可能使系统运动在短时间不规则的激励下发散，从而给系统的安全带来隐患．对该系统总体性质及其控制的研究，可揭示实际工程系统失稳、产生破坏的机理并对其施以有效的控制．目前，针对一类有实际背景的 Lur'e 型控制系统，利用频域方法研究分岔、同宿轨及混沌产生的机理、判定方法及控制问题，并利用非局部化简技术，通过已知可能产生混沌的系统(如 Lorenze 系统)研究高阶系统已有好的开端，在系统总体性能上探索混沌、奇怪吸引子以及系统参数变动产生的分岔等总体系统性能的条件，研究 Lyapunov 指数的近似估计、奇怪吸引子 Hausdorff 维数的近似估计以及这种估计的鲁棒性，为混沌研究提供了新的手段．

4.1 同宿轨与异宿轨(Homoclinic orbits and heteroclinic orbits)

对于类摆系统

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + b[\varphi(\sigma) - \gamma], \\ \dot{\sigma} = c^{\mathrm{T}} z, \end{cases} \tag{10}$$

设 $\varphi(\sigma)$ 是 Δ-周期函数且具有零平均值，即 $\varphi(\sigma) = \varphi(\sigma + \Delta)$ 且 $\int_0^{\Delta} \varphi(\sigma)\mathrm{d}\sigma = 0$．设系统线性部分的传递函数为 $K(s) = c^{\mathrm{T}}(A - sI)^{-1}b$，引入

$$\Gamma := \lim_{s \to +\infty} sK(s),\ \gamma_0 = \max_{\sigma \in [0,\Delta)} \varphi(\sigma),$$

则有下述结果：

定理 3[9] 若有 $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$，$\gamma_1, \gamma_2 \in [0, \gamma_0)$，使

1° $A + \lambda_1 I$ Hurwitz 且 $\mathrm{Re}K(\mathrm{j}\omega - \lambda_1 I) > 0$，$\forall \omega \in \mathbb{R}$ 与

$$\lim_{\omega \to +\infty} \omega^2 \mathrm{Re}(\mathrm{j}\omega - \lambda_1) > 0;$$

2° $A + \lambda_2 I$ 有一个正实根，$n - 1$ 个具有负实部的根且 $\mathrm{Re}K(\mathrm{j}\omega - \lambda_2) < 0$，$\forall \omega \in \mathbb{R}$ 与

$$\lim_{\omega \to +\infty} \omega^2 \mathrm{Re}(\mathrm{j}\omega - \lambda_1) < 0;$$

3° 二阶系统

$$\dot{\sigma} = \eta,\ \dot{\eta} = -a\eta - \varphi(\sigma) + \gamma,$$

当 $a = \lambda_1/\sqrt{\Gamma}$，$\gamma = \gamma_1$ 是类梯度的；

4° 条件 3°中二阶系统当 $a = \lambda_2/\sqrt{\Gamma}$，$\gamma = \gamma_2$ 时有第二类周期解；

则存在 $\gamma_3 \in (\gamma_1, \gamma_2)$，使系统(10)在 $\gamma = \gamma_3$ 有一个柱空间的同宿轨，即有解 $(z(t), \sigma(t))$ 使

$$\begin{cases} \lim\limits_{t \to +\infty} z(t) = \lim\limits_{t \to -\infty} z(t) = 0, \\ \lim\limits_{t \to +\infty} \sigma(t) = \lim\limits_{t \to -\infty} \sigma(t) + \Delta. \end{cases} \tag{11}$$

事实上式(11)在通常相空间是异宿轨，但由于在柱空间上这一异宿轨刚好将 $t \to +\infty$ 与 $t \to -\infty$ 的两个极限点连接起来，因而成了一种新型的同宿轨．

4.2 Hausdorff 维数(Hausdorff dimension)

混沌现象最主要的特征就是存在相空间的奇怪吸引子，奇怪吸引子的 Hausdorff 维数反映了混沌和

奇怪吸引子的复杂程度,Hausdorff 维数的分析和计算不仅有助于定量研究混沌运动的动态特性,而且可以用来刻划吸引子的几何结构特征.

定义 2　K 为集合,其 Hausdorff 维数记为 $d_{\mathrm{H}}(K)$,令 $\mu(K,d,a)=\inf\sum_i \gamma_i^d$, d,a 给定, $\gamma_i \leqslant a$(覆盖意义下),

$$\mu(K,d)=\lim_{a\to 0}\mu(K,d,a).$$

定义 $\dim_{\mathrm{H}}(K):=d_*=\inf\{d \mid \mu(K,d)=0\}=\sup\{d \mid \mu(K,d)=+\infty\}$.

Hausdorff 维数的特点是: $\mathbb{R}^n$ 中开集的维数一定是 n, 光滑流形的 Hausdorff 维数与直观一致;Cantor 集的维数 $\approx \ln 2/\ln 3\approx 0.6309$. 存在两集合其拓扑积的 Hausdorff 维数超过各自 Hausdorff 维数之和;Hausdorff 维数不是拓扑变换的不变量,但微分同胚可保持其不变.

4.3 Lyapunov 指数(Lyapunov exponent)

混沌系统的另一个主要特征是对初始条件的敏感依赖性,在实际中常用 Lyapunov 指数来定量地刻画这种敏感依赖性.在非线性动力学中,Lyapunov 指数是用来区分混沌和非混沌行为的主要指标.基于微分方程解或基本解矩阵(线性情形)的渐近估计,有以下基于频域不等式描述的结果:

定理 4[9]　$F_i(x,u)$ 是 x,u 的二次型, $Q_i\in\mathbb{R}^{m\times n}$, 系统方程

$$\dot{x}=[A+BU(t)]x. \tag{12}$$

设存在 $\varepsilon>0$ 使有

$$F_k(x,Q^*X)\geqslant \varepsilon\|Q_k^*x\|^2,$$
$$F_k(x,U(k)x)\geqslant 0,\ \forall x\in\mathbb{R}^n,$$

又有数 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$, 使

1) $A+BQ_k^*+\lambda_k I$ 具有不少于 k 个特征值有正实部;

2) $F_k([(\mathrm{j}\omega-\lambda_k)I-A]^{-1}Bu,u)\leqslant 0,\forall u\in\mathbb{C}^n,\omega\in\mathbb{R}$;

则对式(12)的基本解矩阵的奇异值 $\rho_k(t)$, 存在 $\beta_k>0$ 使

$$\rho_k(t)\geqslant\beta_k\mathrm{e}^{-\lambda_k t},\ \forall t\geqslant 0,\ k=1,\cdots,n.$$

由于 $\ln\rho_k(t)$ 反映 Lyapunov 指数,所以这是一个由频域不等式参与刻画的 Lyapunov 指数的估计.

进而研究非线性方程

$$\dot{x}=Ax+bf(x),\ x\in\mathbb{R}^n.$$

引入 $\gamma(x)=\mathrm{tr}(A+B\dfrac{\partial f}{\partial x})$, K 是上述系统的一个紧不变集,即 $x(t,K)=K$.

定理 5[9]　设 (A,B) 可控, (A,Q_k) 可观测,又 $F_k(z,\dfrac{\partial f}{\partial x}z)\geqslant 0,\forall z\in\mathbb{R}^n,x\in K$, 设前一定理两条件成立,若有 m 是自然数, $s\in[0,1]$ 使

$$\gamma(x)+(1-s)\lambda_{m+1}+\sum_{j=m+2}^{n}\lambda_j<0,\ \forall x\in K$$

成立,则 $\dim_{\mathrm{H}}(K)<m+s$. 特别当 $m=2,s=0$, 且 $\dim_{\mathrm{H}}(K)<2$ 时,吸引子不是奇怪的.

上述方法在估计奇怪吸引子的 H 维数时有较好的结果,例如对于 Lorenz 系统

$$\dot{x}=-dx+dy,\ \dot{y}=rx-y-xz,\ \dot{z}=-bz+xy,$$

若取 $d=16,b=4,r=40$, 则 $\dim_{\mathrm{H}}(K)$ 的估计有

$$\underset{\text{(Leonov 上述方法)}}{2.431}\leqslant\underset{\text{(Teman 估计)}}{2.566}\leqslant\underset{\text{(Smith 估计)}}{2.678}.$$

频域方法在混沌研究中的作用(非特征根方法)大致有以下几点:

1) 双态性是不存在混沌的充分条件,具有双态性的系统不存在混沌和奇怪吸引子,系统的双态性可用频域不等式来判定;

2) 表征混沌行为的 Lyapunov 指数和 Hausdorff 维数也可通过频域不等式进行估计;

3) 利用 KYP 引理所揭示的频域与时域描述的本质联系,可以将频域不等式化成线性或双线性矩阵不等式,并由此进行鲁棒性分析和控制器设计.

5 结论(Conclusions)

Lyapunov 稳定性理论的诞生至今已有 110 年,绝对稳定性的研究也有 60 年,这期间产生这些理论的物理背景发生了变化,系统复杂程度大大增加,所需解决的问题不再限于单平衡点的稳定性.非线性系统的复杂性表现为:由于平衡位置不单一,使得其动力学行为对系统的初始状态有很强的敏感性和依赖性;动力学模式复杂多样,除收敛及无界外,还可能存在各种时空周期、非周期振动乃至混沌运动;其动力学模式对微小的外界激励十分敏感.对这类复杂非线性系统的研究,已远远超出了 Lyapunov 稳定性的研究范畴,而进入研究总体性质的时期.从控制的角度考虑来研究这类问题应着重如下 3 个方面:

1) 基于控制通道的系统总体性质的控制.这时控制的目标不再仅是调节和跟踪,而是总体行为的构造,如系统周期或非周期振动的同步化控制,渐进行为的控制改造,包括平衡点、周期轨道、分岔以及奇怪吸引子,混沌运动之间的控制转化及其转化条件等.

2) 系统总体性质及其鲁棒性分析.一种物理现

象的稳定呈现,离不开该现象所依赖性质的鲁棒性.系统分析所研究的问题不仅是平衡位置附近Lyapunov意义下的稳定性,而更强调总体性质及其鲁棒性、解的渐进行为模式及对不确定扰动的敏感性的判别,如有界性、收敛性、周期解及拟周期解的存在及类型、混沌等的产生条件及其鲁棒性.

3) 最具挑战性的是基于控制通道的鲁棒控制设计.它不仅要求受控系统具有所要求的总体性质,而且要求该性质及系统的性能指标对不确定扰动具有鲁棒性.

这些都是非线性控制系统研究所面临的崭新课题,具有相当的难度.目前国内有关系统总体性质及其控制的研究还很少见到,国际上的研究结果大多只限于某些总体性质的分析.有关总体性质的鲁棒性以及鲁棒控制器设计的研究目前还基本处于空白.除了混沌控制方面的部分研究成果外,总体性质控制方面的研究工作开展得也很不充分,这方面大量的控制问题有待解决.针对上述问题,利用有限维控制理论与方法,特别是基于KYP引理并经过改造后的频域方法,可为系统总体性质的鲁棒性分析与控制、奇怪吸引子、同宿轨道与参数划分、Hausdorff维数与Lyapunov指数等方面的研究提供研究手段,并有望在其中若干问题上取得突破.从控制科学的发展来看,回到更复杂的工程系统中去研究科学进展的新问题是控制科学的出路.

参考文献(References):

[1] LUR'E A I, POSTNIKOV V N. On the theory of stability of control systems [J]. *Prikladnaya Matematika Mehkhanika*, 1994, 8(3): 246 - 248.

[2] POPOV V. Absolute stability of non-linear systems of automatic control [J]. *Automation and Remote Control*, 1962, 22(8): 857 - 875.

[3] YAKUBOVICH V A. A solution of some matrix inequalities which appear in the automatic control theory [J]. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1962, 143(6): 1304 - 1307.

[4] KALMAN R E. Lyapunov functions for the problem of Lur'e in automatic control [J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 1963, 49(2): 201 - 205.

[5] 黄琳. 稳定性与鲁棒性的理论基础[M]. 北京:科学出版社, 2003.
(HUANG Lin. *Theoretic Foundation of Stability and Robustness* [M]. Beijing: Science Press, 2003.)

[6] CHUA L O, GREEN D N. A qualitative analysis of the behavior of dynamic nonlinear networks: stability of autonomous networks [J]. *IEEE Trans on Circuits and Systems I - Fundamental Theory and Applications*, 1976, 23(6): 355 - 379.

[7] CHEN G, DONG X. *From Chaos to Order: Methodologies, Perspectives and Applications* [M]. Singapore: World Scientific, 1998.

[8] RANTZER A. On the Kalman-Yakubovich-Popov lemma [J]. *Systems & Control Letters*, 1996, 28(1): 7 - 10.

[9] LEONOV G A, PONOMARENKO D V, SMIRNOVA V B. *Frequency-Domain Methods for Nonlinear Analysis* [M]. Singapore: World Scientific, 1996.

[10] YANG Y, HUANG L. H_∞ controller synthesis for pendulum-like systems[J]. *Systems & Control Letters*, 2003, 50(4): 263 - 276.

[11] YANG Y, FU R, HUANG L. Robust analysis and synthesis for a class of uncertain nonlinear systems with multiple equilibria [J]. *Systems & Control Letters*, 2004, 53(2): 89 - 105.

[12] DUAN Z S, HUANG L, WANG L, et al. Some applications of small gain theorem to interconnected systems [J]. *Systems & Control Letters*, 2004, 52(3/4): 263 - 273.

[13] WANG J Z, HUANG L, DUAN Z S. Design of controller for a class of pendulum-like system guaranteeing dichotomy [J]. *Automatica*, 2004, 40(6): 1011 - 1016.

[14] MEGRETSKI A, RANTZER A. System analysis via integral quadratic constraints [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1997, 42(6): 819 - 830.

[15] 陈关荣, 吕金虎. Lorenz系统族的动力学分析、控制与同步[M]. 北京:科学出版社, 2003.
(CHEN Guanrong, LÜ Jinhu. *Dynamics of the Lorenz System Family: Analysis, Control and Synchronization* [M]. Beijing: Science Press, 2003.)

作者简介:

黄 琳 (1935 —),男,教授,中国科学院院士,研究领域包括稳定性理论与应用、鲁棒控制、具柔性结构系统的控制、复杂控制系统理论和相关的应用数学问题,E-mail: hl35hj75@pku.edu.cn;

杨 莹 (1973 —),女,讲师,研究领域包括鲁棒控制、非线性系统控制理论,E-mail: yy@mech.pku.edu.cn;

耿志勇 (1957 —),男,教授,研究领域包括非线性系统的鲁棒控制、复杂力学系统的控制,E-mail: zygeng@pku.edu.cn;

王金枝 (1963 —),女,副教授,研究领域包括鲁棒控制、受限系统控制,E-mail: jinzhiw@pku.edu.cn;

段志生 (1972 —),男,副教授,研究领域包括线性系统理论、控制系统的鲁棒性、大系统分散协调控制,E-mail: dzsheng@mech.pku.edu.cn.