

文章编号: 1000-8152(2004)06-1003-04

## 基于 Kalman 滤波的统一的 Wiener 状态滤波器

邓自立, 高媛, 王好谦

(黑龙江大学 自动化系, 黑龙江 哈尔滨 150080)

**摘要:** 对于带相关噪声系统, 基于稳态 Kalman 滤波器和自回归滑动平均 (ARMA) 新息模型, 提出了统一的渐近稳定的 Wiener 状态滤波器, 可统一处理状态滤波, 平滑和预报问题. 它们构成了一种新的时域 Wiener 滤波算法. 揭示了 Kalman 滤波器与 Wiener 滤波器之间的关系. 一个目标跟踪系统的仿真例子说明了它们的有效性.

**关键词:** 相关噪声系统; 状态估计; Wiener 滤波器; Kalman 滤波方法; 时域 Wiener 滤波方法

**中图分类号:** O211 **文献标识码:** A

## Unified Wiener state filters based on Kalman filtering

DENG Zi-li, GAO Yuan, WANG Hao-qian

(Department of Automation, Heilongjiang University, Harbin Heilongjiang 150080, China)

**Abstract:** Based on the steady-state Kalman filter and autoregressive moving average (ARMA) innovation model, the unified asymptotically stable Wiener state filters are presented for systems with correlated noises, which can handle the state filtering, smoothing and prediction problem in a unified framework. They constitute a new time-domain Wiener filtering algorithm. The relation between the Kalman filters and Wiener filters is discovered. A simulation example for a target tracking system has shown their effectiveness.

**Key words:** systems with correlated noises; state estimation; Wiener filters; Kalman filtering method; time-domain Wiener filtering approach

### 1 引言 (Introduction)

经典 Kalman 滤波理论<sup>[1]</sup>不能统一处理状态滤波、平滑和预报问题, 且非稳态最优 Kalman 平滑器的计算较为复杂, 要求计算最优初值和在线计算误差方差阵的逆矩阵. 近年来, 用现代时间序列分析方法<sup>[2]</sup>已提出了上述问题的一些统一解<sup>[2~5]</sup>. 但缺点是: 或要求计算最优初值<sup>[3]</sup>, 或要求状态转移阵的变换<sup>[4]</sup>, 或要求多项式矩阵的左素和右素分解<sup>[5]</sup>. 这些要求增加了计算负担. 对此, 本文基于稳态 Kalman 滤波器, 提出了 ARMA 新息模型, 进而提出了统一的渐近稳定的 Wiener 状态滤波器, 可统一处理状态滤波、平滑和预报问题, 且克服了上述缺点. 本文将文献[6]的结果推广到带相关噪声系统. 同文献[5]和文献[7]的时域 Wiener 滤波器相比, 它们构成了一种新的基于 Kalman 滤波的时域 Wiener 滤波算法.

### 2 问题阐述 (Problem formulation)

考虑线性离散随机系统

$$x(t+1) = \Phi x(t) + \Gamma w(t), \quad (1)$$

$$y(t) = Hx(t) + v(t). \quad (2)$$

其中状态  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , 观测  $y(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $\Phi, \Gamma$  和  $H$  为常阵.

**假设 1**  $w(t) \in \mathbb{R}^r$  和  $v(t) \in \mathbb{R}^m$  是带零均值的相关白噪声,

$$E \left\{ \begin{bmatrix} w(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^T(j) & v^T(j) \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \delta_{ij}. \quad (3)$$

其中  $E$  为均值号,  $T$  为转置号,  $\delta_{ii} = 1, \delta_{ij} = 0 (i \neq j)$ .

**假设 2** 初始观测时刻  $t_0 = -\infty$ .

为了把系统(1), (2)化为不相关噪声系统, 由式(2)有式(1)等价于

$$x(t+1) = \Phi x(t) + \Gamma w(t) + J[y(t) - Hx(t) - v(t)]. \quad (4)$$

其中  $J$  为待定矩阵. 式(4)可化为

$$x(t+1) = \bar{\Phi} x(t) + Jy(t) + \bar{w}(t), \quad (5)$$

$$\bar{\Phi} = \Phi - JH, \quad \bar{w}(t) = \Gamma w(t) - Jv(t). \quad (6)$$

于是原系统等价于系统式(5)和(2). 置

$$E[\bar{w}(t)v^T(t)] = \Gamma S - JR = 0, \quad (7)$$

引出选择  $J$  为

$$J = \Gamma SR^{-1}, \quad (8)$$

保证了  $\bar{w}(t)$  和  $v(t)$  是不相关白噪声,且  $\bar{w}(t)$  有方差阵

$$\bar{Q} = \Gamma(Q - SR^{-1}S^T)\Gamma^T. \quad (9)$$

**假设 3** ( $\bar{\Phi}, H$ ) 为完全可观对.

对于带不相关噪声系统式(5)和(2),应用标准稳态 Kalman 滤波算法<sup>[1]</sup>有

$$\hat{x}(t+1|t+1) = \hat{x}(t+1|t) + K\epsilon(t+1), \quad (10)$$

$$\hat{x}(t+1|t) = \bar{\Phi}\hat{x}(t|t) + Jy(t), \quad (11)$$

$$\epsilon(t+1) = y(t+1) - H\hat{x}(t+1|t), \quad (12)$$

$$K = \Sigma H^T Q_\epsilon^{-1}, Q_\epsilon = H\Sigma H^T + R. \quad (13)$$

其中新息  $\epsilon(t)$  是零均值,方差阵为  $Q_\epsilon$  的白噪声, $\Sigma$  是如下稳态 Riccati 方程的唯一对称正定解:

$$\Sigma = \bar{\Phi}[\Sigma - \Sigma H^T(H\Sigma H^T + R)^{-1}H\Sigma]\bar{\Phi}^T + \bar{Q}. \quad (14)$$

它可用迭代算法求解<sup>[1]</sup>.由式(10)~(13)有稳态 Kalman 预报器

$$\hat{x}(t+1|t) = \Psi_p \hat{x}(t|t-1) + K_p y(t), \quad (15)$$

$$\Psi_p = \bar{\Phi}(I_n - KH), K_p = \bar{\Phi}K + J. \quad (16)$$

其中  $\Psi_p$  为稳定矩阵<sup>[1]</sup>,即  $\Psi_p$  的特征值位于单位圆内.式(15)可写成 Wiener 滤波器形式

$$\hat{x}(t+1|t) = (I_n - q^{-1}\Psi_p)^{-1}K_p y(t). \quad (17)$$

其中  $q^{-1}$  为单位滞后算子, $q^{-1}\theta(t) = \theta(t-1)$ ,  $I_n$  为  $n \times n$  单位阵.

Wiener 状态估计问题是:基于观测  $(y(t+N), y(t+N-1), \dots)$  求  $x(t)$  的稳态最优线性最小方差状态估值器  $\hat{x}(t|t+N)$ ,它们具有以  $y(t+N)$  作为输入的传递矩阵表达式或具有以  $y(t+N)$  作为输入的 ARMA 递推滤波器形式.对  $N=0, N>0$  或  $N<0$ ,各称  $\hat{x}(t|t+N)$  为 Wiener 状态滤波器、平滑器或预报器,且通常统称  $\hat{x}(t|t+N)$  为 Wiener 状态滤波器或估值器.

### 3 统一的 Wiener 状态滤波器 (Unified Wiener state filters)

**引理 1** 系统(1),(2)在假设 1~3 下有 ARMA 新息模型

$$A(q^{-1})y(t) = D(q^{-1})\epsilon(t). \quad (18)$$

其中定义多项式  $\Psi(q^{-1})$ , 多项式矩阵  $A(q^{-1})$  和  $D(q^{-1})$  为

$$\Psi(q^{-1}) = \det(I_n - q^{-1}\Psi_p), \quad (19)$$

$$D(q^{-1}) = \Psi(q^{-1})I_m, \quad (20)$$

$$A(q^{-1}) = D(q^{-1}) - H \text{adj}(I_n - q^{-1}\Psi_p) K_p q^{-1}. \quad (21)$$

其中 adj 为伴随阵符号,且新息  $\epsilon(t)$  有 Wiener 滤波器形式的表达式

$$\epsilon(t) = \Psi^{-1}(q^{-1})A(q^{-1})y(t). \quad (22)$$

证 将式(17)代入式(12)中且应用定义  $(I_n - q^{-1}\Psi_p)^{-1} = \text{adj}(I_n - q^{-1}\Psi_p)/\det(I_n - q^{-1}\Psi_p)$ , 立刻得式(18)~(21),由式(18)和(20)得式(22).

**引理 2** 系统(1),(2)在假设 1~3 下有稳态最优 Kalman 平滑器

$$\hat{x}(t|t+N) = \hat{x}(t|t+N-1) + M_N \epsilon(t+N), N \geq 0 \quad (23)$$

带初值  $\hat{x}(t|t-1)$ ,且平滑增益  $M_N$  为

$$M_N = \Sigma[(I_n - KH)^T \bar{\Phi}^T]^N H^T Q_\epsilon^{-1}. \quad (24)$$

证 应用射影公式<sup>[1]</sup>有式(23),其中

$$M_N = E[x(t)\epsilon^T(t+N)]Q_\epsilon^{-1}. \quad (25)$$

由式(2)和(12)有

$$\epsilon(t) = H\hat{x}(t|t-1) + v(t), \quad (26)$$

其中  $\hat{x}(t|t-1) = x(t) - \hat{x}(t|t-1)$ .由式(5)和(11)有

$$\hat{x}(t+1|t) = \bar{\Phi}\hat{x}(t|t) + \bar{w}(t). \quad (27)$$

其中  $\hat{x}(t|t) = x(t) - \hat{x}(t|t)$ .将式(26)代入式(10)引出

$$\tilde{x}(t|t) = [I_n - KH]\tilde{x}(t|t-1) - Kv(t). \quad (28)$$

将式(28)代入式(27)有

$$\begin{aligned} \hat{x}(t+1|t) = \\ \bar{\Phi}[I_n - KH]\hat{x}(t|t-1) - \bar{\Phi}Kv(t) + \bar{w}(t). \end{aligned} \quad (29)$$

由式(29)迭代引出

$$\begin{aligned} \hat{x}(t+N|t+N-1) = \\ [\bar{\Phi}(I_n - KH)]^N \hat{x}(t|t-1) + \\ \sum_{i=t+1}^{t+N} [\bar{\Phi}(I_n - KH)]^{t+N-i} [-\bar{\Phi}Kv(i-1) + \bar{w}(i-1)]. \end{aligned} \quad (30)$$

应用式(25)和(26)且注意  $x(t)$  不相关于  $v(t+N)(N \geq 0)$ , 则有

$$M_N = E[x(t)\hat{x}^T(t+N|t+N-1)]Q_\epsilon^{-1}. \quad (31)$$

将式(30)代入式(31),注意  $x(t)$  不相关于  $v(t), v(t+1), \dots, \bar{w}(t), \bar{w}(t+1), \dots$ , 且  $x(t) = \hat{x}(t|t-1) + \tilde{x}(t|t-1), \tilde{x}(t|t-1)$  不相关(正交)于  $\hat{x}(t|t-1)$ , 则得式(24),其中  $\Sigma = E[\tilde{x}(t|t-1)\tilde{x}^T(t|t-1)]$ .

证毕.

**定理** 对系统(1),(2)在假设 1~3 下有统一的渐近稳定的 ARMA 递推 Wiener 状态滤波器  $\hat{x}(t|t+N)$  ( $N=0, N>0$  或  $N<0$ ) 为

$$\Psi_N(q^{-1})\hat{x}(t|t+N) = K_N(q^{-1})y(t+N) \quad (32)$$

或表示为传递函数形式

$$\hat{x}(t|t+N) = \Psi_N^{-1}(q^{-1})K_N(q^{-1})y(t+N). \quad (33)$$

其中对  $N=0$  定义多项式矩阵  $\Psi_0(q^{-1})$  和  $K_0(q^{-1})$  为

$$\Psi_0(q^{-1}) = (I_n - q^{-1}\Psi_f), \Psi_f = (I_n - KH)\bar{\Phi}, \quad (34)$$

$$K_0(q^{-1}) = K + (I_n - KH)Jq^{-1}. \quad (35)$$

对  $N>0$  定义

$$\Psi_N(q^{-1}) = \Psi(q^{-1})I_n, \quad (36)$$

$$K_N(q^{-1}) = \text{adj}(I_n - q^{-1}\Psi_p)K_p q^{-N-1} + M_N(q^{-1})A(q^{-1}), \quad (37)$$

$$M_N(q^{-1}) = \sum_{i=0}^N M_i q^{i-N}; \quad (38)$$

对  $N<0$  定义

$$\Psi_{-1}(q^{-1}) = I_n - q^{-1}\Psi_p, K_{-1}(q^{-1}) = K_p, \quad (39)$$

$$\Psi_N(q^{-1}) = \Psi(q^{-1})I_n, \quad (40)$$

$$K_N(q^{-1}) = \Phi^{-N-1} \text{adj}(I_n - q^{-1}\Psi_p)K_p. \quad (41)$$

**证** 对  $N=0$ , 由式(10)~(12)易求出稳态 Kalman 滤波器

$$\begin{aligned} \hat{x}(t|t) &= \Psi_f \hat{x}(t-1|t-1) + Ky(t) + (I_n - KH)Jy(t-1). \end{aligned} \quad (42)$$

其中  $\Psi_f$  由式(34)定义. 由式(42)立刻引出式(32)和式(34),(35). 对  $N>0$ , 由式(23)迭代可得

$$\hat{x}(t|t+N) = \hat{x}(t|t-1) + \sum_{i=0}^N M_i \varepsilon(t+i). \quad (43)$$

应用定义式(38)有

$$\hat{x}(t|t+N) = \hat{x}(t|t-1) + M_N(q^{-1})\varepsilon(t+N). \quad (44)$$

由式(22)有  $\varepsilon(t+N) = \Psi^{-1}(q^{-1})A(q^{-1})y(t+N)$ , 将其代入式(44), 并将式(17)也代入式(44)之后, 两边乘以  $\Psi(q^{-1})$  便得式(32)和式(36),(37). 对  $N<0$ , 当  $N=-1$  时由式(17)立刻得式(32)和(39). 当  $N<-1$  时, 由式(1)和射影性质有

$$\begin{cases} \hat{x}(t|t-2) = \Phi \hat{x}(t-1|t-2), \\ \hat{x}(t|t-3) = \Phi \hat{x}(t-1|t-3) = \Phi^2 \hat{x}(t-2|t-3), \\ \vdots \\ \hat{x}(t|t+N) = \Phi^{-N-1} \hat{x}(t+N+1|t+N). \end{cases} \quad (45)$$

应用式(17)有

$$\hat{x}(t|t+N) = \Phi^{-N-1}(I_n - q^{-1}\Psi_p)^{-1}K_p y(t+N). \quad (46)$$

它引出式(32)和式(40),(41). 因  $\Psi_p$  为稳定矩阵, 则  $\Psi(q^{-1})$  是稳定的多项式, 注意<sup>[1]</sup>  $\det(I_n - q^{-1}\Psi_p) = \det(I_n - q^{-1}\Psi_f)$ , 故所有  $\Psi_N(q^{-1})$  均为稳定的多项式矩阵, 即  $\det \Psi_N(x)$  的所有零点位于单位圆外. 因此 Wiener 滤波器式(32)是渐近稳定的.

证毕.

**注** 由于 Wiener 状态滤波器式(32)是渐近稳定的, 因而其初始状态值可任意选取, 且其影响将渐渐消失, 忽略不计, 避免了计算最优初值.

#### 4 仿真例子 (Simulation example)

考虑带有色观测噪声的目标跟踪系统

$$x(t+1) = \Phi x(t) + \Gamma w(t), \quad (47)$$

$$z(t) = H_0 x(t) + \eta(t), \quad (48)$$

$$\eta(t+1) = \alpha \eta(t) + \xi(t), \quad (49)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} 0.5T^2 \\ T \end{bmatrix}, H_0 = [1 \ 0]. \quad (50)$$

其中状态  $x(t) = [x_1(t), x_2(t)]^T$ ,  $T$  为采样周期,  $x_1(t), x_2(t)$  和  $w(t)$  各为运动目标(导弹、飞机、坦克等)在时刻  $tT$  的位置, 速度和加速度.  $z(t)$  为对位置  $x_1(t)$  的观测,  $\eta(t)$  为有色观测噪声,  $\alpha$  为有色噪声模型参数. 设  $w(t)$  和  $\xi(t)$  为零均值、方差各为  $\sigma_w^2$  和  $\sigma_\xi^2$  的独立高斯白噪声. 问题是状态  $x(t)$  的 Wiener 预报器  $\hat{x}(t|t-2)$  和 Wiener 平滑器  $\hat{x}(t|t+2)$ .

引入新的观测过程

$$y(t) = z(t+1) - \alpha z(t), \quad (51)$$

则式(47)和(48)化为带相关噪声系统

$$x(t+1) = \Phi x(t) + \Gamma w(t), \quad (52)$$

$$y(t) = Hx(t) + v(t). \quad (53)$$

其中定义

$$H = H_0 \Phi - \alpha H_0, v(t) = H_0 \Gamma w(t) + \xi(t). \quad (54)$$

可求得  $Q_w = \sigma_w^2, Q_v = \sigma_w^2 H_0 \Gamma \Gamma^T H_0^T + \sigma_\xi^2, S = \sigma_w^2 \Gamma^T H_0^T$ . 在仿真中取  $T = 0.75, \sigma_w^2 = 1, \sigma_\xi^2 = 9, \alpha = 0.5$ . 由式(51)看到, 由  $(y(t), y(t-1), \dots)$  生成的线性空间等于由  $(z(t+1), z(t), \dots)$  生成的线性空

间,因而问题是对系统(52),(53)求平滑器  $\hat{x}(t|t+1)$  和预报器  $\hat{x}(t|t-3)$ . 仿真例子如图1~图4所示,其中实线为真实值,虚线为估值.可看到平滑器精度高于预报器精度.

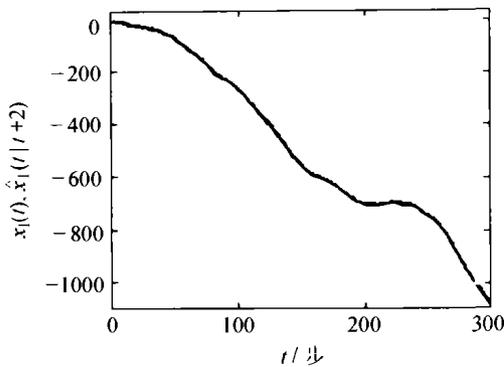


图1  $x_1(t)$ 和Wiener状态平滑器  $\hat{x}_1(t|t+2)$   
Fig. 1  $x_1(t)$  and Wiener state smoother  $\hat{x}_1(t|t+2)$

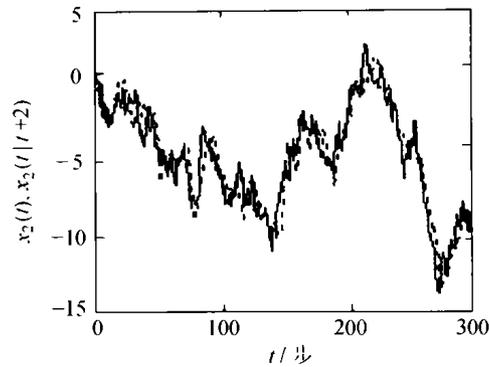


图2  $x_2(t)$ 和Wiener状态平滑器  $\hat{x}_2(t|t+2)$   
Fig. 2  $x_2(t)$  and Wiener state smoother  $\hat{x}_2(t|t+2)$

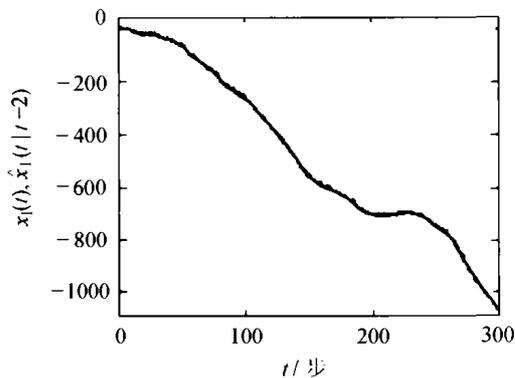


图3  $x_1(t)$ 和Wiener状态预报器  $\hat{x}_1(t|t-2)$   
Fig. 3  $x_1(t)$  and Wiener state predictor  $\hat{x}_1(t|t-2)$

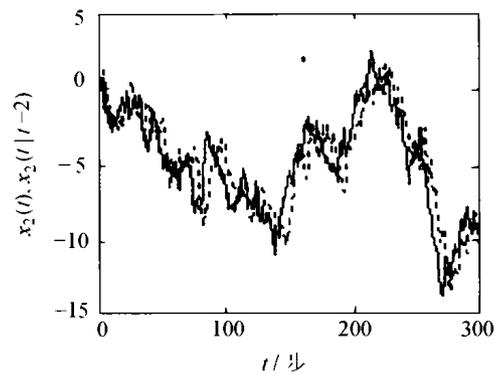


图4  $x_2(t)$ 和Wiener状态预报器  $\hat{x}_2(t|t-2)$   
Fig. 4  $x_2(t)$  and Wiener state predictor  $\hat{x}_2(t|t-2)$

## 5 结论(Conclusion)

作者发现了稳态 Kalman 估值器和 Wiener 状态估值器之间的一种重要的变换关系.通过 ARMA 新息模型,稳态 Kalman 估值器可变换为等价的 Wiener 状态估值器.所提出的 Wiener 状态估值器可统一处理状态滤波、平滑和预报问题,且具有渐近稳定性.因为这种 Wiener 状态估值器等价于相应的稳态最优(线性最小方差) Kalman 估值器,因而具有最优性.它们克服了文献[1~5]的状态估值器的缺点,同文献[5]和文献[7]的时域 Wiener 滤波方法相比,它们构成了一种基于 Kalman 滤波的新的时域 Wiener 滤波算法.

## 参考文献(References):

- [1] KAILATH T, SAYED A H, HASSIBI S. *Linear Estimation* [M]. New Jersey: Prentice-Hall, 2000.
- [2] DENG Z L, ZHANG H S, LIU S J, et al. Optimal and self-tuning white noise estimators with applications to deconvolution and filtering problems [J]. *Automatica*, 1996, 32(2): 199-216.
- [3] DENG Z L, LIU Y M. Descriptor Kalman estimators [J]. *Int J of*

*Systems Science*, 1999, 30(11): 1205-1212.

- [4] ZHANG H S, XIE L H, SOH Y C. Optimal recursive filtering, prediction and smoothing for singular stochastic discrete-time systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1999, 44(11): 2154-2158.
- [5] DENG Z L, XU Y. Descriptor Wiener state estimations [J]. *Automatica*, 2000, 36(10): 1761-1766.
- [6] DENG Z L, SUN S L. Wiener state estimators based on Kalman filtering [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2004, 30(1): 116-120.
- [7] 邓自立, 孙书利. 基于 Kalman 滤波的带相关噪声系统统一的 Wiener 状态估值器 [J]. *控制理论与应用*, 2003, 20(4): 573-576.

(DENG Zili, SUN Shuli. Wiener state estimators based on Kalman filtering for systems with correlated noises [J]. *Control Theory & Applications*, 2003, 20(4): 573-576.)

## 作者简介:

邓自立 (1938—),男,黑龙江大学应用数学研究所和自动化系教授,主要研究方向为状态估计、信号处理、信息融合、最优滤波和现代时间序列分析等, E-mail: dzl@hlju.edu.cn;

高媛 (1978—),女,黑龙江大学控制理论与控制工程专业硕士研究生,主要研究方向为信息融合状态估计、信号处理、最优滤波;

王好谦 (1976—),男,哈尔滨工业大学控制理论与控制工程专业博士研究生,主要研究方向为状态估计、最优滤波等.