文章编号：1000-8152(2005)01-0161-03

具有时滞的线性区间动力系统的鲁棒稳定性

宋乾坤
（湖州师范学院 数学系，浙江 湖州 313000）

摘要：利用Lyapunov原理，给出了具有时滞的线性区间动力系统鲁棒稳定的一些充分条件，推广和改进了前人关于具有时滞的线性区间动力系统的鲁棒稳定性的相关结论，并举例说明了本文结果不仅保守性小，且计算简单.

关键词：区间矩阵；鲁棒稳定性；时滞；矩阵正定
中图分类号：O175.21；TP13 **文献标识码**：A

On robust stability of linear interval systems with time-delay

SONG Qian-kun
(Department of Mathematics, Huzhou University, Huzhou Zhejiang 313000, China)

Abstract: By employing Lyapunov method, some results for robust stability of linear interval systems with time-delay are derived and some previous criteria for stability of linear systems with time-delay are further developed. The numerical example shows that our result is not only less conservative, but also simple and easy to implement.

Key words: interval matrix; robust stability; time-delay; positive definite matrix

1 引言(Introduction)

大量的工程系统都含有时滞，时滞存在是系统不稳定的一个重要因素，因而对时滞系统稳定性的研究引起了许多学者的广泛关注[1~4].另一方面，在实际工程中还存在着各种不确定性，其中一类不确定性可描述为系统的状态矩阵的各个元素在一些确定的区间内变化，这就是所谓的区间系统，这种摄动虽不改变系统的阶次，但由于它的存在可以使原来以标称系统设计的性能指标衰退，甚至破坏系统的稳定性.近年来关于区间系统鲁棒稳定性分析取得了许多结果[5,6]，然而有些结果要么不容易用来检验稳定性，要么保守性较大，并且难于用来进一步研究区间控制系统的鲁棒控制问题. 本文利用矩阵理论和Lyapunov原理，给出了具有时滞的线性区间动力系统鲁棒稳定的一些充分条件，推广和改进了现有文献的相关结论，并举例说明了本文结果不仅保守性小，且计算简单.

2 问题描述(Problem fomulation)

考虑下述具有时滞的线性区间动力系统

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=N[B,C]x(t)+N[U,V]x(t-h),\ t>0,\\ x(t)=\phi(t),\ -h\leqslant t\leqslant 0,\end{cases}\tag{1}$$

其中 $x\in\mathbb{R}^n$ 为状态向量，$N[B,C]$ 和 $N[U,V]$ 是 n 阶区间矩阵，$h>0$ 为常数，$\phi(t)$ 是连续的向量初值函数，$B=(b_{ij})_{n\times n}$，$C=(c_{ij})_{n\times n}$，$U=(u_{ij})_{n\times n}$，$V=(v_{ij})_{n\times n}$.

本文用 $\|x\|$ 表示向量的欧氏范数 $\|x\|=\sqrt{(x^{\mathrm{T}}x)}$，$\|A\|$ 表示矩阵 A 的谱范数 $\|A\|=\sqrt{\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A)}$.

定义1 称系统(1)是鲁棒稳定的，如果对任意 $A\in N[B,C]$，$A_1\in N[U,V]$，系统

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+A_1x(t-h)\tag{2}$$

是稳定的.

定义2 称系统(1)具有稳定度 $\beta>0$，如果存在 $k>0$，使得系统(1)的解 $x(\cdot)$ 对所有的 $t_1,t_2\in\mathbb{R}^+$ 且 $t_1\leqslant t_2$，满足 $\|x_{t_2}\|\leqslant k\|x_{t_1}\|\exp(-\beta(t_2-t_1))$.

设 $A_0=\frac{1}{2}(B+C)$，$K=\frac{1}{2}(C-B)=(k_{ij})$，则有

引理1[6] 区间矩阵 $A\in N[B,C]$ 可等价地描述为

$$A=A_0+E\Sigma F,\ \Sigma\in\Sigma^{*},$$

收稿日期：2003-06-24；收修改稿日期：2004-04-26.
基金项目：教育部科学技术研究重点项目(03051)；浙江省自然科学基金资助项目(M103087)；湖州市自然科学基金资助项目(2004SZX0703).

其中

$$E = [\sqrt{k_{11}}e_1 \cdots \sqrt{k_{1n}}e_1 \cdots \sqrt{k_{n1}}e_n \cdots \sqrt{k_{nn}}e_n],$$

$$F = [\sqrt{k_{11}}e_1 \cdots \sqrt{k_{1n}}e_n \cdots \sqrt{k_{n1}}e_1 \cdots \sqrt{k_{nn}}e_n]^{\mathrm{T}},$$

$$\Sigma^{*} = \{\Sigma \in \mathbb{R}^{n^2\times n^2} \mid \Sigma = \mathrm{diag}(\varepsilon_{11},\cdots,\varepsilon_{1n},\cdots,\varepsilon_{n1},\cdots,\varepsilon_{nn}), \ |\varepsilon_{ij}| \leqslant 1, i,j = 1,2,\cdots,n\},$$

这里 $e_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 为 n 阶单位矩阵 I 的第 i 列向量,因此 E 为 $n \times n^2$ 矩阵,F 为 $n^2 \times n$ 矩阵,显然对任意 $\Sigma \in \Sigma^{*}$,有 $\Sigma^{\mathrm{T}}\Sigma \leqslant I$ 成立.

假设区间矩阵 $N[B,C]$ 是稳定的,则 A_0 稳定,从而存在正定矩阵 P 使得

$$A_0^{\mathrm{T}}P + PA_0 = -2I.$$

3 主要结果(Main results)

定理 1 如果存在常数 $\lambda > 0$, 使得矩阵

$$(2 - 2\alpha\|P\|\|M\|)I - \frac{1}{\lambda}PEE^{\mathrm{T}}P - \lambda F^{\mathrm{T}}F$$

正定,其中 $\alpha = \sqrt{\dfrac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}$, $M = (m_{ij})_{n\times n}$, $m_{ij} = \max(|u_{ij}|, |v_{ij}|), i,j = 1,2,\cdots,n$, 则系统(1)是鲁棒稳定的.

证 由引理 1 知可将系统(2)改写为

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + E\Sigma Fx(t) + A_1x(t-h), \tag{3}$$

构造 Lyapunov 泛函 $V(x(t)) = x^{\mathrm{T}}(t)Px(t)$, 则 $V(x(t))$ 沿系统(3)的解对时间的导数为

$$\dot{V}(x(t)) = x^{\mathrm{T}}(t)(A_0^{\mathrm{T}}P + PA_0)x(t) + 2x^{\mathrm{T}}(t)PE\Sigma Fx(t) + 2x^{\mathrm{T}}(t)PA_1x(t-h),$$

应用如下两个不等式

$$2x^{\mathrm{T}}y \leqslant \frac{1}{\lambda}x^{\mathrm{T}}x + \lambda y^{\mathrm{T}}y,\ \Sigma^{\mathrm{T}}\Sigma \leqslant I, \tag{4}$$

$$\dot{V}(x(t)) \leqslant -2x^{\mathrm{T}}(t)x(t) + \frac{1}{\lambda}x^{\mathrm{T}}(t)PEE^{\mathrm{T}}Px(t) + \lambda x^{\mathrm{T}}(t)F^{\mathrm{T}}Fx(t) + 2\|P\|\|M\|\|x(t)\|\|x(t-h)\|,$$

应用 Razumikhin 方法, 假定对任意实数 $q > 1$, $V(x(\zeta)) < q^2V(x(t)), t - 2h \leqslant \zeta \leqslant t$, 则 $\|x(\zeta)\| \leqslant q\alpha\|x(t)\|$, 从而

$$\dot{V}(x(t)) \leqslant -x^{\mathrm{T}}(t)(2I - \frac{1}{\lambda}PEE^{\mathrm{T}}P - \lambda F^{\mathrm{T}}F - 2q\alpha\|P\|\|M\|I)x(t).$$

由已知矩阵

$$(2 - 2\alpha\|P\|\|M\|)I - \frac{1}{\lambda}PEE^{\mathrm{T}}P - \lambda F^{\mathrm{T}}F$$

正定,则必存在常数 $q > 1$,使得 $\dot{V}(x(t)) < 0$, 由文献[7]知系统(1)是鲁棒稳定的.

注 1 虽然 $E, F^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n^2}$,但是定理 1 的条件只与 EE^{T} 和 $F^{\mathrm{T}}F$ 有关,而它们都为 n 阶对角矩阵,通过简单的计算可得

$$EE^{\mathrm{T}} = \mathrm{diag}\{\sum_{j=1}^{n}k_{1j},\cdots,\sum_{j=1}^{n}k_{nj}\},$$

$$F^{\mathrm{T}}F = \mathrm{diag}\{\sum_{j=1}^{n}k_{j1},\cdots,\sum_{j=1}^{n}k_{jn}\}.$$

注 2 当 $\|PK\| \geqslant 1$ 时,文献[4]的结论无法判定系统(1)是鲁棒稳定的,后面的例子表明,定理 1 是可以判定的.

注 3 对于不考虑时滞的线性区间系统 $\dot{x}(t) = N[B, C]x(t)$ 来说,$M = 0$, 由于 $EE^{\mathrm{T}} + F^{\mathrm{T}}F \leqslant (\|K\|_\infty + \|K\|_\infty)I$,因此取 $\lambda = 1$, 定理 1 比文献[5]给出的主要结果的保守性要小.

定理 2 如果存在常数 $\lambda, \beta > 0$, 使得矩阵

$$\begin{pmatrix} 2 - \beta - \left\|\dfrac{1}{\lambda}PEE^{\mathrm{T}}P + \lambda F^{\mathrm{T}}F\right\| & -\|P\|\|M\| \\ -\|P\|\|M\| & \beta \end{pmatrix}$$

正定,则系统(1)是鲁棒稳定的.

证 由于 $\beta > 0$, 构造如下 Lyapunov 泛函

$$V(x(t)) = x^{\mathrm{T}}(t)Px(t) + \beta\int_{t-h}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)x(s)\mathrm{d}s,$$

则 $V(x(t))$ 沿系统(3)的解对时间的导数,并利用(4)和已知条件得

$$\begin{aligned}
&\dot{V}(x(t)) = \\
&x^{\mathrm{T}}(t)(A_0^{\mathrm{T}}P + PA_0 + \beta I)x(t) + 2x^{\mathrm{T}}(t)PE\Sigma Fx(t) + \\
&2x^{\mathrm{T}}(t)PA_1x(t-h) - \beta x^{\mathrm{T}}(t-h)x(t-h) \leqslant \\
&-(\|x(t)\| \quad \|x(t-h)\|)\cdot \\
&\begin{pmatrix} 2 - \beta - \left\|\dfrac{1}{\lambda}PEE^{\mathrm{T}}P + \lambda F^{\mathrm{T}}F\right\| & -\|P\|\|M\| \\ -\|P\|\|M\| & \beta \end{pmatrix}\cdot \\
&\begin{pmatrix} \|x(t)\| \\ \|x(t-h)\| \end{pmatrix} < 0,
\end{aligned}$$

故系统(1)是鲁棒稳定的.

推论 1 如果存在常数 $\lambda > 0$, 使得

$$\left\|\frac{1}{\lambda}PEE^{\mathrm{T}}P + \lambda F^{\mathrm{T}}F\right\| + \|P\|\|M\| < 1,$$

则系统(1)是鲁棒稳定的.

推论 2 对于常数线性时滞系统

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-h), \tag{5}$$

P 是满足 $A_0^{\mathrm{T}}P + PA_0 = -2I$ 的正定矩阵, 如果 $\|PA_1\| < 1$, 则系统(5)是鲁棒稳定的.

注 4 判定系统(5)的鲁棒稳定性,推论 2 的条件比文献[1~3]要求的条件要弱.

注 5 当 $\|PK\| \geqslant 1$ 时,对任意的 $\beta > 0$,

$$\begin{pmatrix} 2 - \beta - 2\|PK\| & -\|P\|\|M\| \\ -\|P\|\|M\| & \beta \end{pmatrix}$$

都不正定,文献[4]的结论无法判定系统(1)是鲁棒稳定的,而定理 1 却可以判定,见后面的例子.

定理 3　如果存在常数 $\lambda,\beta>0$, 使得

$$\frac{1}{2}\left\|\frac{1}{\lambda}\bar{P}EE^{\mathrm{T}}\bar{P}+\lambda F^{\mathrm{T}}F\right\|+\mathrm{e}^{\beta h}\|\bar{P}\|\|M\|<1,$$

其中 $\bar{P}$ 是 $(A_0+\beta I)^{\mathrm{T}}\bar{P}+\bar{P}(A_0+\beta I)=-2I$ 的正定解,则系统(1) 具有稳定度 β.

证　设 $z(t)=\mathrm{e}^{\beta t}x(t)$, 则可将系统(3)改写为

$$\dot{z}(t)=(A_0+\beta I)z(t)+(E\Sigma F)z(t)+\mathrm{e}^{\beta h}A_1z(t-h), \tag{6}$$

由于 $1-\frac{1}{2}\left\|\frac{1}{\lambda}\bar{P}EE^{\mathrm{T}}P+\lambda F^{\mathrm{T}}F\right\|>0$, 构造如下 Lyapunov泛函

$$V(z(t))=z^{\mathrm{T}}(t)\bar{P}z(t)+\Big(1-\frac{1}{2}\Big\|\frac{1}{\lambda}\bar{P}EE^{\mathrm{T}}\bar{P}+\lambda F^{\mathrm{T}}F\Big\|\Big)\int_{t-h}^{t}z^{\mathrm{T}}(s)z(s)\mathrm{d}s,$$

则 $V(z(t))$ 沿系统(6)的解对时间的导数,并由已知条件,

$$\dot{V}(z(t))=-\left(\|z(t)\|\quad\|z(t-h)\|\right)\cdot\begin{pmatrix}1-\frac{1}{2}\left\|\frac{1}{\lambda}\bar{P}EE^{\mathrm{T}}\bar{P}+\lambda F^{\mathrm{T}}F\right\| & -\mathrm{e}^{\beta h}\|\bar{P}\|\|M\| \\ -\mathrm{e}^{\beta h}\|\bar{P}\|\|M\| & 1-\frac{1}{2}\left\|\frac{1}{\lambda}\bar{P}EE^{\mathrm{T}}\bar{P}+\lambda F^{\mathrm{T}}F\right\|\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\|z(t)\| \\ \|z(t-h)\|\end{pmatrix}<0,$$

故系统(1)具有稳定度 β.

4　例子(Example)

考虑下述具有时滞的线性区间动力系统

$$\dot{x}(t)=N[B,C]x(t)+N[U,V]x(t-h),$$

其中

$$B=\begin{pmatrix}-10 & 3\\ -5 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-8 & 3\\ -5 & 1\end{pmatrix},$$

$$U=\begin{pmatrix}0 & -0.0003\\ 0.0002 & 0\end{pmatrix},$$

$$V=\begin{pmatrix}0 & 0.0002\\ 0.0003 & 0\end{pmatrix},$$

则

$$A_0=\begin{pmatrix}-9 & 3\\ -5 & 1\end{pmatrix},\ K=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$M=\begin{pmatrix}0 & 0.0003\\ 0.0003 & 0\end{pmatrix}.$$

容易计算

$$P=\begin{pmatrix}2/3 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix},\ EE^{\mathrm{T}}=F^{\mathrm{T}}F=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$\alpha=4.39106$, $\|P\|=2.53518$, $\|M\|=0.0003$.

由于 $PK=\begin{pmatrix}2/3 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $\|PK\|=1.20185$,

$$\|PK\|+\alpha\|P\|\|M\|>1,$$

文献[4]的结论不能判定该系统是否稳定. 取 $\lambda=1$, 则

$$(2-2\alpha\|P\|\|M\|)I-\frac{1}{\lambda}PEE^{\mathrm{T}}P-\lambda F^{\mathrm{T}}F=\begin{pmatrix}0.548876 & 0.666667\\ 0.666667 & 0.993321\end{pmatrix}$$

是正定矩阵,故由定理 1 知该系统稳定.

参考文献(References):

[1] MORI T, KOKAME H. Stability of $\dot{X}(t)=AX(t)+BX(t-\tau)$ [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1989, 34(4): 460 – 462.

[2] HMAMED A. On the stability of time-delay systems: new result [J]. *Int J of Control*, 1986, 43(1): 321 – 324.

[3] SHYU K K. YAN J J. Robust stability of uncertain time-delay systems and its stabilization by variable structure control [J]. *Int J of Control*, 1993, 57(1): 237 – 246.

[4] 年晓红. 具有时滞的线性区间系统的鲁棒稳定性[J]. 控制理论与应用, 1998, 15(1): 134 – 138.
(NIAN Xiaohong. Robust stability of linear interval systems with time-delay [J]. *Control Theory & Applications*, 1998, 15(1): 134 – 138.)

[5] ZHOU C S, DENG J L. The stability of the grey linear system [J]. *Int J of Control*, 1986, 43(1): 313 – 320.

[6] 吴方向, 史忠科, 戴冠中. 动态区间系统的鲁棒稳定性. 控制理论与应用, 2001, 18(1): 113 – 115.
(WU Fangxiang, SHI Zhongke, DAI Guanzhong. On robust stability of dynamic interval systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2001, 18(1): 113 – 115.)

[7] HALE J. *Theory of Functional Differential Equation* [M]. New York: Springer-Verlag, 1977.

作者简介:

宋乾坤　(1964—),男,湖州师范学院数学系副教授,1986 年和 1996 年分别在四川师范大学数学系和西北工业大学应用数学系获学士和硕士学位,研究方向为矩阵论、动力系统稳定性,E-mail: sqk@hutc.zj.cn.