

基于 LMI 的约束系统 H_∞ 控制及其滚动优化实现

陈虹¹, 韩光信¹, 刘志远²

(1. 吉林大学 控制科学与工程系, 吉林 长春 130025; 2. 哈尔滨工业大学 控制科学与工程系, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要: 在 LMI 优化框架下, 讨论有时域硬约束线性系统的 H_∞ 控制问题. 首先提出了一种基于 LMI 优化的状态反馈方法, 并给出了闭环系统保证 H_∞ 性能和满足时域硬约束的条件. 在此基础上, 融合预测控制的滚动优化原理讨论了一种滚动时域 H_∞ 性能控制方法. 通过对 H_∞ 性能指标 γ 的在线最小化, 闭环系统能实时协调控制性能要求和硬约束, 并充分利用有限的控制能力提高控制性能.

关键词: 时域硬约束; H_∞ 性能; LMI 优化; 预测控制

中图分类号: TP273

文献标识码: A

LMI-based H -infinity control scheme for constrained systems and its moving horizon implementation

CHEN Hong¹, HAN Guang-xin¹, LIU Zhi-yuan²

(1. Department of Control Science and Engineering, Jilin University, Changchun Jilin 130025, China;

2. Department of Control Science and Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin Heilongjiang 150001, China)

Abstract: In the framework of LMI (Linear Matrix Inequality) optimization, this paper addresses the H -infinity control problem for linear systems with time-domain hard constraints. An LMI-based state-feedback solution is presented and conditions for guaranteeing closed-loop H -infinity performance and satisfying the time-domain constraints are given. Combining the moving horizon principle of model predictive control, a moving horizon H -infinity performance control scheme is discussed. By minimizing the H -infinity performance index on-line, the closed-loop system is able to manage the trade-off between required high performance and satisfying hard constraints, and to enable the most of the limited control to achieve good performance.

Key words: time-domain hard constraints; H -infinity performance; LMI optimization; model predictive control

1 引言 (Introduction)

对控制系统的高性能要求往往意味着大的控制动作, 控制量约束 (如执行机构饱和) 的存在不仅会破坏期望控制性能的获得甚至会导致系统不稳定. 为此, 人们已经提出了许多方法以解决存在系统约束时的控制问题, 如预测控制^[1,2]、Anti-windup 综合^[3-5]、约束 LQR/LQG^[6]等. 预测控制将系统约束显式地表述在开环优化问题中并通过在线滚动优化使之动态满足, 是约束系统优化控制的一个非常有效的方法. 近十几年发展起来的 H_∞ 控制为系统的鲁棒性分析与设计提供了较完美的理论基础, 但标准的 H_∞ 控制没有考虑系统的时域硬约束. 基于 H_∞ 理论的预测控制便成为一种使约束系统鲁棒稳定的捷径^[7-12], 但大

多已有的讨论都没有涉及系统的性能要求.

本文在 LMI 优化^[13]和多目标控制^[14]的框架下讨论存在控制量和输出量约束时的 H_∞ 性能控制问题, 提出一种基于 LMI 优化的状态反馈方法, 并给出闭环系统保证 H_∞ 性能和满足时域硬约束的条件. 在此基础上, 融合预测控制的滚动优化原理, 用系统当前状态刷新相应的 LMI 优化问题并在每个采样时刻在线求解. 通过对 H_∞ 性能指标 γ 的在线最小化, 使得滚动时域闭环系统能实时协调控制性能要求和系统约束, 即, 在必要时降低性能要求以保证时域硬约束的满足, 当系统远离约束边界时, 提高性能要求. 这样, 系统能充分利用有限的控制量提高控制性能. 仿真结果表明了该方法的有效性.

2 约束系统的 H_∞ 控制 (H-infinity control of constrained systems)

考虑离散线性时不变系统

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + B_1w(k) + B_2u(k), \\ z_1(k) = C_1x(k) + D_{11}w(k) + D_{12}u(k), \\ z_2(k) = C_2x(k) + D_{21}w(k) + D_{22}u(k). \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x \in \mathbb{R}^n$ 为状态变量, $w \in \mathbb{R}^{m_1}$ 和 $u \in \mathbb{R}^{m_2}$ 分别为外部输入和控制输入, $z_1 \in \mathbb{R}^{p_1}$ 和 $z_2 \in \mathbb{R}^{p_2}$ 分别为控制输出和约束输出. 对系统的基本假设为 (A, B_2) 可稳和 (C_1, A) 可测. 系统的控制量约束和输出约束具有如下形式:

$$|u_i(k)| \leq u_{i,\max}, \quad \forall k \geq 0, i = 1, 2, \dots, m_2, \quad (2a)$$

$$|z_{2i}(k)| \leq z_{2i,\max}, \quad \forall k \geq 0, i = 1, 2, \dots, p_2. \quad (2b)$$

另外, 假设 $D_{21} = 0$, 即外部输入对约束输出没有直接影响. 控制目标是设计满足控制量约束(2a)的控制器使得闭环系统内部稳定, 输出 z_2 满足约束(2b)且从外部输入 w 到控制输出 z_1 的 H_∞ 性能最小.

考虑状态反馈策略 $u = Kx$, 则闭环系统为

$$\begin{cases} x(k+1) = A_{cl}x(k) + B_1w(k), \\ z_1(k) = C_{1,cl}x(k) + D_{11}w(k), \\ z_2(k) = C_{2,cl}x(k) + D_{21}w(k). \end{cases} \quad (3)$$

其中: $A_{cl} = A + B_2K$, $C_{i,cl} = C_i + D_{i2}K$, $i = 1, 2$. 无约束 H_∞ 控制是使闭环系统内部稳定且从外部输入 w 到控制输出 z_1 的 H_∞ 性能小于某个给定的正数 γ . 对离散系统而言, 这等价于存在对称矩阵 $P > 0$ 满足矩阵不等式^[15,16]

$$\begin{pmatrix} P & 0 & A_{cl}^T P & C_{1,cl}^T \\ 0 & \gamma^2 I & B_1^T P & D_{11}^T \\ PA_{cl} & PB_1 & P & 0 \\ C_{1,cl} & D_{11} & 0 & I \end{pmatrix} > 0. \quad (4)$$

实际上, 应用 Schur 补公式^[13]得, 式(4)等价于

$$\begin{pmatrix} P - A_{cl}^T P A_{cl} - C_{1,cl}^T C_{1,cl} & -A_{cl}^T P B_1 - C_{1,cl}^T D_{11} \\ -B_1^T P A_{cl} - D_{11}^T C_{1,cl} & \gamma^2 I - B_1^T P B_1 - D_{11}^T D_{11} \end{pmatrix} > 0. \quad (5)$$

上式左乘非零 $\begin{pmatrix} x(k) \\ w(k) \end{pmatrix}^T$ 右乘非零 $\begin{pmatrix} x(k) \\ w(k) \end{pmatrix}$, 整理得 $(A_{cl}x(k) + B_1w(k))^T P (A_{cl}x(k) + B_1w(k)) + (C_{1,cl}x(k) + D_{11}w(k))^T (C_{1,cl}x(k) + D_{11}w(k)) \leq \gamma^2 w(k)^T w(k) + x(k)^T P x(k)$.

用 $P > 0$ 定义一个标量函数 $V(x) = x^T P x$, 并将式(3)代入上式, 则得闭环系统(3)满足下面的耗散不

等式

$$V(x(k)) + \sum_{i=0}^k \|z_1(i)\|^2 \leq \gamma^2 \sum_{i=0}^k \|w(i)\|^2 + V(x(0)), \quad \forall k > 0. \quad (6)$$

令 $x(0) = 0$, 结合 $V(x) \geq 0$, 则上式变为

$$\sum_{i=0}^{\infty} \|z_1(i)\|^2 \leq \gamma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \|w(i)\|^2.$$

这表明从 w 到 z_1 的 H_∞ 性能小于 γ . 令 $Q = P^{-1}$ 和 $Y = KQ$, 并用 $\text{diag}(Q, I, Q, I)$ 对式(4)做同余变换, 得式(4)等价于

$$\begin{pmatrix} Q & 0 & QA^T + Y^T B_2^T & QC_1^T + Y^T D_{12} \\ 0 & \gamma^2 I & B_1^T & D_{11}^T \\ AQ + B_2 Y & B_1 & Q & 0 \\ C_1 Q + D_{12} Y & D_{11} & 0 & I \end{pmatrix} > 0. \quad (7)$$

上式是关于 γ^2 , Q 和 Y 的线性矩阵不等式(LMI). 因此, 有如下结论:

引理 1 假设 LMI 优化问题

$$\min_{\gamma^2, Q, Y} \gamma^2 \text{ subject to LMI (7)} \quad (8)$$

有最优解 $(\gamma_{\text{opt}}, Q_{\text{opt}}, Y_{\text{opt}})$, 则状态反馈 $K_{\text{opt}} = Y_{\text{opt}} Q_{\text{opt}}^{-1}$ 使闭环系统内部渐近稳定且从 w 到 z_1 的 H_∞ 范数最小, 其值为 γ_{opt} .

证 前面的讨论知, 假设 (γ, Q, Y) 满足 LMI (7), 则 $P = Q^{-1}$ 满足矩阵不等式(5), 其中 $K = YP$. 因此, 对由 $u = Kx$ 组成的闭环系统存在 $P > 0$ 满足 $P - A_{cl}^T P A_{cl} > 0$, 即闭环系统内部渐近稳定. 进一步, (γ, Q, Y) 满足 LMI(7)表明闭环系统满足耗散不等式(6). 令 $x(0) = 0$, 结合 $V(x) \geq 0$, 则式(6)表明从 w 到 z_1 的 H_∞ 性能小于 γ . 如果优化问题(8)有最优解, 记为 $(\gamma_{\text{opt}}, Q_{\text{opt}}, Y_{\text{opt}})$, 则 γ_{opt} 是满足 LMI (7)的最小 γ . 结论得证.

注 1 由上面的讨论可知, 要保证闭环系统渐近稳定实际上并不需要最优解, 只需优化问题的可行解即可. 另, 以 LMI 为约束条件的优化问题(8)是凸的, 目前已有非常有效的数值求解工具(如 LMItools). 当然, 采用数值方法求解得到 γ_{opt} 只是数值意义上的最小.

对于有约束(2)的情况, 首先有如下结论:

引理 2 假设

- 存在 (γ, Q, Y) 满足 LMI (7);
- 外部输入信号能量有界, 即 $\sum_{i=0}^{\infty} \|w(i)\|^2 \leq w_{\max}$;
- 系统初始状态 $x(0)$ 属于一个由 $P, \alpha > 0$ 和

$w_{\max}$ 定义的椭圆域(其中 $P = Q^{-1}$)

$$\Omega_1(P, \alpha, w_{\max}) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \gamma^2 w_{\max} + V(x) \leq \alpha\},$$

则状态反馈 $K = YQ^{-1}$ 使闭环状态轨迹保持在另一个由 P 和 α 定义的椭圆域

$$\Omega_2(P, \alpha) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) \leq \alpha\}$$

内,且系统的输出能量有界.

证 如果 (γ, Q, Y) 满足 LMI (7), 则存在 $V(x) = x^T Px$ 使得闭环系统满足耗散不等式(6), 其中 $P = Q^{-1} > 0$. 利用 $\sum_{i=0}^{\infty} \|w(i)\|^2 \leq w_{\max}$ 得, 对任何 $k > 0$ 有 $V(x(k)) + \sum_{i=0}^k \|z_1(i)\|^2 \leq \gamma^2 w_{\max} + V(x(0))$, 即 $\sum_{i=0}^{\infty} \|z_1(i)\|^2 \leq \gamma^2 w_{\max} + V(x(0))$ 和 $V(x(k)) \leq \gamma^2 w_{\max} + V(x(0)), \forall k > 0$. 再由 $x(0) \in \Omega_1(P, \alpha, w_{\max})$ 即 $\gamma^2 w_{\max} + V(x(0)) \leq \alpha$ 得 $\sum_{i=0}^{\infty} \|z_1(i)\|^2 \leq \alpha$ 和 $V(x(k)) \leq \alpha, \forall k > 0$, 结论得证.

注 2 由上面的讨论知, 如果 $\alpha \geq \gamma^2 w_{\max}$, 则 $0 \in \Omega_1(P, \alpha, w_{\max})$ 且 $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$.

下面给出在矩阵不等式框架下考虑控制量约束和输出约束的一种方法. 由 $u = YQ^{-1}x$ 和 $D_{21} = 0$ 得, 输出方程为 $z_2 = C_{2,cl}x$. 显然, 对控制量的约束和对输出量的约束具有相同的形式. 因此, 以输出约束为例展开讨论. 假设闭环状态轨迹保持在椭圆域 $\Omega_2(P, \alpha)$ 内, 则满足输出约束就是要求

$$\begin{aligned} \max_{k \geq 0} |z_{2i}(k)|^2 &= \\ \max_{k \geq 0} x(k)^T C_{2,cl,i}^T C_{2,cl,i} x(k) &\leq \\ \max_{x \in \Omega_2} x^T C_{2,cl,i}^T C_{2,cl,i} x &\leq z_{2i,max}^2, \quad i = 1, 2, \dots, p_2, \end{aligned} \quad (9)$$

这实际上要求对所有满足 $V(x) = x^T Px \leq \alpha$ 的 x 有 $x^T C_{2,cl,i}^T C_{2,cl,i} x \leq z_{2i,max}^2, i = 1, 2, \dots, p_2$. 应用 S-Procedure^[13]得, 如果存在一实数 $\lambda > 0$ 满足

$$\begin{cases} z_{2i,max}^2 - x^T C_{2,cl,i}^T C_{2,cl,i} x - \alpha\lambda + \lambda x^T Px \geq 0, \\ i = 1, 2, \dots, p_2, \end{cases} \quad (10)$$

则式(9)成立. 不失一般性, 取 $\lambda = \frac{z_{2i,max}^2}{\alpha}$, 则使上式对所有的非零 x 成立的条件为 $\frac{z_{2i,max}^2}{\alpha}P - C_{2,cl,i}^T C_{2,cl,i} \geq 0$, 或

$$\frac{z_{2i,max}^2}{\alpha}Q - QC_{2,cl,i}^T C_{2,cl,i}Q \geq 0. \quad (11)$$

利用 Schur 补公式, 式(11)成立的条件为存在对称矩阵 Z 使得 Q 和 Y 满足矩阵不等式

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha}Z & C_2Q + D_{22}Y \\ (C_2Q + D_{22}Y)^T & Q \end{pmatrix} \geq 0, \\ Z_{ii} \leq z_{2i,max}^2, \quad i = 1, 2, \dots, p_2, \end{cases} \quad (12)$$

其中还用到了 $C_{2,cl} = C_2 + D_{22}K$ 和 $Y = KQ$. 综上, 有如下结论:

引理 3 如果 $x(0) \in \Omega_1(P, \alpha, w_{\max})$ 且存在对称矩阵 X 和 Z 使得无约束 H_∞ 控制的 Q 和 Y 进一步满足矩阵不等式(12)和

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha}X & Y \\ Y^T & Q \end{pmatrix} \geq 0, \quad X_{ii} \leq u_{i,max}^2, \quad i = 1, 2, \dots, m_2, \quad (13)$$

则系统输出 z_2 满足输出量约束(2b)和状态反馈 $u = YQ^{-1}x$ 满足控制量约束(2a).

证 前面的讨论为式(12) $\rightarrow$ (11) $\rightarrow$ (10). 由引理 2 知, $x(0) \in \Omega_1(P, \alpha, w_{\max})$ 表明 $x(k) \in \Omega_2(P, \alpha), \forall k > 0$, 则有(10) $\rightarrow$ (9), 即 Q 和 Y 满足矩阵不等式(12)表明式(9)成立. 因此, 闭环系统满足输出约束. 同理, 可以证明式(13)成立表明状态反馈 $u = YQ^{-1}x$ 满足 $\max_{k \geq 0} |u_i(k)|^2 \leq u_{i,max}^2$.

结论得证.

显然, 只有对固定的 α 值, 式(12)和(13)是关于 Q, Y, X 和 Z 的 LMI. 最后, 关于约束系统(1)的 H_∞ 控制问题有如下结论:

定理 1 对固定的 $\alpha = \alpha_0$, 如果 LMI 优化问题

$$\min_{\gamma, Q, Y, X, Z} \gamma^2 \text{ subject to LMI (7), (12), (13)} \quad (14)$$

有最优解 $(\gamma_0, Q_0, Y_0, X_0, Z_0)$ 且 $x(0) \in \Omega_1(P_0, \alpha_0, w_0)$, 则由状态反馈 $K_0 = Y_0Q_0^{-1}$ 组成的闭环系统

- 内部渐近稳定;
- 对能量不大于 w_0 的外部输入, 满足系统约束(2);
- 从外部输入 w 到控制输出 z_1 的性能满足 $\sum_{i=0}^{\infty} \|z_1(i)\|^2 - \gamma_0^2 \sum_{i=0}^{\infty} \|w(i)\|^2 \leq x(0)^T P_0 x(0)$, 即闭环系统具有耗散性;
- 从外部输入 w 到控制输出 z_1 的 H_∞ 性能小于 γ_0 .

其中 w_0 是闭环系统在保证满足约束前提下允许的最大外部输入能量, 由 $w_0 = \frac{\alpha_0 - V(x(0))}{\gamma_0^2}$

其中 w_0 是闭环系统在保证满足约束前提下允

许的最大外部输入能量, 由 $w_0 = \frac{\alpha_0 - V(x(0))}{\gamma_0^2}$

计算.

证 结论 a) 的证明与引理 1 同. 应用引理 3 得到 b). 由 (γ_0, Q_0, Y_0) 满足 LMI(7) 得闭环系统满足耗散不等式(6), 且 $V(x) \geq 0$, 则得结论 c). 令 $x(0) = 0$, c) 则表明结论 d).

注 3 如果 $x(0) = 0$, 记 LMI 优化问题(14)的最优解为 γ_c , 即从外部输入 w 到控制输出 z_1 的 H_∞ 性能为 γ_c . 显然, 有 $\gamma_{\text{opt}} \leq \gamma_c \leq \gamma_0$, 表明约束的存在将使系统性能变坏, 非零初始条件也将进一步降低系统的性能, 从而增加控制器设计的保守性. 因此, 建议在设计控制系统时取 $x(0) = 0$.

注 4 如果系统(1)的 (A, B_2) 可稳和 (C_1, A) 可测, 则 LMI 优化问题(14)是否有解取决于矩阵不等式(12)和(13)是否可行. 因约束条件(2)将系统平衡点包含在其内部, 由线性系统的连续性知, 如果 (A, B_2, C_1) 可稳和可测, 则必存在 $\alpha > 0$ 使 LMI 优化问题(14)有解.

注 5 由引理 2 知, α 还给出了系统输出能量的上界. 从这个角度出发, 选择 α 越小越好(在 LMI 优化问题有解的前提下, α 小则 γ 小即闭环性能好). 另外, α 越小, 确切地说 αP 越小, 越容易使矩阵不等式(12)和(13)成立. 但如果 α 小, 即 $\sqrt{\frac{1}{\alpha} \det P}$ 大(对固定 P), 则椭圆域 Ω_2 小^[13]. 这意味着在满足约束条件前提下允许系统状态轨迹伸展的空间小, 从而导致承受未知外部输入(干扰)的能力弱. 从保证闭环系统满足约束条件的必要条件 $x(0) \in \Omega_1(P, \alpha, w_{\max})$ 也很容易得到 α 和 $w_{\max}$ 之间的制约关系 $\alpha \geq \gamma^2 w_{\max}$, 其中 $w_{\max}$ 是系统外部输入信号(如干扰)的能量. 因此, 如果期望设计的控制系统能承受大的干扰且满足时域硬约束, 则应选择大的 α .

3 滚动优化算法(Moving horizon algorithm)

从注 5 可看出, 设计约束系统 H_∞ 控制系统的关键是协调控制性能要求与满足系统约束之间的矛盾. 由于外部输入(干扰)的不可预见性, 这种一次性设计控制系统和离线协调的缺点是显然的. 假设已设计了约束 H_∞ 控制器 $(\alpha_0, P_0, \gamma_0, K_0, w_0)$ 并将状态反馈 $u = K_0 x$ 作用于系统. 如果外部输入能量不大于 w_0 , 则闭环系统满足约束条件(2). 但实际情况可能并非如此. 一种可能是外部输入能量大大地小于 w_0 , 则系统将无法充分利用控制能力提高控制性能, 控制系统的设计过于保守了. 另一种可能是出现某些不可预测的大干扰使得实际的外部输入能量大于 w_0 , 则系统输出和控制量可能超出约束的范围. 因此, 这一节将应用预测控制的滚动优化原理, 讨论控制系统如何实时主动地调整性能要求使得在保证满足约束的同时获得尽可能好的闭环性能. 具体思路是通过将 H_∞ 性能指标 γ 的在线最小化, 使得系统在其接近约束边界时, 能降低性能要求(H_∞ 指标)

以避免违背约束的情况发生; 当系统远离约束边界时, 能提高性能要求以获得好的控制性能.

由定理 1 知, 保证闭环系统满足约束条件(2)的一个前提条件是系统初始状态属于椭圆域 $\Omega_1(P, \alpha, w_{\max})$. 假设 k 时刻的系统状态为 $x(k)$, 由 Schur 补公式知, $x(k) \in \Omega_1(P, \alpha, w_{\max})$ 等价于 LMI

$$\begin{pmatrix} \alpha - \gamma^2 w_{\max} & x(k)^T \\ x(k) & Q \end{pmatrix} \geq 0. \quad (15)$$

因此, 如果 LMI 优化问题

$$\min_{\gamma^2, Q, Y, X, Z} \gamma^2 \text{ subject to LMI (7), (12), (13), (15)} \quad (16)$$

有解 $(\gamma_k, Q_k, Y_k, X_k, Z_k)$, 则定义 k 时刻的状态反馈为

$$K(k) = Y_k Q_k^{-1}. \quad (17)$$

根据预测控制的滚动优化原理, 将式(17)作用于系统至下个采样时刻, 用实时状态刷新 LMI 优化问题(16)并在线重复求解. 具体的滚动时域算法如下:

算法 1

第 1 步 初始化. 令 $k = 0$.

第 2 步 在 k 时刻, 给定 $\alpha = \alpha_0$, 求解 LMI 优化问题(16). 若式(16)有解, 则将状态反馈(17)作用于系统; 若式(16)没有解, 则增加 α 值, 重新求解优化问题.

第 3 步 $k = k + 1$, 返回第 2 步.

优化问题(16)和(14)的区别就是 LMI(15). 该 LMI 迫使控制系统的当前状态满足 $x(k) \in \Omega_1(P, \alpha, w_{\max})$, 从而保证系统的状态轨迹保持在椭圆域 $\Omega_2(P, \alpha)$ 内. 对任何 $x(k)$ 有 $\gamma_k \geq \gamma_c$, 所以, 对给定 $\alpha > 0$, (γ_c, P_c, K_c) 是求解优化问题(16)得到的性能最好的控制器. 为降低在线计算负荷, 可采用如下控制器实现算法:

算法 2

第 1 步 初始化. 给定 $\alpha = \alpha_0$; 设 $x(0) = 0$, 求解 LMI 优化问题(14)得 $K_c = YQ^{-1}$ 和 $P_c = Q^{-1}$; 令 $k = 0$.

第 2 步 在 k 时刻, 给定 $\alpha = \alpha_0$; 若系统当前状态 $x(k) \in \Omega_1(P_c, \alpha, w_{\max})$, 则将 $u(k) = K_c x(k)$ 作用于系统; 若 $x(k) \notin \Omega(P_c, \alpha, w_{\max})$, 则求解 LMI 优化问题(16). 若(16)有解, 则将状态反馈(17)作用于系统; 若(16)没有解, 则增加 α 值, 重新求解.

第 3 步 $k = k + 1$ 返回第 2 步.

注 6 与常规 MPC 相同, 在每个采样时刻将用当前状态刷新优化问题(16)并在线寻优, 以计算状态反馈增益进而

计算控制量. 因此, 其可行性对控制系统的实现至关重要. 注意到优化问题(16)中的 LMI 组(7), (12)和(13)与当前状态 $x(k)$ 无关. 给定 α , 记所有使 LMI 组(7), (12)和(13)成立的 (γ, Q, Y, X, Z) 的集合为 $S(\alpha)$. 由式(12)和(13)知, 如果 $\alpha_1 \leq \alpha_2$, 则 $S(\alpha_1) \supseteq S(\alpha_2)$. 假设 k 时刻的优化问题(16)有解, 记为 $(\gamma_k, Q_k, Y_k, X_k, Z_k)$. 在 $k+1$ 时刻, 优化问题是否有解的关键是满足 LMI(15), 即使 $x(k+1) \in \Omega_2(P, \alpha, w_{\max})$ 为真. 如果 $x(k+1) \in \Omega_2(P_k, \alpha_k, w_{\max})$, 则 $(\gamma_k, Q_k, Y_k, X_k, Z_k)$ 是 $k+1$ 时刻优化问题(16)的一个可行解 (不一定是优化解). 如果 $x(k+1) \notin \Omega_2(P_k, \alpha_k, w_{\max})$, 则优化算法将在集合 $S(\alpha)$ 中寻找新的 (γ, Q, Y, X, Z) , 在尽可能不降低或少降低性能 ($\min \gamma^2$) 的条件下使 $x(k+1) \in \Omega_2(P, \alpha, w_{\max})$ 成立. 但在某种不可预见的外部大干扰下, 可能会发生没有 $(\gamma, Q, Y, X, Z) \in S(\alpha)$ 使 $x(k+1) \in \Omega_2(P, \alpha, w_{\max})$ 成立, 即对给定的 α , 优化问题(16)没有解. 分析(15)的结构知, 增加 α 值将直接提高满足 $x(k+1) \in \Omega_2(P, \alpha, w_{\max})$ 的可能性. 实际上, 增加 α 值是进一步放宽控制性能要求. 但由于 $\alpha_1 \leq \alpha_2$ 意味着 $S(\alpha_1) \supseteq S(\alpha_2)$, 又由于外部干扰的不可预见性, 增加 α 值可能仍无法解决优化问题(16)的可行性问题. 这时, 可取 $K(k+1) = K(k)$.

4 仿真应用(Simulation application)

作为应用示例, 考虑某不稳定反应器^[17], 其化学反应为 $A \xrightarrow{r_1} B \xrightarrow{r_3} C, A \xrightarrow{r_2} D$, 即由组分 A 生成主产品组分 B 和副产品组分 D , 以及由组分 B 继续反应生成副产品组分 C . 假设反应器进料只含有组分 A , 并由上游设备供给. 因此, 进料浓度和温度

是变化的, 可以看作系统的干扰. 基于质量和能量守恒定律, 建立该反应器的理想非线性模型, 各物理参数取自文献[17]. 在平衡点线性化、无量纲化和离散化(取采样周期 0.1 min)得系统矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0.9739 & -0.0942 & -0.4378 \\ -0.0012 & 1.0321 & 0.1567 \\ -0.0162 & 0.0640 & 1.0648 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.0592 & -0.0017 \\ 0 & 0.0006 \\ -0.0005 & 0.0082 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0.0022 \\ -0.0008 \\ -0.0103 \end{bmatrix}.$$

其中: 系统状态分别为组分 A 和组分 B 浓度以及反应温度(由于 C 和 D 是反应副产品, 所以忽略了其浓度的动力学方程); 控制输入 u 为无量纲化的反应器冷却量; 干扰输入 w 分别为无量纲化的进料浓度和温度. 系统的开环极点分别为 1.18, 0.91 和 0.99. 控制要求是尽可能抑制进料变化对主产品 B 的影响. 因此, 取输出矩阵为 $C_1 = \text{diag}(0.1, 1, 1)$. 假设控制约束为 $|u| \leq 1$. 解 LMI 优化问题(7)得无约束时系统可以获得的最好性能 $\gamma_{\text{opt}} = 0.2$. 由引理 2 知, 参数 α 给出了输出能量的上界, 根据控制性能要求取 $\alpha_0 = 2.0$. 解 LMI 优化问题(14)得有约束时系统可以获得的性能为 $\gamma_c = 0.6873$. 取 $x(0) = 0$, 则 $w_0 = 4.23$, 即取 $\alpha_0 = 2.0$ 的固定 H_∞ 控制器 (γ_c, P_c, K_c) 能保证的最好性能为 $\gamma_c = 0.6873$, 且对能量不大于 4.23 的干扰输入能保证系统满足约束.

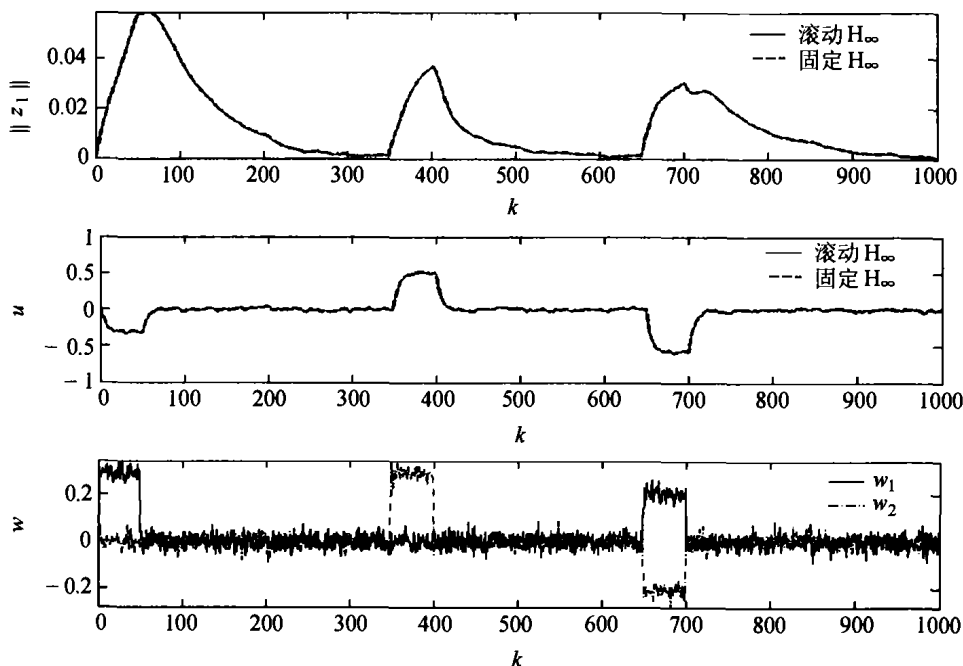


图1 满足定理1条件时的干扰抑制响应(物理量均已无量纲化)

Fig. 1 Disturbance attenuation if conditions in Theorem 1 are satisfied (normalized variables)

图1给出了固定 H_∞ 控制器的仿真结果 (k 表示采样时间, $\|z_1\|$ 表示输出 z_1 的范数), 其中进料浓

度和温度的随机变化符合零均值、均方根为0.025的正态分布,在时刻0,350和650分别有能量约为4.2的脉冲变化.因为满足定理1的条件,所以,固定 H_∞ 控制器保证满足时域约束,闭环系统内部稳定且具有 H_∞ 指标小于 $\gamma_c = 0.6873$ 的性能.图1还给出了同样条件下滚动 H_∞ 控制系统的仿真结果(图中没有给出 γ 的曲线是因为其没有变化).显然,在外部干扰较小时,无需调整性能要求,于是,滚动 H_∞ 控制系统获得与固定 H_∞ 控制系统相同的性能.图2给出了不满足定理1干扰能量条件时的仿真结果(k 和 $\|z_1\|$ 的含义同图1, γ 表示性能指标),其中两

个干扰的能量分别为15.38和28.81.因此,固定 H_∞ 控制器已不能保证满足时域约束(从而失去了保证稳定性和性能),这点可从图2右上图的虚线得到证实.但图中的实线显示滚动时域 H_∞ 控制系统的控制量始终保持在约束范围之内.图2的右下图还给出了每个采样时刻的 γ 值.可见,在第一个干扰时,滚动时域 H_∞ 控制器充分利用了有限的控制能力以提高性能;在第二个干扰时,系统适当降低了控制性能以满足时域约束;而当干扰减小后,系统又自动提高了控制性能要求,并调整到有约束时的最好性能(即 $\gamma = \gamma_c$).

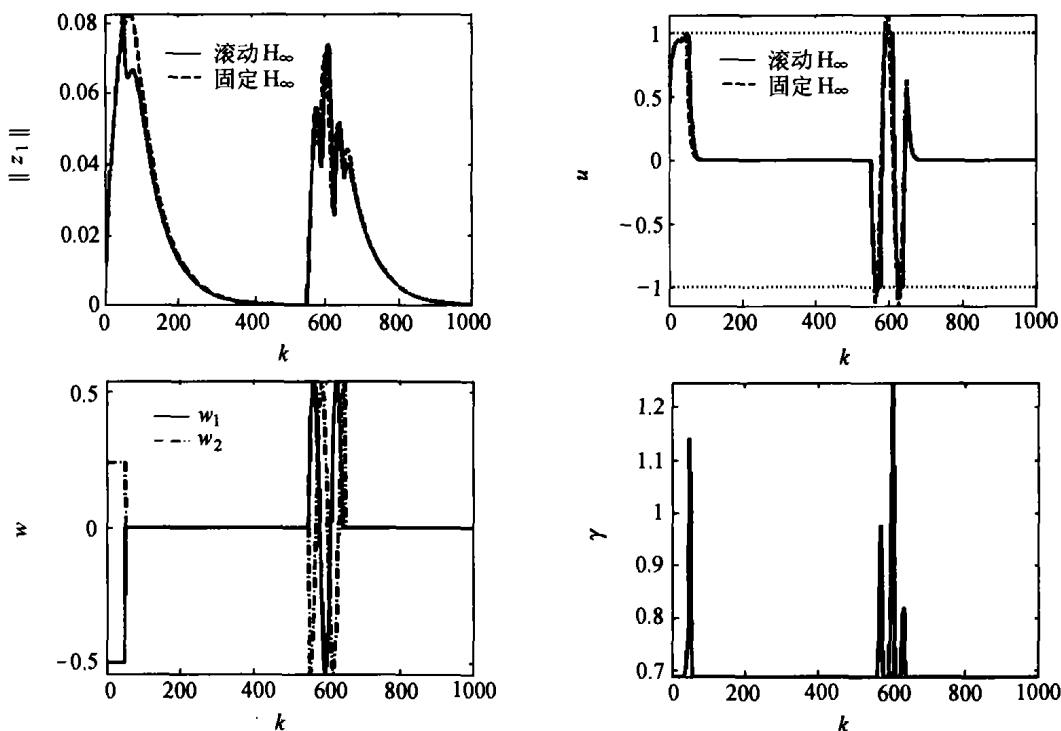


图2 不满足定理1条件时的干扰抑制响应(物理量均已无量纲化)

Fig. 2 Disturbance attenuation if conditions in Theorem 1 are broken (normalized variables)

5 结论(Conclusion)

本文讨论了存在控制量约束和输出量约束时线性系统的 H_∞ 性能控制问题.首先在LMI优化和多目标控制框架下,利用状态椭圆域的概念给出了一个状态反馈解及相应的保证 H_∞ 性能的条件.在此基础上,融合预测控制的滚动优化原理,在每个采样时刻重复求解LMI优化问题.通过对 H_∞ 性能指标 γ 的在线最小化,使得系统在其接近约束边界时,能主动降低性能要求(H_∞ 指标)以避免违背约束的情况发生;当系统远离约束边界时,能主动提高性能要求以获得好的控制性能.对某不稳定CSTR的仿真结果表明,所提出的算法能通过滚动优化在线协调控制性能要求和时域硬约束,充分利用有限的控制

量提高控制性能.

值得指出的是,通常预测控制在线重复求解的是一个开环优化问题,而本文重复求解的是一个无限时域闭环优化问题,且采用外部输入到控制输出的 H_∞ 范数作为最小化的性能指标.这一点也有别于文献[9]和[10]采用线性二次型目标函数并且讨论的是稳定性问题没有涉及控制性能问题.但本文还没有从理论上讨论滚动时域闭环系统的保证 H_∞ 性能.回顾第2节的讨论,如果系统满足耗散不等式(6),则令 $x(0) = 0$ 就可得系统的 H_∞ 范数小于 γ .因此,保证滚动时域闭环系统 H_∞ 性能的关键是在滚动优化过程中保持耗散不等式不变.这部分工作仍在进行之中.

参考文献(References):

- [1] MAYNE D Q, RAWLINGS J B, RAO C V, et al. Constrained model predictive control: Stability and optimality [J]. *Automatica*, 2000, 36(6): 789 – 814.
- [2] CHEN H, ALLGOWER F. A quasi-infinite horizon nonlinear model predictive control scheme with guaranteed stability [J]. *Automatica*, 1998, 34(10): 1205 – 1217.
- [3] DOYLE J C, SMITH R, ENNS D F. Control of plants with input saturation nonlinearities [C] // *Proc of American Control Conference*. Minneapolis, MN: American Automatic Control Council, 1987: 1034 – 1039.
- [4] KOTHARE M, CAMPO P, MORARI M, et al. A unified framework for the study of anti-windup designs [J]. *Automatica*, 1994, 30(12): 1869 – 1883.
- [5] HODEL A, HALL C. Variable-structure PID control to prevent integrator windup [J]. *IEE Proceedings on Industrial Electronics*, 2001, 48(2): 442 – 451.
- [6] GOKCEK C, KABAMBA P T, MEERKOV S M. An LQR/LQG theory for systems with saturating actuators [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2001, 46(10): 1529 – 1542.
- [7] TADMOR G. Receding horizon revisited: An easy way to robustly stabilize an LTV system [J]. *Systems & Control Letters*, 1992, 18(4): 285 – 299.
- [8] LALL S, GLOVER K. A game theoretic approach to moving horizon control [C] // *Advances in Model-Based Predictive Control*. London: Oxford University Press, 1994: 131 – 144.
- [9] KOTHARE M V, BALAKRISHNAN V, MORARI M. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities [J]. *Automatica*, 1996, 32(10): 1361 – 1379.
- [10] CHEN H, SCHERER C W, ALLGOWER F. A game theoretic approach to nonlinear robust receding horizon control of constrained systems [C] // *Proc of American Control Conference*. Albuquerque, USA: American Automatic Control Council, 1997: 3073 – 3077.
- [11] LU Y, ARKUN Y. Quasi-min-max MPC algorithms for LPV systems [J]. *Automatica*, 2000, 36(4): 527 – 540.
- [12] BLOEMEN H H J, van den BOOM T J J, VERBRUGGEN H B. Model-based predictive control for Hammerstein-Wiener systems [J]. *Int J Control*, 2001, 74(5): 482 – 495.
- [13] BOYD S, EI GHAAOUI L, FERON E, et al. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory* [M]. Philadelphia: SIAM, 1994.
- [14] SCHERER C W, GAHINET P, CHILALI M. Multi-objective output-feedback control via LMI optimization [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1997, 42(7): 896 – 911.
- [15] KAMINER I, KHARGONEKAR P P, ROTE A. Mixed H_2/H_∞ control for discrete time systems via convex optimization [J]. *Automatica*, 1993, 29(1): 57 – 70.
- [16] SCHERER C W, WEILAND S. *Lecture Notes DISC Course on Linear Matrix Inequalities in Control* [M]. Delft, Netherlands: Delft University of Technology, 2000.
- [17] ALLGOWER F. *Naeherungsweise Ein-/Ausgangs – Linearisierung nichtlineare System* [M]. Duesseldorf, Germany: VDI Verlag, 1996.

作者简介:

陈虹 (1963—), 女, 教授, 博士生导师, 1983年和1986年浙江大学过程控制专业获工学学士和硕士学位, 1997年德国斯图加特大学获工学博士学位, 2000年原吉林工业大学机械工程博士后流动站(汽车动态模拟国家重点实验室)出站, 主要从事预测控制、鲁棒控制及非线性控制的理论与应用研究, E-mail: chen h@jlu.edu.cn;

韩光信 (1971—), 男, 博士研究生, 2002年吉林大学获控制理论与控制工程工学硕士, 主要从事预测控制和鲁棒控制理论与应用研究;

刘志远 (1957—), 男, 教授, 博士生导师, 1982年在浙江丝绸工学院获工学学士学位, 1993年在哈尔滨工业大学获工学博士学位, 1994年在哈尔滨工业大学机械工程博士后流动站出站, 主要从事机器人控制、预测控制及高精度伺服控制方面的研究, E-mail: zhiyuan@public.hr.hl.cn.