

基于多分辨率分析的 T-S 模糊系统

王 辉^{1,2}, 肖 建²

(1. 中国空气动力研究与发展中心, 四川 绵阳 621000; 2. 西南交通大学 电气工程学院, 四川 成都 610031)

摘要: 目前模糊系统缺乏保持辨识精度与模糊语义最佳折中的有效辨识方法, 其主要原因在于缺乏系统的优化结构辨识方法. 因此, 本文从时-频域角度构造出基于多分辨率分析的 T-S(Takagi-Sugeno)模糊系统拓扑结构. 然后, 采用具有多分辨率特点的 B-样条尺度函数构造模糊隶属函数, 根据投影算法和模糊隶属函数相异测度给出了模糊系统结构辨识算法. 仿真结果验证了这种模糊系统及其结构辨识算法的有效性.

关键词: T-S 模糊系统; 多分辨率分析; B-样条尺度函数; 结构辨识

中图分类号: TP15 **文献标识码:** A

T-S fuzzy system based on multi-resolution analysis

WANG Hui^{1,2}, XIAO Jian²

1. China Aerodynamic Research and Development Center, Mianyang Sichuan 621000, China;

2. School of Electric Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu Sichuan 610031, China)

Abstract: The existing methods of fuzzy system identification hardly keep good trade-off between precision and fuzzy meaning. One of the main reasons is that we are short of systematic and optimal structure identification methods. Thus, a novel topology of T-S(Takagi-Sugeno) fuzzy system is constructed based on multi-resolution analysis from the view of time-frequency domain. Then, the fuzzy membership functions are constructed by B-spline scale functions with multi-resolution characteristic; an adaptive learning algorithm for structure identification of fuzzy system is proposed based on projection algorithm and dissimilarity measure of fuzzy membership functions. Simulation results show the efficiency of the fuzzy system and its structure identification algorithm.

Key words: T-S fuzzy system; multi-resolution analysis; B-spline scale function; structure identification

1 引言(Introduction)

自 L. A. Zadeh 教授提出的模糊集理论以来, 模糊系统已发展成为智能系统的一个重要分枝, 特别是在控制领域中的应用取得了令人欣喜的成功. 模糊系统是一种基于规则的智能系统. 随着从事模糊系统的研究者的不断努力, 模糊系统已从单纯的语言规则到从输入/输出数据中提取规则; 从无学习发展到自适应学习. 根据模糊系统的发展趋势, 我们可以看出, 随着被控或待辨识的系统复杂性和精度提高, 模糊系统的建立单纯依靠专家知识或操作者的经验已显得力不从心. 因此, 文献[1, 2]认为, 模糊系统与其它智能系统、传统理论相结合, 是模糊系统的主要发展方向. 基于该研究方向, 国内外有许多学者在这些年来做了大量的相关研究.

其中, 模糊系统结构辨识及其参数学习是模糊系统研究的一个重要方面. 有关这方面的研究, 有许

多文献可参阅, 如文献[3~6](限于篇幅, 这里略举一二). 但模糊结构辨识目前仅限于启发式学习(heuristic learning), 无严格理论作指导; 另外, 在无优化的模糊系统结构下, 参数学习(包括基于梯度算法或非梯度算法)只能使系统具有有限的逼近精度, 同时破坏了模糊隶属函数具有的语意, 使得模糊规则无解释性, 失去了模糊系统本身最重要的特点. 因此, 本文针对上述一些局限, 提出了基于多分辨率分析的 T-S 模糊系统. 该方法采用了多分辨率分析技术, 从时-频域的角度, 结合小波多分辨率分析构造模糊系统, 使模糊结构辨识具有理论基础, 同时模糊隶属函数具有语义特征和具有多分辨率模糊粒度的特点; 另外, 参数学习只限于模糊后件的学习, 避免了非线性数值算法和陷入局部极小值, 具有全局收敛性.

2 小波多分辨率分析定义 (Definition of wavelet multi-resolution analysis)

设一函数 $\phi(x) \in L^2(\mathbb{R})$, 且 $\{\phi(x-n): n \in \mathbb{Z}\}$ 是 $V_0 \subset L^2(\mathbb{R})$ 的一个 Riesz 基, 记

$$\phi_{k,n}(x) := 2^{k/2} \phi(2^k x - n), \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

其中: k 为尺度因子, 在本文又称为分辨率因子或频率因子; n 为平移因子; $\mathbb{R}$ 为实数域, $\mathbb{Z}$ 为整数域.

由 $\phi_{k,n}(x)$ 张成 $L^2(\mathbb{R})$ 的闭子空间为

$$V_k = \text{clos}_{L^2(\mathbb{R})} \langle \phi_{k,n}(x): n \in \mathbb{Z} \rangle.$$

如果序列 V_k 满足如下性质:

$$1) \cdots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \cdots;$$

$$2) \text{clos}_{L^2(\mathbb{R})} \left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} V_k \right) = L^2(\mathbb{R});$$

$$3) \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} V_k = \{0\};$$

$$4) f(x) \in V_k \Leftrightarrow f(2x) \in V_{k+1}, \quad k \in \mathbb{Z};$$

5) $V_{k+1} = V_k + W_k, k \in \mathbb{Z}$. 其中 W_k 是 V_{k+1} 关于 V_k 的一种补空间, 由小波 $\Psi(x)$ 生成的 Riesz 基 $\{\Psi_{k,n}(x)\}$ 线性张成的闭包构成, 即

$$W_k = \text{clos}_{L^2(\mathbb{R})} \langle \Psi_{k,n}(x): n \in \mathbb{Z} \rangle, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

其中 $\Psi_{k,n}(x) := 2^{k/2} \Psi(2^k x - n)$ 且 V_k 可表示为

$$V_k := \cdots + W_{k-2} + W_{k-1}, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$6) f(x) \in V_k \Leftrightarrow f(x + \frac{1}{2^k}) \in V_k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

那么 $\phi(x)$ 生成了一个多分辨率分析 $\{V_k\}^{[7,8]}$, 其中 $\phi(x)$ 被称为尺度函数.

根据小波多分辨率分析定义, 可以给出如下定理:

定理 1 设 $f(x) \in L^2(\mathbb{R}), \forall x, \forall \epsilon > 0, \exists K$, 使得

$$\|f(x) - \sum_j c_{K,j} \phi_{K,j}(x)\| < \epsilon \text{ 成立.}$$

证 设 $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$, 在 V_k 上的投影为 $f_k(x)$. 由于 $\phi_{k,n}(x)$ 是 V_k 空间的一个 Riesz 基, 所以 $f_k(x) = \sum_j c_{k,j} \phi_{k,j}(x)$. 根据性质多分辨率性式(1), (2)可知

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V_k = L^2(\mathbb{R}),$$

所以

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f(x) - \sum_j c_{k,j} \phi_{k,j}(x)\| = 0.$$

由此可见, 当分辨率因子 k 增加时, $f_k(x)$ 对 $f(x)$ 逼近误差是收敛的. 因此, $\forall x, \forall \epsilon > 0, \exists K$, 当 $k \geq K$ 时可保证 $\|f(x) - \sum_j c_{k,j} \phi_{k,j}(x)\| < \epsilon$. 证毕.

因此, 把具有模糊语意的多分辨率尺度函数作为模糊隶属函数的 T-S 模糊系统具有多分辨率函数逼近特点. 基于上述认识, 下节将给出一种新颖的基

于多分辨率分析的模糊系统拓扑结构.

3 基于多分辨率分析的 T-S 模糊系统 (T-S fuzzy system based on multi-resolution analysis)

1) 多分辨率分析与模糊划分的关系.

在模糊系统中, 不同输入变量不同输入区间, 对系统的输出影响作用不同, 可以采用多分辨率分析技术, 来构造多分辨率模糊系统. 例如, 如果模糊变量值 A_i (大) 对输出影响大, 即模糊映射输出函数在此模糊变量值所对应的输入空间里变化大, 即可进行较高分辨率模糊划分, 如 A_i 可以再划分为 $\{\cdots$ 次较大, 较大, 大, 次过大, 过大 $\cdots\}$. 基于此目的, 本文采用了一类尺度函数作为模糊隶属函数的母函数, 具体分析如下.

记 A_i 为模糊变量值, $\mu_{A_i}(x)$ 为 A_i 的隶属函数, p 为在输入空间的模糊变量值个数. 设 $x \subseteq [a, a + \Delta]$, 尺度函数支撑 $\text{supp} \phi(x) \subseteq [0, M]$ 且 $\phi(x) \geq 0$. 那么 $\text{supp} \phi_{k,n}(x) \subseteq [2^{-k}n, 2^{-k}(n+M)]$, 如图 1 所示. 则当 $\text{supp} \phi_{k,n}(x) \cap \text{supp} \phi_p(x) \neq \{0\}$ 的 $\phi_{k,n}(x)$ 个数为

$$p = \langle 2^k \Delta + M \rangle \quad (\text{其中} \langle \cdot \rangle \text{表示取整运算}). \quad (1)$$

当 $\phi_{k,n}(x)$ 作为模糊隶属函数时, 随着分辨率提高 (即尺度因子 k 值的增大), 据式(1)可知, 模糊划分愈细, 则愈细化了模糊信息粒度^[9]. 所以, 尺度函数作为模糊隶属函数, 可以根据待逼近的函数 $f(x)$ 频率的变化自适应调整模糊空间的划分.

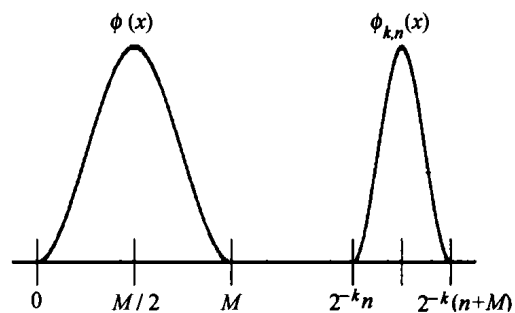


图 1 尺度函数及其扩张平移生成的尺度函数

Fig. 1 Scale function and scale function generated by dilation and translation

2) 模糊隶属函数构造.

根据定理 1 可知, 尺度函数线性组合可以多分辨率逼近函数, 所以由尺度函数构成模糊隶属函数是构造多分辨率分析的 T-S 模糊系统的前提. B-样条函数作为尺度函数具有紧支撑性、对称性、非负值和简单的显式表达式特性, 生成的 B-样条小波同时具有半正交性, 即

$$\langle \Psi_{j_1, k_1}, \Psi_{j_2, k_2} \rangle = 0, j_1 \neq j_2,$$

$$\langle \phi_{j_1, k_1}, \Psi_{j_2, k_2} \rangle = 0, j_1 \neq j_2,$$

且满足多分辨率分析条件^[10].

本文采用多分辨率 B-样条尺度函数构造模糊隶属函数,能够代表多分辨率模糊语言值,例如次正大,较正大等.在多维输入情况下,张量积构成的多维 B-样条尺度函数与模糊逻辑乘具有相同的数学表达式;同时根据 B-样条尺度函数性质

$$\sum_{i=1}^n \phi_{j_i, i}(x) = 1 \quad (2)$$

又能满足强模糊划分条件,其中, $x \in A \subset R$.

3) 基于多分辨率分析的模糊系统.

先从 SISO 系统分析,基于多分辨率的模糊系统的第 i 条规则如下:

if $p(f(x))$ is B_i scale level, then y is $f_{p_i}(x)$.

其中: $p(\cdot)$ 频率因子算子; B_i 的模糊隶属函数为 $\mu_{B_i}(p, x)$ 且 p_i 为隶属函数中心点.设在时域内有频率因子为 p_m, p_n 的相邻隶属函数,如图 2 所示.其相应 $x \rightarrow f(x)$ 在频域内的隶属函数见图 3.

图 3 中的模糊变量值 B_m, B_n 的隶属函数分别由式(3),(4)确定,

$$\mu_{B_m}(p, x) = \frac{\sum_{k \in K_m} \phi_{p_m, k}(x)}{\sum_{k \in K_m} \phi_{p_m, k}(x) + \sum_{k \in K_n} \phi_{p_n, k}(x)}, \quad (3)$$

$$\mu_{B_n}(p, x) = \frac{\sum_{k \in K_n} \phi_{p_n, k}(x)}{\sum_{k \in K_m} \phi_{p_m, k}(x) + \sum_{k \in K_n} \phi_{p_n, k}(x)}. \quad (4)$$

由式(3)或(4)可知,当 $x \rightarrow f(x)$ 属于同一分辨率水平因子时,频率域的隶属值为 1;当不完全属于同一分辨率水平因子时,频率域的隶属值为 x 在时域内的相应尺度隶属值所占的比值.由于图 2 仅给出了时域内的局部区间的模糊隶属函数分布,所以图 3 中模糊变量值 B_m, B_n 的模糊隶属函数左右部分用虚线表示.

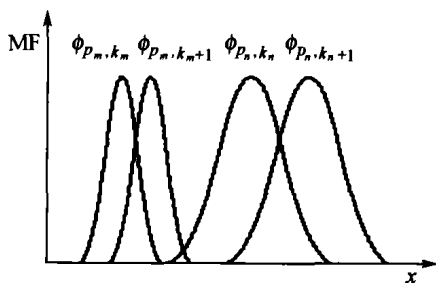


图 2 时域内相邻模糊隶属函数

Fig. 2 Neighboring fuzzy membership functions in time domain

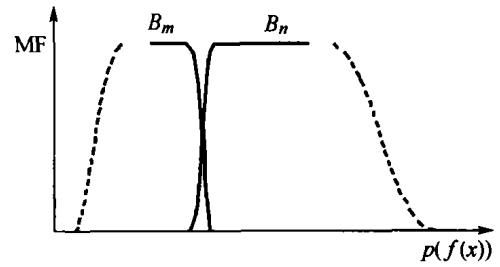


图 3 相应频率域模糊隶属函数

Fig. 3 Corresponding fuzzy membership functions in frequency domain

设 $f_{p_i}(x)$ 为 p_i 分辨率因子下的模糊规则基,共有 I_{p_i} 条规则.设第 k 条规则形式为 0 阶 T-S 型,

if x is $A_{p_i, k}$, then y is y_k .

其中 $A_{p_i, k}$ 的隶属函数 $\mu_{A_{p_i, k}}(x) = \phi_{p_i, l_k}(x) \cdot f_{p_i}(x)$ 子模糊系统数学表达式为

$$f_{p_i}(x) = \frac{\sum_{k=1}^{I_{p_i}} y_{l_k} \phi_{p_i, l_k}(x)}{\sum_{k=1}^{I_{p_i}} \phi_{p_i, l_k}(x)}.$$

其中 $l_k \in \mathbb{Z}$ 且是连续序列.

当 $\mu_{B_i}(p, x) = 1$ 时,由 B-样条尺度函数性质

$\sum_{i=1}^n \phi_{j_i, i}(x) = 1$, 上式可简化为

$$f_{p_i}(x) = \sum_{k=1}^{I_{p_i}} y_k \phi_{p_i, l_k}(x).$$

设基于多分辨率的模糊系统有 I 条多分辨率模糊规则,则总的表达式为

$$f(x) = \frac{\sum_{i=1}^I \mu_{B_i}(p, x) f_{p_i}(x)}{\sum_{i=1}^I \mu_{B_i}(p, x)} = \sum_{i=1}^I \mu_{B_i}(p, x) f_{p_i}(x).$$

采用 u and $v \Rightarrow u \times v$ 逻辑运算方法,由一维可以扩展为 n 维输入-单输出的基于多分辨率分析的模糊系统.设第 l 维的规则总数为 I_l ,那么 n 维情况下的总表达式为

$$F = \sum_{l=1}^I c_l \Phi_l(X).$$

其中: $\Phi_l(X) = \phi_{p_{1,l}, h_{1,l}}, \dots, \phi_{p_{n,l}, h_{n,l}}; \phi_{p_{i,l}, h_{i,l}}$ 为第 l 条规则中的第 i 输入模糊隶属函数.

设 n 维模糊系统规则数为 $\bar{I} = I_1 \times I_2 \cdots \times I_n$; 根据式(2),(3)或(4)可知,一维基于多分辨率分析的模糊系统具有强模糊划分性(即完整的语义),所以根据张量积构成的多输入单输出多分辨率模糊系统有

$$\sum_{l=1}^i \Phi_l(X) = 1, \quad (5)$$

即模糊输入空间具有强模糊划分性。

4 基于多分辨率分析的模糊系统自适应学习算法 (Adaptive learning algorithm of fuzzy system based on multi-resolution)

下面根据所构造的基于多分辨率分析的模糊系统拓扑结构,利用多分辨率 B-样条尺度函数作为模糊隶属函数来构造 T-S 模糊系统.由于采用的 B-样条函数具有紧支撑特性,所以避免了在时域内的模糊隶属函数的平移因子范围截取问题;另外,关于频域内的尺度因子 m 截取范围为 $0 \leq m \leq m_{\max}$, $m \in \mathbb{Z}$, 其中最大尺度因子范围的确定可采用文献[11]的方法确定:

$$\frac{N}{\ln N} \leq 2^{dm_{\max}} \leq \frac{2N}{\ln N}. \quad (6)$$

另外,由于结构辨识采用多分辨率方法确定,所以 T-S 模糊系统前件中的模糊基函数已具有优化参数,所以只涉及到模糊后件参数辨识.这样,可以采用简单线性优化方法进行参数辨识.

模糊系统自适应学习算法:

设 $\{(X_i, y)\}_{i=1}^N$ 为一组训练样本, $X_i \in \mathbb{R}^d$, $y_i \in \mathbb{R}$. 设 $x_i^j \in [x_{\min}^j, x_{\max}^j]$, $j = 1, 2, \dots, d$, $y_{i,j} = \frac{\partial y}{\partial x^j} \Big|_{x_i^j}$, $\text{supp} \phi(x) \subseteq [0, \Delta]$, $x \in \mathbb{R}$.

Step 0 根据式(6)确定尺度因子范围.

Step 1 由于该模糊隶属函数的紧支撑特性,平移因子 $k^j \in \mathbb{Z}$ 在尺度因子 m 水平下的最大值和最小值为: $k_{\max}^j = 2^m x_{\max}^j$, $k_{\min}^j = 2^m x_{\min}^j - \Delta$.

Step 2 采用投影算法,提取在 m 尺度水平下的模糊隶属函数,即

$$\hat{e}_{m,k^j} = (y'_{1,j}, \dots, y'_{N,j}) \times (\phi_{m,k^j}(x_1^j), \dots, \phi_{m,k^j}(x_N^j))^T, \\ B_m = \{\phi_{m,k^j} \mid \hat{e}_{m,k^j} \geq \lambda\}; m+1 \rightarrow m.$$

Step 3 根据 m 尺度水平下的与前面已提取的模糊隶属函数相异测度大小,去掉 m 尺度水平下的相似隶属函数,构成该尺度水平下的新的模糊隶属函数集合 B'_m . 测度计算为

$$d(V_1, V_2) = \sqrt{\sum_{k=1}^2 (v_{1,k} - v_{2,k})^2}.$$

其中 $V_i = (v_{i,1}, v_{i,2})$, $i = 1, 2$ 为模糊隶属函数的中心值和支撑宽度构成的矢量.

Step 4 如果 $m \leq m_{\max}$, 则转到 Step 2; 否则转入下一步.

Step 5 设 D^j 为 j th 输入变量的支撑域. 如果满

足 $(\text{supp} \bigcup_{m=0}^{m_{\max}} B'_m) \cap D^j = D^j$ 条件,则转入 Step 6; 否则,以增加最小尺度因子模糊隶属函数使其满足该条件.

Step 6 模糊系统后件参数辨识.

一般紧支撑对称尺度函数不是正交函数,但估计的尺度函数扩展系数(模糊系统后件)可以作为参数初始值,这样可避免陷入局部极小值,加快 BP 训练速度.由于只需进行模糊系统后件参数学习,可采用线性寻优方法,如可采用最小二乘算法,具体可参阅相关文献.

5 仿真实例 (Simulation example)

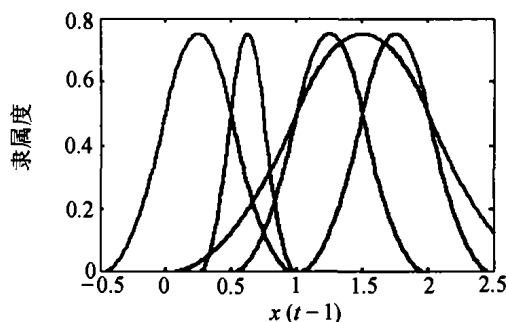
为了验证本文基于多分辨率分析的模糊系统及其自适应学习算法的有效性,现就具有多输入、动态非线性的 Lorenz 系统^[12]

$$\frac{dx}{dt} = -y^2 - z^2 - a(x - F),$$

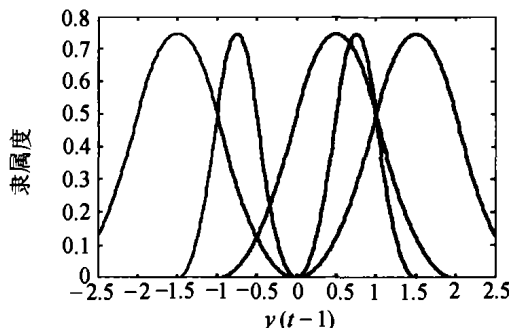
$$\frac{dy}{dt} = xy - bxz - y + G,$$

$$\frac{dz}{dt} = bxy + xz - z$$

进行系统辨识仿真.其中, $a = 0.25$, $b = 4.0$, $F = 8.0$, $G = 1.0$. 设系统输入为 $x(t-1)$, $y(t-1)$, $z(t-1)$, 输出为 $x(t)$. 设采样数据对为 2000, 其中前 1000 对用于训练,后 1000 对用于验证该模糊系统的泛化能力,采用二阶 B-样条尺度函数作为模糊隶属函数.图 4 为提取的 T-S 模糊系统中 3 个输入变量域的模糊隶属函数,图 5 为该模糊系统的逼近结果.



(a) $x(t-1)$ 模糊隶属函数分布



(b) $y(t-1)$ 模糊隶属函数分布

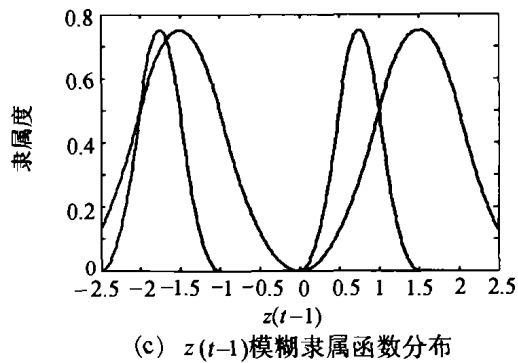


图4 基于多分辨率分析的 T-S 模糊系统模糊隶属函数的提取

Fig. 4 Fuzzy membership functions extracted of T-S fuzzy system based on multi-resolution analysis

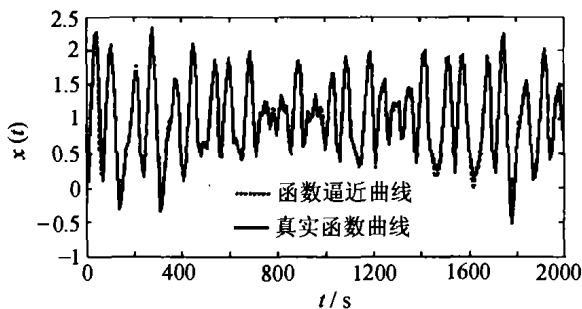


图5 基于多分辨率分析的 T-S 模糊系统函数逼近

Fig. 5 Fuzzy approximation of T-S fuzzy system based on multi-resolution analysis

由上述仿真结果,可以看出,基于多分辨率分析的 T-S 模糊系统具有很好的函数逼近能力,同时又不以牺牲模糊隶属语义为代价;另外,该模糊系统具有结构简单的优点,又可避免进行复杂而又耗时的非线性优化计算。

6 结论(Conclusion)

本文基于小波变换和多分辨率分析理论,提出了基于多分辨率分析的 T-S 模糊系统.该模糊系统能根据函数变化快慢而自适应进行模糊隶属划分,因此,具有较强捕捉函数局部变化的能力.该系统不需要进行复杂而又耗时的非线性优化计算,计算简单有效;同时,由此提取的模糊规则具有明显的语义特征;另外,根据光滑性要求,可通过选取不同阶次的 B 样条函数作为隶属函数母函数进行函数逼近.仿真结果表明,该模糊系统具有较强的函数逼近能力。

参考文献(References):

[1] 王立新.模糊系统:挑战与机遇并存——十年研究之感悟[J].

自动化学报,2001,27(4):585-590.

(WANG Lixin. Fuzzy system: Coexistence of challenge and opportunity - sentiment for research of ten years [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2001, 27(4): 585-590.)

[2] 胡包钢,应浩.模糊 PID 控制技术研究发展回顾及其面临的若干问题[J].自动化学报,2001,27(4):567-584.

(HU Baogang, YING Hao. Review on the research and development of fuzzy PID control technology and its some confronting problems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2001, 27(4): 567-584.)

[3] JANG J S R. ANFIS: Adaptive-networks-based fuzzy inference system [J]. *IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics*, 1993, 23(3): 665-684.

[4] JANG J S R. Structure determination in fuzzy modeling: a fuzzy CART approach [C]// *Proc of the 3rd IEEE Int Conf on Fuzzy Systems*. Orlando: IEEE Press, 1994: 480-485.

[5] ABE Shigeo, LAN M-S. Fuzzy rules extraction directly from numerical data for function approximation [J]. *IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics*, 1995, 25(1): 119-129.

[6] LIN Cheng-Jian, LIN Chui-Ten. Reinforcement learning for an ART-based fuzzy adaptive learning control network [J]. *IEEE Trans on Neural Networks*, 1996, 7(3): 709-731.

[7] MALLAT S G. A theory for multi-resolution signal decomposition: the wavelet representation [J]. *IEEE Trans on Pattern and Machine Intelligence*, 1989, 11(7): 674-693.

[8] 程正兴.小波分析算法与应用[M].西安:西安交通大学出版社,2000:57-77.

(CHENG Zhengxing. *Wavelet Analysis Algorithm and Its Application* [M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 2000: 57-77.)

[9] ZADEH L A, RUAN Da, HUANG Chongfu. *Fuzzy Sets and Fuzzy Information-Granulation Theory* [M]. Beijing: Beijing Normal University Press, 2000: 305-432.

[10] CHUI C K, WANG Jian-Zhong. On compactly supported spline wavelets and a duality principle [J]. *Trans on the American Mathematical Society*, 1992, 330(2): 903-915.

[11] SJÖBERG J, ZHANG Qinghua, LJUNG L, et al. Nonlinear black-box modeling in system identification: A unified overview [J]. *Automatica*, 1995, 31(12): 1691-1724.

[12] LORENZ E N. Irregularity: A fundamental property of the atmosphere [J]. *Tellus*, 1984, A(36): 98-110.

作者简介:

王 辉 (1972—),男,中国空气动力研究与发展中心助理研究员,西南交通大学在读博士生,2000年7月在西南交通大学获硕士学位,研究方向为智能控制与非线性辨识,E-mail: wang_sunshine@163.com;

肖 建 (1950—),男,西南交通大学电气工程学院教授,博士生导师,主要研究领域为计算机控制系统、鲁棒控制、交流传动控制等,E-mail: jian_xiao@mail.china.com.