

## 类反斜线回滞系统的模型参考滑模控制

张达科<sup>1</sup>, 胡跃明<sup>2</sup>, 吴捷<sup>3</sup>, 郭华芳<sup>1</sup>

(1. 广东省现代控制技术重点实验室, 广东 广州 510070; 2. 华南理工大学 自动化科学与工程学院, 广东 广州 510640;

3. 华南理工大学 电力学院, 广东 广州 510640)

**摘要:** 回滞现象广泛地存在于许多控制研究领域, 可能引起系统的振荡, 甚至造成系统的不稳定, 因此有必要对回滞系统的有效控制进行研究. 针对一类重要的类反斜线回滞系统, 通过对类反斜线回滞特性的分析, 将其分解为线性部分和已知上限的非线性不确定部分, 给定期望的不存在回滞特性的光滑轨线, 得到了模型参考滑模控制律, 通过跟踪给定期望的不存在回滞特性的光滑轨线, 削弱甚至消除回滞特性. 仿真结果表明此控制律是有效的.

**关键词:** 回滞; 滑模控制; 模型参考

**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A

## Model reference sliding model control for systems with backlash-like hysteresis

ZHANG Da-ke<sup>1</sup>, HU Yue-ming<sup>2</sup>, WU Jie<sup>3</sup>, GUO Hua-fang<sup>1</sup>

(1. Guangdong Key Laboratory of Modern Control Technology, Guangzhou Guangdong 510070, China;

2. College of Automation Science and Engineering, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China;

3. Electric Power College, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China)

**Abstract:** Hysteresis exists in many control fields, and often brings about the oscillation, and even instability to the system. This paper focuses on an important class of systems with backlash-like hysteresis. In analyzing the backlash-like hysteresis, it is first decomposed into certain linear part and uncertain nonlinear part with upper limit. An expected smooth trajectory is then given. A model reference sliding model control for this kind of systems is presented. The hysteresis is mitigated or even eliminated in tracking the expected smooth trajectory without hysteresis. The simulation results show the effectiveness of the control approach.

**Key words:** hysteresis; sliding model control; model reference

### 1 引言 (Introduction)

回滞现象存在于许多物理系统和设备中, 比如电磁场、机械调节器、电子电路、超导材料、压电陶瓷和智能材料等. 由于回滞特性表现出不可微的非线性, 严重地限制了实际系统的性能, 并可能引起系统的振荡, 造成系统不稳定. 无论是从控制理论还是应用的角度, 回滞特性都引起了研究人员的重视, 并且做了大量的控制研究工作, 最常用的方法是采用回滞环逆模型进行前馈控制, 构造回滞环的逆模型, 直接抵消或者削弱回滞环带来的影响<sup>[1~3]</sup>, 许多研究都是建立在回滞环逆模型前馈控制的基础上, 再加上其他控制, 比如前馈加 PID 控制<sup>[4,5]</sup>. 还有采用自适应控制<sup>[6~8]</sup>、变结构控制<sup>[9]</sup>和相位控制<sup>[10]</sup>等. 大

部分控制方法都是在回滞环上行和下行曲线上分别进行不同的控制, 构造的逆模型也是个回滞环. 文献 [10] 把回滞环看作是“明显的相移 (apparent phase shift)”, 从而加入一个相移控制器. 此外, 回滞环解一般都是很复杂的<sup>[8]</sup>, 大部分控制方法还不能进行稳定性分析.

虽然目前已经有不少回滞模型, 比如 Preisach, Krasnoselskii-Pokrovskii Hysteron, Duhem 模型, Bouc 模型等, 但是这些模型只是适用于某一类回滞现象. 直到现在, 对回滞环现象的建模还没有一个通用的方法, 其建模仍然是件很有难度的工作.

本文针对一类重要的类反斜线回滞系统, 通过分析类反斜线回滞环解的特性, 将其分解为线性部

分和已知上限的非线性不确定部分,然后给出一个稳定的没有回滞特性的线性参考模型,推导出模型参考滑模控制律,并对类反斜线回滞系统进行控制,使得系统输出跟踪参考模型输出,从而达到削弱甚至消除回滞特性的目的。

### 2 系统描述(System description)

本文研究的系统是单入单出系统,其框图如图1,由类反斜线回滞环  $H$  和被控对象  $P$  组成, $H$  前置  $P$ .类反斜线回滞环  $H$  在下一部分详细说明,一般可以表示为

$$u = H[v(t)]. \quad (1)$$

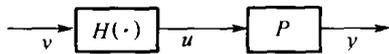


图1 系统框图

Fig. 1 Block diagram of system

被控系统可为线性系统或者非线性系统.本文考虑一般仿射非线性系统,结论和方法做相应修改就可以应用到线性系统中.设仿射非线性系统为下列形式:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u, \\ y = h(x). \end{cases} \quad (2)$$

其中  $x \in \mathbb{R}^n$ ,为状态向量, $f$ 和 $g$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上充分光滑的向量场, $h(x)$ 为一充分光滑的非线性函数, $v, u, y \in \mathbb{R}$ 分别为 $H$ 的输入,也是整个系统的输入, $H$ 的输出,也是 $P$ 的输入和系统的输出.假定  $x \in U, U$ 为一个 $\mathbb{R}^n$ 的开子集,一般都包含无控制作用时的平衡点  $x_0$ ,即包含  $f(x_0) = 0$  的点.本文考虑被控系统的相对阶为  $\gamma = m$ ,即  $\forall x \in U$ ,有

$$L_g L_i^i h(x) \equiv 0, \quad i = 0, \dots, m - 2, \quad (3)$$

$$L_g L_i^{m-1} h(x) \neq 0. \quad (4)$$

给定期望的不存在回滞特性的光滑轨线  $y_r(t)$ ,其  $m$  阶导数存在。

模型参考滑模控制的目的是,设计一个控制律  $v(t)$ ,使得由式(1)和(2)构成的回滞系统的输出跟踪给定期望的不存在回滞特性的光滑轨线,  $y \rightarrow y_r$ ,从而削弱甚至消除回滞特性。

### 3 类反斜线回滞曲线及其性质(Curve of backlash-like hysteresis and its property)

对于式(1)的类反斜线回滞环方程,可用下面方程来表示<sup>[8]</sup>:

$$\dot{u} = \lambda |\dot{v}| (k_h v - u) + B_1 \dot{v}. \quad (5)$$

假定初始条件为  $(v_0, u_0)$ . 通过解上式,得到类反斜线回滞环的解为

$$u = k_h v(t) + d(v). \quad (6)$$

其中

$$k_h > 0,$$

$$d(v) = [u_0 - k_h v_0] e^{-\lambda(v-v_0)\text{sgn}\dot{v}} + e^{-\lambda v \text{sgn}\dot{v}} \int_{v_0}^v [B_1 - k_h] e^{\lambda\xi(\text{sgn}\dot{v})} d\xi. \quad (7)$$

当  $\dot{v} > 0$ ,且  $v$  趋于正无穷时有

$$\lim_{v \rightarrow +\infty} d(v) = -\frac{k_h - B_1}{\lambda}. \quad (8)$$

当  $\dot{v} < 0$ ,且  $v$  趋于负无穷时有

$$\lim_{v \rightarrow -\infty} d(v) = \frac{k_h - B_1}{\lambda}. \quad (9)$$

由式(8)和(9)可知,  $d(v)$  有界,不妨假设:

$$\|d(v)\| \leq \rho_0. \quad (10)$$

从式(7)和(10)可知,类反斜线回滞可以看作是由斜率  $k_h$  为的线性部分和一个已知上界的不确定部分  $d(v)$  组成。

类反斜线回滞环曲线如图2,其中  $\lambda = 1, k_h = 3.1635, B_1 = 0.345, v = \beta \sin t, \beta = 2, 3, 4, 5, 6$ . 关于类反斜线回滞环的其他性质,可以参阅文献[8]。

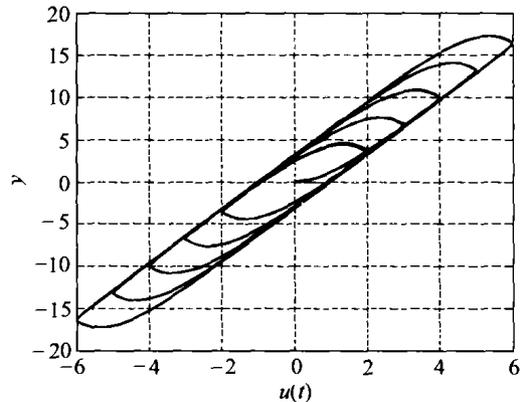


图2 类反斜线回滞环曲线

Fig. 2 Backlash-like hysteresis

### 4 模型参考滑模控制(Model reference sliding control)

滑模控制,也称变结构控制<sup>[11-13]</sup>,是通过选取适当的切换函数首先使系统的状态轨线运动到指定的滑动流形,然后沿此流形渐近运动到平衡点.系统一旦进入滑动模运动,在一定条件下就对外界干扰及参数扰动具有不变性.故这种控制方法具有算法简单、抗干扰性能好及容易在线实现等优点,特别适用于不确定非线性控制对象。

滑模控制对系统不要求有精确的模型,而只求给出模型参数在一定的范围内进行变动.从式(6)和(10)可知,类反斜线回滞环恰好有此特性,因此可

以采用滑模控制来进行控制设计.

实际系统为类反斜线回滞环  $H$  前置于被控对象  $P$  前,  $H$  为式(1). 其中式(1)中的  $u$  为类反斜线回滞的输出, 即式(6). 将式(6)代入式(2)可得类反斜线回滞系统为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + k_h \mathbf{g}(\mathbf{x})v + \mathbf{g}(\mathbf{x})d(v), \\ y = h(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (11)$$

令

$$e = y - y_r, \quad (12)$$

取滑动流形为

$$S = e^{(m-1)} + a_{m-1}e^{(m-2)} + \cdots + a_1e + a_0 \int_0^t edt. \quad (13)$$

其中所取的  $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}$  使得方程

$$z^{(m)} + a_{m-1}z^{(m-1)} + \cdots + a_1z + a_0z = 0 \quad (14)$$

的根都在左半平面. 对式(13)求导得:

$$\begin{aligned} \dot{S} &= e^{(m)} + a_{m-1}e^{(m-1)} + \cdots + a_1\dot{e} + a_0\dot{e} = \\ &= y^{(m)} + a_{m-1}y^{(m-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0\dot{y} - \\ &= (y_r^{(m)} + a_{m-1}y_r^{(m-1)} + \cdots + a_1\dot{y}_r + a_0\dot{y}_r). \end{aligned} \quad (15)$$

令

$$y_r^{(m)} + a_{m-1}y_r^{(m-1)} + \cdots + a_1\dot{y}_r + a_0\dot{y}_r = F(r), \quad (16)$$

因为被控系统  $P$  的相对阶  $\gamma = m$ , 即有式(3)和(4)成立, 同时有

$$y^{(m)} = L_f^m h(\mathbf{x}) + L_g L_f^{m-1} h(\mathbf{x})u. \quad (17)$$

将式(6)代入上式得

$$\begin{aligned} y^{(m)} &= L_f^m h(\mathbf{x}) + L_g L_f^{m-1} h(\mathbf{x}) \cdot k_h v + \\ &= L_g L_f^{m-1} h(\mathbf{x}) \cdot d(v). \end{aligned} \quad (18)$$

令

$$\hat{\mathbf{a}} = [a_0 \quad a_1 \quad \cdots \quad a_{m-1}], \quad (19)$$

$$\hat{\mathbf{y}} = [y \quad \dot{y} \quad \cdots \quad y^{(m-1)}]^T = [h(\mathbf{x}) \quad L_f h(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad L_f^{m-1} h(\mathbf{x})]^T, \quad (20)$$

将式(16), (18)~(20)代入式(15)有

$$\begin{aligned} \dot{S} &= L_f^m h(\mathbf{x}) + L_g L_f^{m-1} h(\mathbf{x}) \cdot k_h v + \\ &= L_g L_f^{m-1} h(\mathbf{x}) \cdot d(v) + \hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{y}} - F(r). \end{aligned} \quad (21)$$

选取控制律为

$$v = v_n + v_d. \quad (22)$$

其中

$$v_n = - \frac{L_f^m h(\mathbf{x}) + \hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{y}} - F(r) + \alpha \text{sgn}(S)}{k_h \cdot L_g L_f^{m-1} h(\mathbf{x})},$$

$$v_d = - \rho \text{sgn}(S \cdot L_g L_f^{m-1} h(\mathbf{x})),$$

$$\alpha > 0,$$

$$\rho = \rho_0/k_h.$$

由式(1), (2)和(22)描述的闭环系统的稳定性, 可以有下面的定理来描述.

**定理** 对于类反斜线回滞系统(1)和(2), 当采用控制律(22)来使被控系统输出跟踪给定期望的不存在回滞特性的光滑轨线  $y_r(t)$  时, 跟踪误差将收敛到零, 并且当系统进入滑动流形后, 不大于  $\gamma - 1$  阶的跟踪误差导数指数收敛到零.

**证** 构造一个函数

$$V = \frac{1}{2} S^2. \quad (23)$$

显然是一个 Lyapunov 函数. 对式(23)求导代入控制律(22), 可得

$$\dot{V} = S\dot{S} = -\alpha S \sqrt{|S|} \text{sgn}(S) - SS_d \leq 0. \quad (24)$$

容易证明  $S$  有限时间到达零.

根据式(13)和(14), 当系统运动到滑动流形  $S$  上时,  $\int_0^t edt, e, \dot{e}, \dots, e^{(m-1)}$  将指数收敛到零.

证毕.

由式(13)可知, 在进行控制设计时, 不仅仅考虑了当系统进入滑模流形时, 误差收敛到零, 而且还考虑了误差的  $\gamma - 1$  阶导数都收敛到零, 因此整个闭环系统具有良好的动态特性.

在滑模控制中, 由于存在回滞、开关延迟和其它动态非线性, 使得系统中存在抖振现象, 系统的理想滑动流形  $S = 0$  一般无法得到. 常用的解决方法是在滑动流形  $S = 0$  附近引入一边界层, 将控制输入中的符号函数用如下定义的饱和函数代替

$$\text{sat}(\beta) \doteq \begin{cases} 1, & \beta > \epsilon, \\ \frac{\beta}{\epsilon}, & -\epsilon \leq \beta \leq \epsilon, \\ -1, & \beta < -\epsilon. \end{cases} \quad (25)$$

其中  $\epsilon$  是非常小的正数, 为边界层的厚度. 在进入边界层后, 饱和函数使得控制变成高增益控制, 代替由符号函数引起的不连续控制. 这种方法使得系统跟踪精度变低, 但是可以有效地抑制抖振, 同时系统仍然是全局稳定的<sup>[14]</sup>. 在仿真试验中, 将控制律(22)中的符号函数用饱和函数代替, 以避免剧烈的抖振.

## 5 仿真(Simulation)

在仿真试验中, 回滞环  $H$  如式(5), 参数如前. 考虑如下的被控对象  $P$ :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2^2 + x_2 \\ y = h(x) = x_1 \end{cases} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

因为

$$L_g h(x) = 0, L_f h(x) = x_2, \\ L_g L_f h(x) = 1 \neq 0, L_f^2 h(x) = -x_1^2 + x_2.$$

所以系统的相对阶  $\gamma = 2$ .

给定参考模型输入为  $r = \sin t$ .

设状态初始值为

$$x_0 = (x_{10}, x_{20}) = (0.1, 0.5).$$

取滑动流形为

$$S = \dot{e} + 110e + 1000 \int_0^t e dt.$$

计算  $\rho_0 = \frac{k_h - B_1}{\lambda} = 2.8185.$

因为  $L_g L_f h(x) = 1$ , 取  $K = \alpha + \rho_0 = 3, \epsilon = 0.1$ , 所得控制律为

$$v = -\frac{1}{3.1635}(-x_1^2 + 1000x_1 + 111x_2 - 999\sin t - 110\cos t + K \cdot \text{sat}(S)).$$

采用 Matlab6.5 仿真软件, 算法为 Ode45, 仿真运算的相对误差为  $1 \times 10^{-4}$ .

图3为类反斜线回滞系统和参考模型系统输出的比较曲线, 图4为类反斜线回滞系统和参考模型系统输出曲线, 图5为类反斜线回滞系统输出和模型参考输出的误差曲线, 图6为类反斜线回滞系统输入曲线. 由以上图3~5的仿真结果可看出, 被控系统能很好地跟踪给定参考模型输出. 图6表明在饱和函数的作用下, 被控系统的输入没有激烈的抖振. 仿真结果表明采用模型参考滑模控制律是非常成功的.

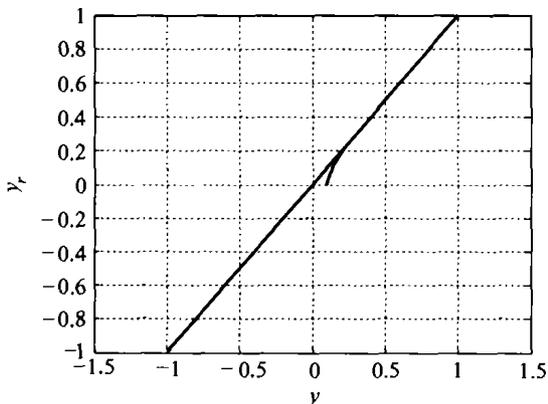


图3 回滞系统和参考系统输出比较  
Fig. 3  $y$  vs.  $y_r$

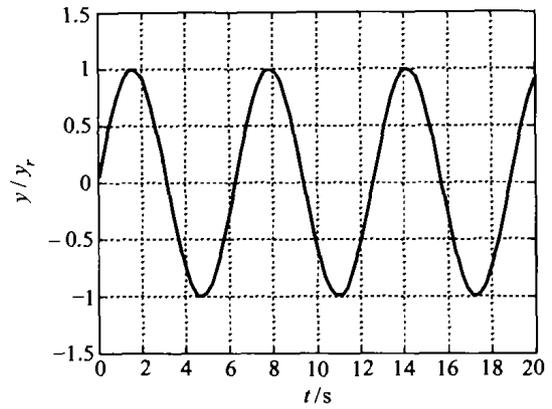


图4 回滞系统和参考系统输出曲线  
Fig. 4 Output of  $y$  and  $y_r$

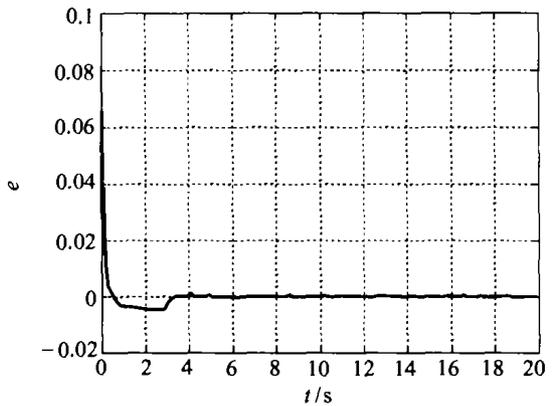


图5 误差曲线  
Fig. 5 Error

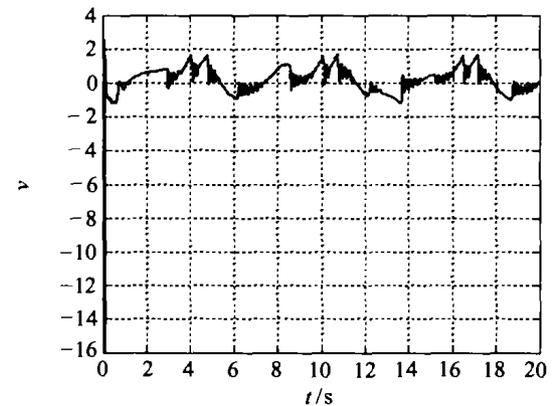


图6 类反斜线回滞系统输入曲线  
Fig. 6 Input of backlash-like hysteresis

## 6 结论(Conclusions)

本文把模型参考滑模控制应用于类反斜线回滞系统控制中. 首先将类反斜线回滞环分解为线性部分和已知上限的不确定部分, 然后给出不具有回滞特性的稳定的线性模型, 通过跟踪该模型的输出, 削弱甚至消除回滞特性. 由于所得控制律保证了误差的  $\gamma - 1$  阶导数都收敛到零, 因此整个闭环系统具有良好的动态特性. 用饱和函数代替控制律中的符

号函数,减弱了系统输入的抖振.仿真结果表明,所采用的控制律是有效的.该方法可以推广到更加一般的回滞系统的控制中.

#### 参考文献(References):

- [1] SMITH R C, BOUTON C. Partial and full inverse compensation for hysteresis in smart material systems [C]// *Proc of the American Control Conference*. Chicago, Illinois: IEEE Press, 2000, 4: 2750 - 2754.
- [2] KREJCI P, KUHNEN K. Inverse control of system with hysteresis and creep [J]. *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, 2001, 148(3): 185 - 192.
- [3] HASEGAWA T, MAJIMA S. A control system to compensate the hysteresis by Preisach Model on SMA actuator [C]// *Int Symposium on Micromechatronics and Human Science*. Nagoya, Japan: IEEE Press, 1998: 171 - 176.
- [4] HAMDAN M, GAO Z. A novel PID controller for pneumatic proportional valves with hysteresis [C]// *Proc of IEEE Industry Applications Conference*. Rome, Italy: IEEE Press, 2000, 2: 1198 - 1201.
- [5] 赵宏伟, 孙立宁, 张涛等. 压电陶瓷驱动器在机器人柔性臂应用中的研究[J]. *压电与声学*, 2000, 22(3): 173 - 176.  
(ZHAO Hongwei, SUN Lining, ZHANG Tao, et al. The research of flexible manipulator driven by piezoelectric actuators [J]. *Piezoelectrics & Acoustooptics*, 2000, 22(3): 173 - 176.)
- [6] TAO G, KOKOTOVIC P V. Adaptive control of plants with unknown hysteresis [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1995, 40(2): 200 - 212.
- [7] AHMAD N J, KHORRAMI F. Adaptive control of systems with backlash hysteresis at the input [C]// *Proc of the American Control Conference*. San Diego, California: IEEE Press, 1999, 5: 3018 - 3022.
- [8] SU C Y, STEPANENKO Y, SVOBODA J, et al. Robust adaptive control of a class of nonlinear systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2000, 45(12): 2427 - 2432.
- [9] HWANG C L, JAN C, CHEN Y H. Piezomechanics using intelligent variable-structure control [J]. *IEEE Trans on Industrial Electronics*, 2001, 48(1): 47 - 59.
- [10] CRUZ-HERNANDEZ J M, HAYWARD V. Phase control approach to hysteresis reduction [J]. *IEEE Trans on Control Systems Technology*, 2001, 9(1): 17 - 26.
- [11] 高为炳. 变结构控制的理论及设计方法[M]. 北京: 科学出版社, 1996.  
(GAO Weibing. *The Theory of Variable Structure Control and its Design Method* [M]. Beijing: Science Press, 1996.)
- [12] 胡跃明. 变结构控制系统理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2003.  
(HU Yueming. *Variable-structure Control Systems Theory and Applications* [M]. Beijing: Science Press, 2003.)
- [13] 胡跃明. 非线性控制系统理论与应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2002.  
(HU Yueming. *Nonlinear Control Systems Theory and Application* [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2002.)
- [14] ESFANDIARI F. Stability analysis of a continuous of variable structure [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1991, 36(5): 616 - 619.

#### 作者简介:

张达科 (1973—), 男, 2001年和2004年在华南理工大学分别获硕士和博士学位, 研究方向为回滞系统控制的研究及其应用, E-mail: zdkalan@21cn.com;

胡跃明 (1960—), 男, 现为华南理工大学自动化科学与工程学院教授、博士生导师、副院长, 曾任香港理工大学电子系副研究员和研究员等职, 目前主要从事非线性控制系统、微电子自动化生产设备与医疗器械等方面的研究开发工作;

吴捷 (1937—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为自适应控制、自组织控制和电力系统自动化;

郭华芳 (1964—), 男, 高级工程师, 硕士生导师, 主要研究领域为控制理论与控制工程.