

冗余机器人的双向自运动路径规划

马保离

(北京航空航天大学 第七研究所, 北京 100083)

摘要: 冗余机器人的自运动路径规划是在保持手端任务向量不变的情况下, 在关节空间内寻找一条连接机器人初始关节构形和期望关节构型的几何路径. 本文给出一种双向自运动路径规划算法, 其基本思想是使位于初始关节构形的真实机器人和位于期望关节构形的虚拟机器人在自运动流形上运动并收敛到同一关节构形, 从而得到一条连接初始和期望关节构形的自运动几何路径. 该算法克服了以往算法容易陷入局部极小构形的缺陷. 仿真结果证实了算法的有效性.

关键词: 冗余机器人; 自运动; 路径规划

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Bi-directional self-motion path planning of redundant manipulators

MA Bao-li

(The Seventh Research Division, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: The self-motion path planning of redundant manipulators aims to seek a geometric path connecting an initial joint configuration and a desired joint configuration while keeping the end-effector's task variables unchanged. A bi-directional self-motion path-planning scheme was proposed for redundant manipulators in this work. The basic idea of the proposed scheme was to drive the real manipulator in the initial joint configuration and the virtual manipulator in the desired joint configuration to move in the self-motion manifold and converge to the same joint configuration, thus producing a geometric path connecting the initial joint configuration and the desired joint configuration. The proposed scheme is superior to previous ones as it is not inclined to fall into the local minimum joint configuration. Simulation results show the effectiveness of the proposed path-planning scheme.

Key words: redundant manipulators; self-motion; path planning

1 引言 (Introduction)

冗余机器人是指关节个数大于手端任务向量维数的机器人系统. 对于给定的手端任务向量, 冗余机器人的关节构形存在无穷多种组合^[1] (而非冗余机器人只存在有限个关节构形组合). 使用冗余机器人可以在保证机器人完成给定手端任务的同时, 对系统的其他性能指标进行优化^[2~5]. 冗余机器人的自运动规划问题可表述为: 在保持手端任务向量不变的情况下, 在关节空间内寻找一条连接机器人初始关节构形和期望关节构型的几何路径. 冗余机器人的自运动主要用于手端运动受限时改善机器人的关节构形.

对于具有 n 个关节的串联型机器人, 当它执行具有 m 维的手端任务时, 其冗余度为 $d = n - m$. 记 $q \in \mathbb{R}^n$ 为关节角变量, $x = f(q)$ 为手端任务向量.

对于给定的 x , 所有满足 $x = f(q)$ 的关节角向量是一族 d 维的光滑子流形, 又称为自运动子流形^[6], 它们可能是连通的, 也可能是彼此分离的. 每个自运动子流形都可通过 d 个独立的坐标进行参数化; 但是, 一般不存在对所有工作空间都有效的参数化表示^[6]. 对于全部由转动关节组成的冗余机器人系统, Burdick^[6] 证明了彼此分离的自运动子流形的个数不可能超过同样类型的非冗余机器人逆运动学解的个数, 例如, 平面冗余机器人至多具有两个分离的自运动子流形.

对于冗余机器人的自运动规划与控制问题, 已有一些研究成果. 对 3R 平面机器人, 为避免比例误差向量落入雅可比阵的零空间, 文献[7]利用时变增益阵 $K(t)$ 旋转比例误差向量, 并正交投影到雅可比阵的零空间得到期望的关节角速度; 这种算法可

以保证 3R 平面机器人的关节角收敛到期望的关节构形,其缺点是控制器的设计没有一般性,即使对简单的机器人系统,时变反馈增益阵的选取也需要很高的技巧.文献[7]还提出了一种降维自运动算法,该算法首先确定一组 $n - m$ 维冗余关节角向量,然后设计控制器在保证满足手端约束的情况下使该组 $n - m$ 维冗余关节角向量收敛到其期望值,从而保证其它关节角收敛到有限个关节构形集合;虽然该有限关节构形集合包含期望的关节构形,但当关于非冗余关节角的雅可比阵的行列式在初始构形和期望构形处的值异号时,关节角不能收敛到期望关节构形^[8].文献[8]提出了一种切换降维自运动算法,该算法通过选择不同的冗余关节角向量而得到不同的降维自运动算法,并切换利用这些不同的算法以使关节角收敛到期望构形,其主要缺点是:如何选择不同的降维自运动算法以及切换顺序才可使得关节角收敛到期望构形没有理论上的严格保证.

本文的目的是要在给定手端任务向量的情况下得到一条连接冗余机器人初始和期望构形的几何路径.为了克服文献[7,8]中降维自运动算法和切换降维自运动算法的缺陷,本文提出一种新的冗余机器人自运动路径规划算法—双向降维自运动路径规划算法.该算法的基本思想如下:设想有一虚拟机器人,它和真实机器人具有完全相同的结构,其初始关节构形为真实机器人的期望关节构形;然后设计控制算法使得真实机器人和虚拟机器人在自运动流形上运动并收敛到同一关节构形,从而得到一条连接真实机器人初始和期望关节构形的自运动几何路径.

2 双向自运动路径规划算法 (Bi-directional self-motion path planning scheme)

记机器人(以下称为真实机器人)的关节角向量为 $q \in \mathbb{R}^n$,其初始和期望关节构形分别为 q_0 和 q_r .设想有一虚拟机器人,它和真实机器人具有完全相同的结构,其关节角为 $\theta \in \mathbb{R}^n$,其初始关节构形 θ_0 为真实机器人的期望关节构形 q_r .以下考虑如何设计控制算法使得真实机器人和虚拟机器人在自运动流形上运动并收敛到同一关节构形 q_m .

记对应于冗余关节角向量的第 i 种选法时真实机器人的冗余和非冗余关节角向量分别为 q_b^i 和 q_a^i ,虚拟机器人的冗余和非冗余关节角向量分别为 θ_b^i 和 θ_a^i ;对应于冗余关节角向量的第 j 种选法时真实机器人的冗余和非冗余关节角向量分别为 q_b^j 和 q_a^j ,虚拟机器人的冗余和非冗余关节角向量分别为 θ_b^j 和 θ_a^j ;

其中 $i \neq j$.由运动学关系

$$x = f(q), \dot{x} = f(\theta), \dot{x} = J(q)\dot{q} = J(\theta)\dot{\theta} \tag{1}$$

知,为保证手端位置不变, $(q, \theta, \dot{q}, \dot{\theta})$ 应满足

$$\begin{aligned} 0 &= J(q)\dot{q} = J_a^i(q)\dot{q}_a^i + J_b^i(q)\dot{q}_b^i, \\ 0 &= J(\theta)\dot{\theta} = J_a^j(\theta)\dot{\theta}_a^j + J_b^j(\theta)\dot{\theta}_b^j. \end{aligned} \tag{2}$$

其中

$$\begin{aligned} J(q) &= \frac{\partial f(q)}{\partial q}, \quad J(\theta) = \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta}, \\ J_a^i(q) &= \frac{\partial f(q)}{\partial q_a^i}, \quad J_b^i(q) = \frac{\partial f(q)}{\partial q_b^i}, \\ J_a^j(\theta) &= \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta_a^j}, \quad J_b^j(\theta) = \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta_b^j}. \end{aligned}$$

取 $\dot{q}_b^i = v_1, \dot{\theta}_b^j = v_2$, 则由式(2)可得到真实机器人和虚拟机器人的关节角自运动方程为

$$\begin{aligned} \dot{q}_b^i &= v_1, \quad \dot{q}_a^i = -(J_a^i(q))^{-1}J_b^i(q)v_1, \\ \dot{\theta}_b^j &= v_2, \quad \dot{\theta}_a^j = -(J_a^j(\theta))^{-1}J_b^j(\theta)v_2. \end{aligned} \tag{3}$$

由式(3)可进一步得到

$$\begin{aligned} \dot{q}_b^j &= C^j \begin{bmatrix} \dot{q}_b^i \\ \dot{q}_a^i \end{bmatrix} = \\ C^j \begin{bmatrix} I \\ -(J_a^i(q))^{-1}J_b^i(q) \end{bmatrix} v_1 &= B_1(q)v_1, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_b^i &= C^i \begin{bmatrix} \dot{\theta}_b^j \\ \dot{\theta}_a^j \end{bmatrix} = \\ C^i \begin{bmatrix} I \\ -(J_a^j(\theta))^{-1}J_b^j(\theta) \end{bmatrix} v_2 &= B_2(\theta)v_2. \end{aligned} \tag{5}$$

其中 C^i, C^j 均为 $(n - m) \times n$ 选择矩阵,且其第 k_1 行第 k_2 列的元素为

$$\begin{aligned} C_{k_1 k_2}^i &= \begin{cases} 1, & \text{若 } \begin{bmatrix} q_b^i \\ q_a^i \end{bmatrix} \text{ 的第 } k_2 \text{ 个元与 } q_b^j \text{ 的第 } k_1 \text{ 个元相同,} \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \\ C_{k_1 k_2}^j &= \begin{cases} 1, & \text{若 } \begin{bmatrix} \theta_b^j \\ \theta_a^j \end{bmatrix} \text{ 的第 } k_2 \text{ 个元与 } \theta_b^i \text{ 的第 } k_1 \text{ 个元相同,} \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \end{aligned}$$

由式(3)~(5)可得到真实机器人和虚拟机器人的冗余关节角误差的动态方程如下:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_b^i - \dot{\theta}_b^i \\ \dot{q}_b^j - \dot{\theta}_b^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -B_2(\theta) \\ B_1(q) & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

取控制律为

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = -K \begin{bmatrix} I & -B_2(\theta) \\ B_1(q) & -I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} q_b^i - \theta_b^i \\ q_b^j - \theta_b^j \end{bmatrix}. \quad (7)$$

其中 K 为对称正定矩阵.

由于 $\begin{bmatrix} I & -B_2(\theta) \\ B_1(q) & -I \end{bmatrix}$ 为 $2(n-m) \times 2(n-m)$ 维的方阵, 若其为非奇异, 则以上控制律可以保证 $q_b^i - \theta_b^i$ 和 $q_b^j - \theta_b^j$ 渐近收敛到零. 因 $i \neq j$, 所以真实机器人和虚拟机器人至少有 $(n-m+1)$ 个关节角收敛到相同的位置. 不失一般性, 假定冗余机器人为串联型且真实机器人和虚拟机器人的前 $(n-m+1)$ 个关节角收敛到相同的位置, 即有 $q_i = \theta_i (i = 1, 2, \dots, n-m+1)$. 由于真实和虚拟机器人满足同样的 m 个手端约束, 则当机器人的关节构形以绝对关节角表示时, 有以下关系:

$$\begin{aligned} x &= f(\theta_1, \dots, \theta_{n-m+1}; q_{n-m+2}, \dots, q_n) = \\ & f_1(\theta_1, \dots, \theta_{n-m+1}) + f_2(\theta_{n-m+2}, \dots, \theta_n), \\ x &= f(q_1, \dots, q_{n-m+1}; q_{n-m+2}, \dots, q_n) = \\ & f_1(\theta_1, \dots, \theta_{n-m+1}) + f_2(q_{n-m+2}, \dots, q_n), \end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned} f_2(q_{n-m+2}, \dots, q_n) &= \\ f_2(\theta_{n-m+2}, \dots, \theta_n) &= x - f_1(q_1, \dots, q_{n-m+1}) = \bar{x}. \end{aligned}$$

注意到 $\bar{x} = f_2(q_{n-m+2}, \dots, q_n)$ 和 $\bar{x} = f_2(\theta_{n-m+2}, \dots, \theta_n)$ 均为包含 $m-1$ 个未知数的 m 个非线性联立方程组, 若该方程组有唯一解, 则 $q_{n-m+1+i} = \theta_{n-m+1+i} (i = 1, 2, \dots, m-1)$, 即余下的关节角也将收敛到同样的位置. 下面讨论非线性联立方程组 $\bar{x} = f_2(q_{n-m+2}, \dots, q_n)$ 有唯一解的条件.

为简化分析, 假定通过降维自运动控制算法^[8]已经在保持手端任务向量不变的情况下将机器人的前 $n-m$ 个关节角控制到期望的位置, 固定前 $n-m-1$ 个关节, 则后 $m+1$ 个关节组成一个新的冗余机器人系统, 即任意冗余机器人系统的自运动路径规划问题已经转化为具有一个冗余自由度的冗余机器人的自运动路径规划问题.

对平面冗余机器人有 $m=2, n=3$, 此时 $\bar{x} = f_2(q_{n-m+2}, \dots, q_n) = f_2(q_n)$ 为包含 1 个未知数、2 个非线性方程的方程组, 只有唯一解, 所以控制律(7)可以保证真实和虚拟机器人收敛到同一关节构形.

对非平面冗余机器人有 $m=3, n=4$, 此时 $\bar{x} = f_2(q_{n-m+2}, \dots, q_n) = f_2(q_{n-1}, q_n)$ 为包含 2 个未知数、3 个非线性方程的方程组, 该方程组有唯一解和两个关节的类型和结构有如下关系:

1) PP, 即两个关节均为移动, 解唯一.

2) PR 或 RP, 即一个关节为移动, 另一个关节为转动. 当 R 杆的运动平面和 P 杆平行时, 解不唯一; 当 R 杆的运动平面和 P 杆不平行时, 解唯一.

3) RR, 即两个关节均为转动. 当两 R 关节的轴平行时, 解不唯一; 当两 R 关节的轴不平行时, 解唯一.

根据以上关系, 对非平面冗余机器人, 只要适当选取冗余关节向量 q_b^i 和 q_b^j 使得余下的两个关节为 PP 或 PR/RP 且 R 杆的运动平面和 P 杆不平行、或 RR 且两 R 关节的轴不平行, 就可保证真实和虚拟机器人收敛到同一关节构形.

假定通过以上算法真实机器人和冗余机器人已经收敛到同一关节构形 q_M , 则可得到真实机器人和虚拟机器人的关节角的几何运动路径: 一条为连接机器人初始构形 q_0 和中间构形 q_M 的几何路径 C_1 , 另一条为连接机器人期望构形 q_r 和中间构形 q_M 的几何路径 C_2 . 由于这两条几何路径都在真实机器人的自运动流形上且相接于中间构形 q_M , 所以 $C_1 + C_2$ 就是一条连接冗余机器人初始构形和期望构形的自运动几何轨迹.

3 算例与仿真(Example and simulation)

考虑由单位杆组成的 3R 平面机器人, 当任务向量为手端位置时, 3R 平面机器人一冗余机器人, 且冗余度为 1, 其运动学方程可写为

$$\dot{x} = J(q)\dot{q}. \quad (8)$$

其中

$$J(q) = [J_1(q), J_2(q), J_3(q)] =$$

$$\begin{bmatrix} -s_1 & -s_2 & -s_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix},$$

$$c_1 = \cos q_1, c_2 = \cos q_2, c_3 = \cos q_3,$$

$$s_1 = \sin q_1, s_2 = \sin q_2, s_3 = \sin q_3,$$

$q = [q_1, q_2, q_3]^T$ 为绝对关节角向量, $x = [x_1, x_2]^T$ 为手端位置向量.

分别选择 q_1, q_2, q_3 作为冗余关节角向量, 可得到以下 3 种不同的自运动方程:

$$A_1: \dot{q}_1 = v_1, \dot{q}_{23} = -J_{23}^{-1}(q)J_1(q)v_1,$$

$$A_2: \dot{q}_2 = v_2, \dot{q}_{13} = -J_{13}^{-1}(q)J_2(q)v_2,$$

$$A_3: \dot{q}_3 = v_3, \dot{q}_{12} = -J_{12}^{-1}(q)J_3(q)v_3.$$

式中: $q_{ij} = [q_i, q_j]^T$, $J_{ij}(q) = [J_i(q), J_j(q)] (i = 1, 2, j = 2, 3)$.

设机器人的初始和期望关节构形分别为 $q_0 = [0, \pi/4, \pi/2]^T$, $q_r = [\pi/2, \pi/4, 0]^T$, 因 K 为对角阵, 且其对角线的元素都相等, $e = q - q_r =$

$(e_1, e_2, e_3)^T$ 在雅可比阵零空间的正交投影为零, 所以无法应用基于正交投影的比例误差算法. 又因 $\det(J_{12}(q_0))\det(J_{12}(q_r)) < 0, \det(J_{23}(q_0))\det(J_{23}(q_r)) < 0, \det(J_{13}(q_0))\det(J_{13}(q_r)) < 0$, 所以也无法应用降维自运动算法.

应用上节给出的双向自运动轨迹规划算法, 选择 q_3 和 θ_2 作为真实和虚拟机器人的冗余关节角, 则有

$$\begin{aligned} \dot{q}_3 &= v_1, \quad \dot{q}_2 = B_1(q)v_1, \\ \dot{\theta}_2 &= v_2, \quad \dot{\theta}_3 = B_2(\theta)v_2. \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $B_1(q), B_2(\theta)$ 分别为 $-J_{12}^{-1}(q)J_3(q)$ 和 $-J_{13}^{-1}(\theta)J_2(\theta)$ 的第 2 行(即第 2 个元).

关节角速度的误差方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_3 - \dot{\theta}_3 \\ \dot{q}_2 - \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -B_2(\theta) \\ B_1(q) & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

控制律为

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = -K \begin{bmatrix} I & -B_2(\theta) \\ B_1(q) & -I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} q_3 - \theta_3 \\ q_2 - \theta_2 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

取 $K = \text{diag}[1, 1]$ 进行仿真可得到真实机器人和虚拟机器人的自运动几何轨迹(分别以实线和虚线表示), 可以看出真实机器人和虚拟机器人的自运动几何轨迹相接于某一中间关节构形, 从而成功得到了一条连接机器人初始关节构形和期望关节构形的自运动几何路径.

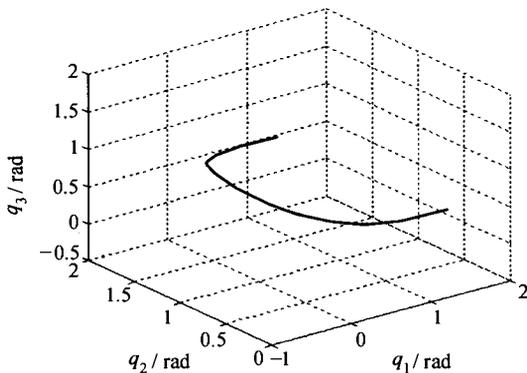


图 1 3R 平面冗余机器人的自运动几何路径
Fig. 1 Self-motion geometric path of 3R planar redundant manipulator

4 结论(Conclusion)

针对冗余机器人系统, 提出了一种双向自运动路径规划算法. 该算法通过驱使位于初始关节构形的真实机器人和位于期望关节构形的虚拟机器人到达相同的关节构形而得到一条连接机器人初始关节构形和期望关节构形的自运动几何路径. 仿真结果证实了算法的有效性.

参考文献(References):

- [1] BAKER D R, WAMPLER C W. On the inverse kinematics of redundant manipulator [J]. *Int J of Robotics Research*, 1988, 7(2): 3-21.
- [2] de LUCA A, LANARI L, ORIOLO G. Control of redundant robot on cyclic trajectories [C]// *IEEE Int Conf on Robotics and Automation* '1992. New York, USA: IEEE Press, 1992: 500-506.
- [3] CHIU S. Task compatibility of manipulator postures [J]. *Int J of Robotics Research*, 1988, 7(5): 13-21.
- [4] BEDROSSIAN N S. Classification of singular configuration for redundant robot [C]// *IEEE Int Conf on Robotics and Automation* '1990. New York, USA: IEEE Press, 1990: 818-823.
- [5] SHIMIR T, YOMDIN Y. Repeatability of redundant manipulators: Mathematic solution of the problem [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1988, 33(11): 1004-1009.
- [6] BURDICK J W. On the inverse kinematics of redundant manipulators: characterization of the self-motion manifolds [C]// *IEEE Int Conf on Robotics and Automation* '1989. New York, USA: IEEE Press, 1989: 264-270.
- [7] ORIOLO G. Stabilization of self-motions in redundant robots [C]// *IEEE Int Conf on Robotics and Automation* '1994. New York, USA: IEEE Press, 1994: 704-709.
- [8] 王连圭, 马保离. 冗余机器人的自运动控制[J]. *控制与决策*, 2003, 18(2): 199-202.
(WANG Liangui, MA Baoli. Self-motion control of redundant manipulators [J]. *Control and Decision*, 2003, 18(2): 199-202.)

作者简介:

马保离 (1963—), 男, 博士, 1984年毕业于西北工业大学电子工程系, 1990年获西北工业大学控制理论与应用专业硕士学位, 1995年获北京航空航天大学控制理论与控制工程专业博士学位, 现在北京航空航天大学理学院控制理论与控制工程教研室工作, 主要研究兴趣为非完整控制和机器人控制, E-mail: ma_badi@yahoo.com.