

变时滞分布参数系统的全局指数稳定性

罗毅平^{1,2}, 邓飞其¹

(1. 华南理工大学 系统工程研究所, 广东 广州 510640; 2. 湖南工程学院 数理系, 湖南 湘潭 411101)

摘要: 基于比较原理, 利用推广的向量 Hanalay 微分不等式, Dini 导数, 结合 Green 公式及不等式分析技术, 研究几类变时滞分布参数控制系统所导出的滑动模运动方程的全局指数稳定性问题, 在仅要求系数矩阵是个 M -矩阵的条件下, 获得了几类滑动模运动方程全局指数稳定性的充分条件, 建立了滑动模运动方程全局指数稳定性定理. 推广和改进了前人的结论. 并为研究时滞分布参数系统的变结构控制问题奠定了基础.

关键词: 分布参数; 全局指数稳定性; 变时滞; 向量 Hanalay 不等式; Dini 导数

中图分类号: O175 **文献标识码:** A

Global exponential stability for distributed parameter systems with varying time-delay

LUO Yi-ping^{1,2}, DENG Fei-qi¹

(1. Institute of System Engineering, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China;

2. Department of Mathematics-Physics, College of Hunan Engineering, Xiangtan Hunan 411101, China)

Abstract: Based on the comparison principle, the global exponential stability for a class of sliding mode equations rising in distributed parameter control system with varying time-delay is investigated by using general vector Hanalay's differential inequality, Dini's derivative, Green formulation, and technique of inequality analysis. Under the conditions that the coefficient of distributed parameter system is an M -matrix, sufficient conditions are derived for global exponential stability for the sliding mode equations with varying time-delay and several theorems of the global exponential stability for the sliding mode equations are established. It is shown that the estimates obtained from the Hanalay-type inequalities improve the estimates obtained from Lyapunov methods. Some previous works are improved. The results on the global exponential stability of the distributed parameter control systems with varying time-delay provide the theoretical foundation for the variable structure control problem of the distributed parameter systems.

Key words: distributed parameter; global exponential stability; varying time-delay; vector Hanalay inequality; Dini's derivative

1 引言(Introduction)

对时滞系统的控制研究一直是近年来控制领域的研究热点之一^[1~12]. 但对时滞分布参数系统的研究成果却不多^[1,5~10]. 尽管自 1987 年 Orlov 等^[1]提出热加工过程中的抛物型系统的控制模型, 并设计了变结构控制以来, 关于分布参数系统变结构的控制的研究获得了长足发展^[5~10]. 目前利用变结构控制方法研究分布参数系统的控制主要采用两种数学工具, 一种是利用半群理论^[1,6~8], 另一种是利用状态函数^[5,9,10]. 在变结构控制的研究中要解决的关键问题之一是如何建立滑动模运动方程以及做出它

的稳定性分析. 尽作者所知, 目前对时滞分布参数系统建立的滑动模运动方程, 研究其稳定性分析的方法, 主要采用辅助函数法^[9]与状态函数法^[10]. 这些方法都是采用矩阵范数的特征值作为稳定性条件的判据. 由此所获得的稳定性判别条件在实际应用中不易检验. 基于此, 本文拟采用一种全新的方法——推广的向量 Hanalay^[11]不等式结合 Green 公式, 在仅要求分布参数系统本身所固有的参数满足是一个 M -矩阵^[12]的条件下得出其指数稳定性的判据.

2 问题的描述(System description)

考虑下列具多个变时滞的分布参数系统

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_i(x, t)}{\partial t} = & D \sum_{l=1}^d \frac{\partial^2 w_i(x, t)}{\partial x_l^2} + \sum_{j=1}^n a_{ij}^0 w_j(x, t) + \\ & \sum_{k=1}^z \sum_{j=1}^n a_{ij}^k w_j(x, t - \tau_k(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} u_j(x, t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (1)$$

写成矩阵形式即为

$$\frac{\partial W}{\partial t} = D \Delta W(x, t) + A_0 W(x, t) + \sum_{k=1}^z A_k W(x, t - \tau_k(t)) + Bu(x, t). \quad (2)$$

其中: $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+$, 这里时滞 $\tau_k(t)$ 是区间 $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ 上的连续有界函数, 满足 $0 \leq \tau_k \leq \tau$; k 为一正整数, $D > 0$ 和 $\tau \geq 0$ 都是常数; $A_0 = (a_{ij}^0)$, $A_k = (a_{ij}^k) (k = 1, 2, \dots, z)$, $B = (b_{ij})$ 是具有相应阶的常数矩阵; 且矩阵 B 是列满秩的, $\Omega = \{x, \|x\| < l < +\infty\} \subset \mathbb{R}^d$ 是具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域, 状态函数 $W(x, t) = \text{col}(w_1(x, t), w_2(x, t), \dots, w_n(x, t)) \in \mathbb{R}^n$, $\Delta = \sum_{l=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_l^2}$ 为 Ω 上的 Laplace 扩散算子. 其初边值条件满足

$$W(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [-\tau, +\infty), \quad (3)$$

$$W(x, t) = \varphi(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times [-\tau, 0], \quad (4)$$

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial n} = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [-\tau, +\infty). \quad (5)$$

n 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量, $\varphi(x, t)$ 是适当光滑的函数.

3 定义和引理 (Definitions and lemmas)

为了叙述方便, 先引进一些记号和说明: $A \geq B$ ($A < B$) 表示矩阵 A 和 B 的对应元素满足不等式 “ $\geq$ ” (“ $<$ ”); 若 $A \geq 0$, 则称 A 为非负矩阵. 不失一般性, 本文总假定方程 (1) 的平衡点为零点, 否则, 本文总可以通过适当的变换使方程的平衡点为零点. 记 L_2 -模为

$$\|W(t)\|_2 = \left(\int_{\Omega} |W(x, t)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

其中 $|W(x, t)|$ 表示向量 $W(x, t)$ 的 Euclid 模, 并称为 E -模. 记 $L_2(\Omega)$ 是 Ω 上的实可测函数空间且对于 L_2 -构成一个 Banach 空间. 记

$$p_i^{\tau}(t) = \sup_{-\tau \leq s \leq 0} p_i(t + s), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$p^{\tau} = \text{col}(p_1^{\tau}(t), p_2^{\tau}(t), \dots, p_n^{\tau}(t)),$$

$$\|\varphi_j(t)\|_2^{\tau} = \sup_{-\tau \leq s \leq 0} \|\varphi_j(s)\|_2, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\|\varphi^1\|_2^{\tau} = \left(\sum_{j=1}^{n-m} (\|\varphi_j^{\tau}\|_2^2) \right)^{1/2},$$

$$(P_1)^{\tau} = \text{col}(\|p_1^1\|, \|p_2^1\|, \dots, \|p_m^1\|),$$

$$\|p_j^1\|_2^{\tau} = \sup_{-\tau \leq s \leq 0} \|p_j^1(t + s)\|_2,$$

$$A = (a_{ij}), \quad A^+ = (|a_{ij}|) = (a_{ij}^+), \quad a_{ij}^+ = |a_{ij}|.$$

定义 1 若存在正数 δ 和 M , 使得

$$\|W(t)\|_2 \leq M e^{-\delta t}, \quad (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}, \quad (6)$$

则称边值问题 (2) ~ (5) 的平衡点是 L_2 -指数渐近稳定的, 简称系统 (2) 是 L_2 -指数渐近稳定的.

定义 2^[11] 令 $C = C([t - \tau, t], \mathbb{R}^n)$, $\tau \geq 0$, $F(t, x, y) \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times C, \mathbb{R}^n)$, $F(t, x, y) = \text{col}(f_1(t, x, y), \dots, f_n(t, x, y))$ 称为 M -函数, 若

C1) $\forall t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^n, y^{(1)}, y^{(2)} \in C$, 则 $F(t, x, y^{(1)}) \leq F(t, x, y^{(2)})$, 对于 $y^{(1)} \leq y^{(2)}$. 其中 $y^{(1)} = \text{col}(y_1^{(1)}, \dots, y_n^{(1)})$, $y^{(2)} = \text{col}(y_1^{(2)}, \dots, y_n^{(2)})$;

C2) $\forall t, y \in C, \forall x^{(1)} \leq x^{(2)}$, 但对某些 i , 有 $x_i^{(1)} = x_i^{(2)}$, 则对这些 i 有

$$f_i(t, x^{(1)}, y) \leq f_i(t, x^{(2)}, y).$$

引理 1^[11] 假设向量函数

$$x(t) = \text{col}(x_1(t), \dots, x_n(t)),$$

$$y(t) = \text{col}(y_1(t), \dots, y_n(t)),$$

$$x^{\tau} = \sup_{-\tau \leq s \leq 0} x(t + s) = \text{col}(x_1^{\tau}(t), \dots, x_n^{\tau}(t)),$$

$$x_i^{\tau}(t + s) = \sup_{-\tau \leq s \leq 0} x_i(t + s), \quad i = 1, \dots, n,$$

$$y^{\tau} = \sup_{-\tau \leq s \leq 0} y(t + s) = \text{col}(y_1(s), \dots, y_n(s)),$$

$$y_i^{\tau}(t + s) = \sup_{-\tau \leq s \leq 0} y_i(t + s), \quad i = 1, \dots, n$$

满足下列条件:

$$L1) \quad x(t) < y(t), \quad t \in [t_0 - \tau, t_0];$$

$$L2) \quad D^+ y(t) > F(t, y(t), y^{\tau}(t)), \quad t \geq t_0 \geq 0, \\ D^+ x(t) \leq F(t, x(t), x^{\tau}(t)), \quad t \geq t_0 \geq 0, \quad \text{则}$$

$$x(t) < y(t), \quad t \geq t_0. \quad (7)$$

其中 $F(t, x, y) = \text{col}(f_1(t, x, y), \dots, f_n(t, x, y))$ 是 M -函数.

4 滑动模运动方程的建立 (Construction of sliding mode motion equations)

根据已知条件, 可设 $\det(B_2) \neq 0$, 其中 $B = \text{col}(B_1, B_2)$, $B_1 \in \mathbb{R}^{(n-m) \times m}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$. 对系统 (2) 作非奇异线性变换 $TP(x, t) = W(x, t)$, 其中

$$T = \begin{pmatrix} I_{n-m} & B_1 B_2^{-1} \\ 0 & I_m \end{pmatrix}.$$

记 $\tau_0(t) = 0$, 于是系统 (2) 转化为

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \tilde{D} \Delta P(x, t) + \sum_{k=0}^z \tilde{A}_k P(x, t - \tau_k(t)) + \tilde{B} u(x, t). \quad (8)$$

式中: $\bar{D} = T^{-1}DT = DT^{-1}T = D, \bar{B} = T^{-1}B = \text{col}(0, B_2), \bar{A}^k = T^{-1}A^kT (k = 0, 1, 2, \dots, n)$.

记

$$\bar{A}_k = \begin{pmatrix} A_{11}^k & A_{12}^k \\ A_{21}^k & A_{22}^k \end{pmatrix}.$$

式中矩阵 $A_{11}^k \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}, A_{12}^k \in \mathbb{R}^{(n-m) \times m}, A_{21}^k \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}, A_{22}^k \in \mathbb{R}^{m \times m}, k = 0, 1, 2, \dots, n$. 这样系统(8)可改写为

$$\begin{cases} \frac{\partial P_1(x, t)}{\partial t} = D\Delta P_1(x, t) + \sum_{k=0}^z [A_{11}^k P_1(x, t - \tau_k(t)) + A_{12}^k P_2(x, t - \tau_k(t))], \\ \frac{\partial P_2(x, t)}{\partial t} = D\Delta P_2(x, t) + \sum_{k=0}^z [A_{21}^k P_1(x, t - \tau_k(t)) + A_{22}^k P_2(x, t - \tau_k(t))] + B_2 u(x, t). \end{cases} \quad (9)$$

设切换函数为

$$S(x, t) = C_1 P_1(x, t) + C_2 P_2(x, t). \quad (10)$$

式中 $C_1 \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}, C_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 为待定矩阵. 于是, 切换面为

$$S_0 = \{(P_1, P_2)^T | C_1 P_1 + C_2 P_2 = 0\}. \quad (11)$$

现在取 C_2 可逆, 则切换面 S_0 上有 $P_2 = -C_2^{-1}C_1 P_1$, 代入式(9)的第一式, 得到滑动模运动方程

$$\frac{\partial P_1(x, t)}{\partial t} = D\Delta P_1(x, t) + GP_1(x, t) + \sum_{k=1}^z H^k P_1(x, t - \tau_k(t)). \quad (12)$$

其中: $G = A_{11}^0 - A_{12}^0 C_2^{-1} C_1, H_k = A_{11}^k - A_{12}^k C_2^{-1} C_1 = (h_{ij}^k), k = 1, 2, \dots, n$.

5 滑动模运动方程的指数渐近稳定性 (Global exponential stability of sliding mode motion equations)

定理 1 若 $M = -(\bar{G} + \bar{G}^+ + \sum_{k=1}^z H_k^+)$ 是一个 M -矩阵 (M -矩阵的定义见文献[11]), 则滑动模运动方程(12)的平衡点是 L_2 -全局指数稳定的. 其中

$$\bar{G} = (\bar{g}_{ij}), \bar{g}_{ij} = \begin{cases} g_{ii}, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

$$\bar{G} = (\bar{g}_{ij}), \bar{g}_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j, \\ g_{ii}, & i \neq j. \end{cases}$$

证 方程(12)可写成

$$\frac{\partial p_i^1}{\partial t} = D \sum_{l=1}^d \frac{\partial^2 p_i^1}{\partial x_l^2} + \sum_{j=1}^{n-m} g_{ij} p_j^1(x, t) + \sum_{k=1}^z \sum_{j=1}^{n-m} h_{ij}^k p_j^1(x, t - \tau_k(t)). \quad (13)$$

两边同乘以 $p_i^1(x, t)$ 积分得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (p_i^1(x, t))^2 dx = \sum_{l=1}^d D \int_{\Omega} p_i^1(x, t) \frac{\partial^2 p_i^1}{\partial x_l^2} dx + \sum_{j=1}^{n-m} \int_{\Omega} p_i^1(x, t) g_{ij} p_j^1(x, t) dx + \sum_{k=1}^z \sum_{j=1}^{n-m} \int_{\Omega} h_{ij}^k p_i^1(x, t) p_j^1(x, t - \tau_k(t)) dx. \quad (14)$$

利用边界条件和 Green 公式, 有

$$\sum_{l=1}^d \int_{\Omega} p_i^1(x, t) \frac{\partial^2 p_i^1}{\partial x_l^2} dx = \int_{\Omega} p_i^1(x, t) \nabla \cdot \left(\frac{\partial p_i^1}{\partial x_l} \right)_{l=1}^d dx = - \sum_{l=1}^d \int_{\Omega} \left(\frac{\partial p_i^1}{\partial x_l} \right)^2 dx. \quad (15)$$

其中 $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_d} \right)$ 是梯度算子. 并且

$$\left(\frac{\partial p_i^1}{\partial x_l} \right)_{l=1}^d = \left(\frac{\partial p_i^1}{\partial x_1}, \frac{\partial p_i^1}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial p_i^1}{\partial x_d} \right).$$

因为根据文献[14]的引理 3 可知, $\frac{d}{dt} \|p_i^1\|^2 =$

$$\begin{aligned} D^+ \|p_i^1\|^2 &= D^+ \|p_i^1\|_2^2 = -2D \sum_{l=1}^d \int_{\Omega} \left(\frac{\partial p_i^1}{\partial x_l} \right)^2 dx + 2\bar{g}_{ii} \|p_i^1\|_2^2 + \\ &2 \sum_{j=1}^{n-m} \int_{\Omega} p_i^1(x, t) \bar{g}_{ij} p_j^1(x, t) dx + \\ &2 \sum_{k=1}^z \sum_{j=1}^{n-m} \int_{\Omega} p_i^1(x, t) h_{ij}^k p_j^1(t - \tau_k(t)) dx \leq \\ &2\bar{g}_{ii} \|p_i^1\|_2^2 + 2 \sum_{j=1}^{n-m} \bar{g}_{ij}^+ \|p_i^1\|_2 \cdot \|p_j^1\|_2 + \\ &2 \sum_{k=1}^z \sum_{j=1}^{n-m} |h_{ij}^k| \cdot \|p_i^1\|_2 \cdot \|p_j^1\|_2, \end{aligned} \quad (16)$$

即

$$D^+ \|p_i^1\| \leq \bar{g}_{ii} \|p_i^1\|_2 + \sum_{j=1}^{n-m} \bar{g}_{ij}^+ \|p_j^1\|_2 + \sum_{k=1}^z \sum_{j=1}^{n-m} |h_{ij}^k| \cdot \|p_j^1\|_2, \quad (17)$$

因为 $M = -(\bar{G} + \bar{G}^+ + \sum_{k=1}^z H_k^+)$ 是一个 M -矩阵, 所以存在 $\gamma = \text{col}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-m}) > 0, \theta > 0$ 使得

$$(\bar{G} + \bar{G}^+ + \sum_{k=1}^z H_k^+) \gamma < -\theta. \quad (18)$$

选取 $0 < \delta \ll 1$, 使得

$$\delta\gamma + (\bar{G}\gamma + \bar{G}^+\gamma + \sum_{k=1}^i \dot{H}_k^+ \gamma e^{\delta\tau}) < 0. \quad (19)$$

令 $t \in [-\tau, 0]$, 选取 $R \gg 1$, 使得

$$R\gamma e^{-\delta t} > \bar{E}, \text{ 其中 } \bar{E} = \text{col}(1, 1, \dots, 1). \quad (20)$$

对任意的 $\varepsilon > 0$, 令

$$q(t) = R(\|\varphi^1(0)\|_2^2 + \varepsilon)\gamma e^{-\delta t}, \quad t \geq 0, \quad (21)$$

直接由式(19)~(21)得

$$\begin{aligned} D^+ q(t) &= \\ &= -\delta\gamma R(\|\varphi^1(0)\|_2^2 + \varepsilon)e^{-\delta t} > \\ &= (\bar{G}\gamma + \bar{G}^+\gamma + \sum_{k=1}^i \dot{H}_k^+ \gamma e^{\delta\tau})R(\|\varphi^1(0)\|_2^2 + \varepsilon)e^{-\delta t} = \\ &= (\bar{G} + \bar{G}^+)q(t)R(\sum_{k=1}^i H_{ij}^+)(\|\varphi^1(0)\|_2^2 + \varepsilon)\gamma e^{-\delta(t-\tau)} \geq \\ &= (\bar{G} + \bar{G}^+)q(t) + (\sum_{k=1}^i H_k^+)q^\tau(t) =: \end{aligned}$$

$$F(t, q(t), q^\tau(t)), \quad t > 0. \quad (22)$$

其中 $q^\tau(t) = \sup_{-\tau \leq s \leq 0} R(\|\varphi^1(0)\|_2^2 + \varepsilon)\gamma e^{-\delta(t+s)}$.

容易验证 $F(t, x, y)$ 是 M -函数. 另一方面, 由式(20)

$$\begin{cases} \|p_i(t)\|_2 \leq \|\varphi_i(t)\|_2^\tau \leq \|\varphi^1(0)\|_2^\tau \leq \\ R\gamma_i \|\varphi^1(0)\|_2^\tau e^{-\delta t} < R\gamma_i (\|\varphi^1(0)\|_2^2 + \varepsilon) e^{-\delta t} = q_i(t), \\ i = 1, 2, \dots, n-m, \quad -\tau \leq t \leq 0, \end{cases} \quad (23)$$

即

$$(P_1)^\dagger < q(t), \quad -\tau \leq t \leq 0. \quad (24)$$

由式(17)得

$$\begin{aligned} D^+(P_1)^\dagger &\leq \\ &= (\bar{G} + \bar{G}^+)(P_1)^\dagger + \sum_{k=1}^i ((P_1)^\dagger)^\tau = \\ &= F(t, (P_1)^\dagger, ((P_1)^\dagger)^\tau), \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (25)$$

由引理1得

$$(P_1)^\dagger < q(t), \quad t \geq 0. \quad (26)$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$, 则

$$(P_1)^\dagger \leq R\gamma \|\varphi^1(0)\|_2^\tau e^{-\delta t}, \quad t \geq 0, \quad (27)$$

因此, 由式(27)知

$$\begin{aligned} \|P_1\|_2 &= \left(\sum_{j=1}^n \|p_j^1\|_2^2 \right)^{1/2} \leq \\ &= R|\gamma| \cdot \|\varphi^1(0)\|_2^\tau e^{-\delta t} = Me^{-\delta t} \rightarrow 0, \text{ 当 } t \rightarrow \infty \text{ 时}. \end{aligned} \quad (28)$$

注1 文献[9]在 $-\lambda = \lambda_{\max} \left[2G + \left(\sum_{k=1}^i \|H_k\| - \frac{2Dm}{l^2} \right) I \right] <$

0, 且 $\lambda - \frac{m}{l} - z \max_{1 \leq k \leq i} \|H_k\| > 0$ 的条件下得出滑动模运动方程(12)的平衡点是 $W^{1,2}(\Omega)$ -指数稳定的. 显然, 本文的结论比该结论容易检验.

根据 M -矩阵的性质, 很容易得出以下的推论:

推论1 假设下列条件之一成立, 则滑动模运动方程(12)的平衡点是 L_2 -全局指数稳定的.

$$1) -\bar{g}_{ii} > \frac{1}{\gamma_i} \sum_{j=1}^{n-m} \gamma_j (\bar{g}_{ij}^+ + \sum_{k=1}^i |h_{ij}^k|), \quad i = 1, 2, \dots, n-m;$$

$$2) \max_{1 \leq i \leq n-m} \frac{1}{-\bar{g}_{ii}} \sum_{j=1}^{n-m} (\bar{g}_{ij}^+ + \sum_{k=1}^i |h_{ij}^k|) < 1;$$

$$3) \rho(Q) < 1 (\rho(Q) \text{ 是矩阵 } P \text{ 的谱半径}), \text{ 其中 } Q = (q_{ij})_{(n-m) \times (n-m)}, q_{ii} = 0, q_{ij} = m_{ij}/m_{ii}. \text{ 其中 } M = -\bar{G} - \bar{G}^+ - \sum_{k=1}^i H_k^+ \text{ 满足 } m_{ii} > 0, m_{ij} < 0.$$

考虑下列系统

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_i(x, t)}{\partial t} &= \\ &= \sum_{l=1}^d \frac{\partial}{\partial x_l} \left(d_{il} \frac{\partial w_i(x, t)}{\partial x_l} \right) + \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij}^0 w_j(x, t) + \sum_{k=1}^i \sum_{j=1}^n a_{ijk} w_j(x, t - \tau_{ijk}(t)) + \\ &= \sum_{j=1}^n b_{ij} u_j(x, t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (29)$$

通过与方程(1)类似的变换, 本文建立相应的滑动模方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_i^1}{\partial t} &= \sum_{l=1}^d \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\tilde{d}_{il} \frac{\partial p_i^1(x, t)}{\partial x_l} \right) + \sum_{j=1}^{n-m} g_{ij} p_j^1(x, t) + \\ &= \sum_{k=1}^i \sum_{j=1}^{n-m} h_{ijk}^1 p_j^1(x, t - \tau_{ijk}(t)). \end{aligned} \quad (30)$$

其中: $\tilde{D} = (\tilde{d}_{il})$, 且 $\tilde{D} = T^{-1}DT$; $D = (d_{il})$, $d_{il} \geq 0$. 则与定理1证明类似地, 有

定理2 若 $M = (m_{ij})_{n-m \times n-m}$ 是一个 M -矩阵, 则滑动模运动方程(30)的平衡点是 L_2 -全局指数稳定的. 其中

$$m_{ij} = \begin{cases} -\bar{g}_{ii} - \sum_{k=1}^i |h_{ii}^k|, & i = j, \\ -\bar{g}_{ij}^+ - \sum_{k=1}^i |h_{ij}^k|, & i \neq j. \end{cases}$$

同样地, 有以下推论

推论2 若推论1的条件成立, 则滑动模运动方程(30)的平衡点是 L_2 -全局指数稳定的. 对于系统(1), 当 $D = 0$ 时, 则该系统转化为变时滞线性系统

$$\frac{dW}{dt} = A_0 W(t) + \sum_{k=1}^i A_k W(t - \tau_k(t)) + Bu(t). \quad (31)$$

与方程(2)类似地建立滑动模方程为

$$\frac{dP_1(x, t)}{dt} = GP_1(t) + \sum_{k=0}^z H_k P_1(t - \tau_k(t)). \quad (32)$$

其中 G 和 H_k 与方程(12)的 G 和 H_k 定义相同. 则有

推论 3 假设 $M = -(\bar{G} + \bar{G}^+ + \sum_{k=1}^z H_k^+)$ 是一个 M -矩阵, 则系统(32)的平衡点关于 E -模是全局指数稳定的.

证 系统(32)重写为

$$\begin{cases} \frac{dp_i^1}{dt} = \sum_{j=1}^{n-m} g_{ij} p_j^1(t) + \sum_{k=1}^z \sum_{j=1}^{n-m} h_{ij}^k p_j^1(t - \tau_k(t)), \\ i = 1, 2, \dots, n-m. \end{cases} \quad (33)$$

对式(33)直接计算上右导数得

$$\begin{cases} D^+ |p_j^1(t)| \leq \\ \bar{G} |p_j^1(t)| + \bar{G}^+ |p_j^1(t)| + \sum_{k=1}^z H_k^+ |p_j^1(t)|^\tau, \\ j = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (34)$$

类似于定理 1, 可得

$$|P_1(t)| \leq R |\gamma| \cdot |\varphi^1| e^{-\delta t},$$

即系统(32)的平衡点关于 E -模是全局指数稳定的.

6 小结(Conclusion)

本文利用推广的 Hanalay 微分不等式结合 Dini 导数以及向量函数等知识研究几类由变时滞分布系统所导出的滑动模运动方程的关于 L_2 -模全局指数稳定性问题. 该方法克服了构造 Lyapunov 函数上的困难, 同时克服了利用 Lyapunov 方法时对 Lyapunov 函数求导带来大量交错项处理的麻烦. 在仅要求系统参数矩阵是一个 M -矩阵的前提下, 获得了滑动模运动方程的关于 L_2 -模全局指数稳定性. 为进一步研究变结构控制器的设计和对系统运动轨线 $p(x, t)$ 到达滑动模态区 S_0 上的时间估计奠定了基础. 此外, 本文的结果推广与改进了文献[9, 10]的相关结论, 并且大大地简化了全局指数稳定性的判定准则, 为实际应用提供了切实可行的判别依据.

参考文献(References):

- [1] ORLOV Y V, UTKIN V I. Sliding mode control in indefinite-dimensional systems [J]. *Automatica*, 1987, 23(6): 753 - 757.
- [2] SU T J, LU C Y, TSAI J S H. LMI approach to delay-dependent robust stability for uncertain time-delay systems [J]. *IEEE Proc-Control Theory and Applications*, 2001, 148(3): 209 - 212.
- [3] 苏宁军, 苏宏业, 褚健. 不确定时滞系统鲁棒镇定的新方法[J].

控制理论与应用, 2004, 21(3): 432 - 434.

(SU Ningjun, SU Hongye, CHU Jian. New design approach of delay-dependent robust stabilizing control for uncertain time-delay systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2004, 21(3): 432 - 434.

- [4] 张群亮, 关新平. 不确定关联时滞系统的鲁棒 H_∞ 滤波[J]. 控制理论与应用, 2004, 21(2): 267 - 270.
- (ZHANG Qunliang, GUAN Xinping. Robust H-infinity filtering for uncertain interconnected time-delay systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2004, 21(2): 267 - 270.)
- [5] 刘永清, 谢胜利. 滞后分布参数系统的稳定性与变结构控制[M]. 广州: 华南理工大学出版社, 1998.
- (LIU Rongqing, XIE Shengli. *Variable Structure Control and Stability of Distributed Parameter Systems with delays* [M]. Guangzhou: South China University of Technology Press, 1998.)
- [6] AMRAOUI S, RHALI L S. Monotonicity and stability for some reaction-diffusion systems with delay and dirichlet boundary conditions [J]. *J of Mathematics Analysis Applications*, 2001, 255(2): 458 - 479.
- [7] HANCZYC E M, PALAZODLU A. Use of symmetry groups in sliding mode control of nonlinear distributed parameter systems [J]. *Int J Control*, 1996, 63(6): 1116 - 1149.
- [8] HENRIQUEZ H R. Stabilization of hereditary distribution parameter control system [J]. *Systems & Control Letters*, 2001, 44(1): 35 - 43.
- [9] 崔宝同, 邓飞其, 王伟, 等. 时滞分布参数系统的指数渐近稳定性[J]. 系统工程与电子技术, 2003, 25(5): 579 - 583.
- (CUI Baotong, DENG Feiqi, WANG Wei, et al. Exponential asymptotical stability for distributed parameter systems with time delays [J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2003, 25(5): 579 - 583.)
- [10] 谢胜利, 谢振东, 刘永清, 等. 滞后抛物型控制系统的变结构控制[J]. 控制与决策, 1997, 12(3): 247 - 251.
- (XIE Shengli, XIE Zhendong, LIU Yongqing, et al. Variable structure control of parabolic type control system with delay [J]. *Control and Decision*, 1997, 12(3): 247 - 251.)
- [11] 廖晓昕, 肖冬梅. 具有变时滞的 Hopfield 型神经网络的全局指数稳定性[J]. 电子学报, 2000, 28(4): 87 - 90.
- (LIAO Xiaoxin, XIAO Dongmei. Globally exponential stability of Hopfield neural networks with time-varying delays [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2000, 28(4): 87 - 90.)
- [12] 廖晓昕. 动力系统的稳定性理论和应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2000.
- (LIAO Xiaoxin. *Theory and Application of Stability for Dynamical Systems*, National Defence Industry Press [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2000.)
- [13] HALANAY A. *Differential Equations: Stability Oscillations Time-lags* [M]. New York: Academic, 1966.
- [14] CHEN Anping, CAO Jinde. Existence and attractivity of almost periodic solutions for cellular neural networks with distributed delays and variable coefficients [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2003, 134(1): 125 - 140.

作者简介:

罗毅平 (1966—), 男, 华南理工大学自控理论与应用专业博士研究生, 近期主要从事神经网络动力学行为与分布参数系统的控制理论、方法及应用研究, E-mail: lyp6888@sohu.com;

邓飞其 (1962—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为复杂非线性系统的控制理论、方法及应用, E-mail: aufqdeng@scut.edu.cn.