年龄相关的种群空间扩散系统的广义解与收获控制

付 军^{1,2}, 李健全³, 陈任昭⁴

(1. 吉林师范大学 数学学院, 吉林 四平 136000; 2. 北京信息控制研究所, 北京 100037;
3. 华南师范大学 数学学院, 广东 广州 510631; 4. 东北师范大学 数学学院, 吉林 长春 130024)

摘要: 研究了由积分偏微分方程描述的年龄相关的种群空间扩散系统的收获控制问题. 首先利用不动点方法证明了对于有界死亡率 μ 的系统广义解的存在性, 但这是预备的结果. 进一步, 运用上述结果、先验估计和紧性定理, 证明了对于在 $r = A$ 附近无界的 μ 的系统解的存在惟一性. 其次, 利用类似方法得到系统最优收获控制的存在性. 最后, 利用 Gâteaux 微分和 Lions 的变分不等式理论, 推得了控制为最优的必要条件; 从而得到了由积分偏微分方程和变分不等式构成的最优性组. 最优性组能够确定最优控制. 还建立了表征最优控制的 Euler-Lagrange 组. 这些结果可为种群系统控制问题的实际研究作为理论参考.

关键词: 年龄相关的种群空间扩散系统; 积分偏微分方程的广义解; 最优收获控制; 最优控制的必要条件; 最优性组

中图分类号: O232, O175, TP13   文献标识码: A

Generalized solution and optimal harvesting control for age-dependent population spatial diffusion system

FU Jun^{1,2}, LI Jian-quan³, CHEN Ren-zhao⁴

(1. College of Mathematics, Jilin Normal University, Siping Jilin 136000, China;
2. Beijing Institute of Information and Control, Beijing 100037, China;
3. College of Mathematics, South China Normal University, Guangzhou Guangdong 510631, China;
4. College of Mathematics, Northeast Normal University, Changchun Jilin 130024, China)

Abstract: The optimal harvesting control problem for the age-dependent population spatial diffusion system represented by integral partial differential equations is discussed. First, using a fixed-point method, the existence of the generalized solution for the system is proved for the bounded relative mortality μ ; yet it is a preliminary result. Further, by utilising the preceding result, prior estimates and compactness theorem, the existence and uniqueness of the generalized solution for the system is proved for unbounded μ near $r = A$. Next, by using analogous methods, the existence of the optimal harvesting control for the system is obtained. Finally, the necessary condition for a control to be optimal is deduced, using Gâteaux differentiation and Lions' s theory of variational inequalities; and then the optimal system consisting of integral partial differential equations and variational inequalities is obtained. The optimal system can determine optimal controls. An Euler-Lagrange system characterized optimal control is also established. These results may serve as theoretical reference for practical researches of the control problem in population systems.

Key words: age-dependent population spatial diffusion system; generalized solution for integral partial differential equations; optimal harvesting control; necessary conditions of optimal control; optimality system

1 问题的陈述 (Statement of problem)

考虑下面年龄相关的时变种群扩散系统 S 的数学模型^[1,2]

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial t} - k\Delta p + \mu(r, t, x)p = \\ -v(r, t, x)p \text{ 在 } Q = \Theta \times \Omega \text{ 内,} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} p(0, t, x) = \int_0^A \beta(r, t, x)p(r, t, x)dr \\ \text{在 } \Omega_T = (0, T) \times \Omega \text{ 内,} \end{aligned} \quad (2)$$

$$p(r, 0, x) = p_0(r, x) \text{ 在 } \Omega_A = (0, A) \times \Omega \text{ 内,} \quad (3)$$

$$p(r, t, x) = 0 \text{ 在 } \Sigma = \Theta \times \partial\Omega \text{ 上.} \quad (4)$$

其中: $p(r, t, x)$ 是在时刻 t 年龄为 r 于空间位置

$x \in \Omega$ 处的单种群年龄-空间密度; Ω 为 $\mathbb{R}^N (1 \leq N \leq 3)$ 中具有边界 $\partial\Omega$ 的有界区域; Δ 是 Ω 上的 Laplace 算子; $\beta(r, t, x)$ 和 $\mu(r, t, x)$ 是种群的生育率和死亡率, $v(r, t, x)$ 是收获率; 常数 $k > 0$ 是种群的空间扩散系数; T 是某个固定的时刻, $0 < T < +\infty, \Theta = (0, A) \times (0, T)$, 式(4)表示区域 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 为非常不适宜于种群生存的; $p_0(r, x)$ 是种群于时刻 $t = 0$ 的年龄-空间密度的初始分布; 显然, 量 $P(r, t) = \int_0^r \int_{\Omega} p(\alpha, t, x) dx d\alpha$ 是 Ω 上时刻 t 年龄不超过 r 岁的种群总数; A 是种群个体所能活到的最高年龄, $0 < A < +\infty$; 由种群的实际意义, 有

$$p(r, t, x) = 0, \text{ 当 } r \geq A \text{ 时.} \quad (5)$$

本文始终假设下面的条件成立:

H_1) 在 $[0, A) \times [0, T] \times \bar{\Omega}$ 上的连续函数 $\mu(r, t, x)$ 满足 $\mu(r, t, x) \geq 0$ 在 Q 内, $\int_0^A \mu(r, t, x) dr = +\infty$ 在 Ω_T 内;

H_2) $\beta \in L^\infty(Q), 0 \leq \beta(r, t, x) \leq \bar{\beta} < +\infty$ a.e. 于 Q 内;

$$H_3) \begin{cases} \int_0^A p_0^2(r, x) dr \leq C < +\infty \text{ 在 } \Omega \text{ 中,} \\ p_0(r, x) \in L^2(\Omega_A), p_0(r, x) \geq 0 \text{ a.e. 于 } \Omega_A \text{ 内;} \end{cases}$$

H_4) 常数 $k \geq k_0 > 0, \partial\Omega$ 充分光滑.

式(5)与条件 H_1) 是等价的. 关于收获率 v , 假定它属于下面的容许控制集合 $\mathcal{U}$:

$$\mathcal{U} = \{v | v \in L^2(Q), 0 < \gamma_0 \leq v(r, t, x) \leq \gamma_1 < +\infty \text{ a.e. 于 } Q \text{ 内}\}. \quad (6)$$

系统 S 的解 $p(r, t, x)$ 依赖于 v . 因此将 p 表示为 $p(r, t, x; v)$ 或 $p(v)$, 即

$$p(v) \equiv p(r, t, x; v). \quad (7)$$

可以证明: $p(v)$ 关于 v 是非线性的, 但是连续的^[2]. 引进性能指标泛函 $J(v)$:

$$J(v) = \int_Q v(r, t, x) p(r, t, x; v) dQ, dQ = dr dt dx. \quad (8)$$

最优收获控制问题是

$$\text{寻求满足等式 } J(u) = \sup_{v \in \mathcal{U}} J(v) \text{ 的 } u \in \mathcal{U}. \quad (9)$$

式(9)中的 $u \in \mathcal{U}$ 称为系统 S 的最优收获控制, 以下简称最优控制, 而 $p(r, t, x; u)$ 称为系统 S 的最优状态, 依式(7)简记 $p(r, t, x; u) = p(u)$. 方程(1)~(4), 性能指标泛函(8)和极大化问题(9)就构成了年龄相关的时变种群扩散系统最优控制的数学

模型.

本文将运用 Lions 变分不等式理论解决系统 S 在 μ 满足假设 H_1) 即 μ 在 $(0, A)$ 上无界的条件下解的存在惟一性和最优收获控制这两个新问题. 而该问题的特殊情形被一些学者所讨论过^[3~16].

2 解的存在惟一性 (Existence and uniqueness of solution)

系统 S 的状态是由积分-偏微分方程初边值问题(1)~(4)的解 $p(v)$ 来描述的, 它的存在惟一性是讨论系统 S 最优控制的基础. 引进一些函数空间和记号: 设 $H^1(\Omega)$ 是 Ω 上的一阶 Sobolev 空间^[17], $H_0^1(\Omega)$ 由 $H^1(\Omega)$ 中的具有下面性质的元素 $\varphi(x)$ 组成, 即 $\varphi(x)|_{\partial\Omega} = 0$; 又设 $V = L^2(\Theta; H_0^1(\Omega)), V$ 的对偶 $V' = L^2(\Theta; H^{-1}(\Omega)), H_0^1(\Omega)$ 的对偶 $(H_0^1(\Omega))' = H^{-1}(\Omega), Dp = p_r + p_t = \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial t}$.

定义 1^[2, 12, 16] 称函数 $p \in V, Dp \in V'$ 为问题(1)~(4)的广义解, 若 p 满足积分恒等式

$$\int_{\Theta} \langle Dp + \mu p, \varphi \rangle dr dt + k \int_Q \nabla p \cdot \nabla \varphi dQ = - \int_Q v p \varphi dQ, \forall \varphi \in V, \quad (10)$$

$$\int_{\Omega_T} p \varphi(0, t, x) dt dx = \int_{\Omega_T} \left[\int_0^A \beta p dr \right] \varphi(0, t, x) dt dx, \forall \varphi \in \Phi, \quad (11)$$

$$\int_{\Omega_A} p \varphi(r, 0, x) dr dx = \int_{\Omega} p_0(r, x) \varphi(r, 0, x) dr dx, \forall \varphi \in \Phi. \quad (12)$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 $(H_0^1(\Omega))' \equiv H^{-1}(\Omega)$ 与 $H_0^1(\Omega)$ 之间的对偶积, 检验函数空间 Φ 由下式定义:

$$\Phi = \{ \varphi | \varphi \in V, D\varphi \in V', \varphi(A, t, x) = \varphi(r, T, x) = 0 \}. \quad (13)$$

由下面的引理 1 可见, 恒等式(10)~(12)中的各个积分是有意义的, 因而定义 1 是合理的. 先引用或证明几个引理和几个定理.

引理 1^[12] 设 $p \in V, Dp \in V'$, 则有 $p \in C^0([0, A]; L^2(\Omega_T)), p \in C^0([0, T]; L^2(\Omega_A))$. (14)

式(14)蕴涵下面的事实:

$$\begin{cases} p(0, \cdot, \cdot), p(A, \cdot, \cdot) \in L^2(\Omega_T), \\ p(\cdot, 0, \cdot), p(\cdot, T, \cdot) \in L^2(\Omega_A). \end{cases} \quad (15)$$

定义 2 空间 $\mathcal{R}_1(a, b; B, E)$ 表示 $p \in L^2(a,$

$b; B)$ 且 $\frac{\partial p}{\partial t} \in L^2(a, b; E)$ 的元素的集合, 其范数定义为

$$\|p\|_{\mathcal{N}_1} = \left(\int_a^b \|p(t)\|_B^2 dt + \int_a^b \left\| \frac{\partial p(t)}{\partial t} \right\|_E^2 dt \right)^{1/2}.$$

运用文献[18](命题 4.2, pp.60-61), 可以证明下面的定理 1:

定理 1 设 $\mathcal{N}_1(0, T; L^2(0, A; H_0^1(\Omega)), L^2(0, A; H^{-1}(\Omega)))$ 是 $p \in L^2(0, T; L^2(0, A; H_0^1(\Omega)))$ 且 $\frac{\partial p}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(0, A; H^{-1}(\Omega)))$ 的元素的集合, 则从 $\mathcal{N}_1(0, T; L^2(0, A; H_0^1(\Omega)), L^2(0, A; H^{-1}(\Omega)))$ 到 $L^2(Q)$ 的线性映射是紧的.

为了讨论问题(1)~(4)中的 p , 进行未知函数 p 的变换是方便的. 设 $\lambda > 0$ 是足够大的数, 若 p 是问题(1)~(4)的解, 则 $g = e^{-\lambda t} p$ 为问题(1)~(4)由 $\mu + \lambda$ 代替 μ 后的解. 反之亦然. 往下将 g 仍然表示为 p , 而把方程(1)中的 μ 用 $\mu + \lambda$ 代替, 把它记作方程(1').

假定函数 $m(r, t, x)$ 满足条件

$$\begin{cases} m(r, t, x) \text{ 在 } [0, A] \times [0, T] \times \bar{\Omega} \text{ 上连续,} \\ 0 \leq m(r, t, x) \leq \bar{m} < +\infty \text{ 在 } \bar{Q} \text{ 上,} \end{cases} \quad (16)$$

令 $m + v + \lambda = \mu_1$, 则 μ_1 在 $[0, A]$ 上有界, 由文献[12]可以推得下面引理 2.

引理 2 设 p_0 满足条件 H_3 , $B \in L^2(\Omega_T)$, m 满足式(16), $\lambda > 0$ 充分大, 则存在惟一的函数 $p \in V$ 且 $Dp \in V'$, p 满足方程和初边值条件

$$p_r + p_t - k\Delta p + (m + \lambda)p = -vp \text{ 在 } Q \text{ 内,} \quad (17)$$

$$p(r, 0, x) = p_0(r, x), \quad p(0, t, x) = B(t, x), \quad (18)$$

而且有估计

$$\alpha \|p\|_V^2 \leq \frac{1}{2} \|p_0\|_{L^2(\Omega_A)}^2 + \frac{1}{2} \|B\|_{L^2(\Omega_T)}^2. \quad (19)$$

其中常数 $\alpha = \alpha_1 \cdot \text{mes}\Theta > 0$, $\alpha_1 = \min\{k_0, \gamma_0 + \lambda\}$.

定理 2 设 β, p_0, k, m 和 v 分别满足条件 H_2)~ H_4), 式(16)和(6)以及 $\lambda > 0$ 足够大, 则问题

$$p_r + p_t - k\Delta p + (m + \lambda)p = -vp \text{ 在 } Q \text{ 内,} \quad (20)$$

$$p(0, t, x) = \int_0^A \beta(r, t, x) p(r, t, x) dr \text{ 在 } \Omega_T \text{ 内,} \quad (21)$$

$$p(r, 0, x) = p_0(r, x) \text{ 在 } \Omega_A \text{ 内,} \quad (22)$$

$$p(r, t, x) = 0 \text{ 在 } \Sigma \text{ 上} \quad (23)$$

存在惟一的广义解 $p \in V, Dp \in V'$.

证 用不动点方法证明之. 由引理 2, 对于 V 中任一给定的 w , 存在惟一的 $p = Fw, Dp \in V', p$ 是问题(20), (22), (23)和 $p(0, t, x) = \int_0^A \beta(r, t, x) w(r, t, x) dr$ 的解. 由此及式(18), (19)和 Hölder 不等式推得

$$\begin{aligned} \|p\|_V^2 &\leq C_2 \|p_0\|_{L^2(\Omega_A)}^2 + C_3 \|w\|_{L^2(Q)}^2 \leq \\ &C_2 \|p_0\|_{L^2(\Omega_A)}^2 + C_3 \|w\|_V^2. \end{aligned} \quad (24)$$

其中常数 $C_2 = 1/2\alpha > 0, C_3 = C_1/2\alpha, C_1 = A\beta^2$. 由式(24)推得 F 映射 V 到它自身, 且是连续的, 从 $L^2(Q)$ 到 V 是有界的.

设 w_1 和 w_2 是 $L^2(Q)$ 中的任意两个元素, 置 $p_1 = Fw_1, p_2 = Fw_2, w = w_1 - w_2$, 则差 $p = p_1 - p_2$ 是方程(20)带条件

$$\begin{cases} p(0, t, x) = \int_0^A \beta(r, t, x) w(r, t, x) dr \text{ 在 } \Omega_T \text{ 内,} \\ p(r, 0, x) = 0 \text{ 在 } \Omega_A \text{ 内} \end{cases} \quad (25)$$

的解. 对方程(20)的相应积分恒等式分部积分, 注意到条件(25)并运用 Hölder 不等式, 能够推得

$$\|Fw_1 - Fw_2\|_{L^2(Q)}^2 \leq \frac{1}{2} \|w_1 - w_2\|_{L^2(Q)}^2.$$

此式意味着 F 在 $L^2(Q)$ 中是严格压缩的. 由压缩映象原理, F 在 $L^2(Q)$ 中存在惟一的不动点 p . 这个 $p \in L^2(Q)$ 是式(20)~(23)的弱解. 但是从估计式(24)和 $Fw = p$ 有不动点 p , 也就是式(24)中第一个不等号右边的第二项 $C_3 \|w\|_{L^2(Q)}^2$ 变为 $C_3 \|p\|_{L^2(Q)}^2$. 这样, 推得 $\|p\|_V^2 \leq C_2 \|p_0\|_{L^2(\Omega_A)}^2 + C_3 \|p\|_{L^2(Q)}^2$. 由此可见, 刚才求出的问题(20)~(23)的 L^2 -解 p , 也是 V -解 p . 证毕.

定理 3 设 μ, β, p_0, k 和 v 分别满足条件 H_1)~ H_4)和式(6). 则问题(1)~(4)在 V 中存在惟一的广义解 $p \in V, Dp \in V'$, 即 p 满足积分恒等式(10)~(12).

证 1) 证明存在性. 条件 H_1)与解 p 满足 $p(A, t, x) = 0$ 是等价的. 条件 H_1)没有假定 μ 在 $r = A$ 的左侧是有界的, 甚至可以是急增的. 回忆前面定理 1 后面叙述所作的变换 $g = e^{-\lambda t} p, g$ 仍然记作 p , 其中正数 $\lambda > 0$ 是足够大的. 这时, 方程(1)变为

$$p_r + p_t - k\Delta p + (\mu + \lambda)p = -vp \text{ 在 } Q \text{ 内,} \quad (1')$$

而条件(2)~(4)形式保持原样. 显然, 若问题(1'),

(2)~(4)于 V 中存在惟一解,则问题(1)~(4)也同样于 V 中存在惟一解.取一个序列 $\{\mu_n\}$,使得:对 $n = 1, 2, \dots$,

$$\begin{cases} \mu_n(r, t, x) = \\ \mu(r, t, x) \text{ 在 } Q_n = (0, A - \frac{1}{n}) \times (0, T) \times \Omega \text{ 内,} \\ \mu_n \in L^\infty(Q). \end{cases} \quad (26)$$

式(26)表示的 μ_n 是存在的,例如:设 $\varphi_n(r)$ 是 $[0, A]$ 的连续函数,使得

$$\begin{cases} 0 \leq \varphi_n(r) \leq 1 \text{ 在 } [0, A] \text{ 上,} \\ \varphi_n(r) = 1 \text{ 在 } [0, A - \frac{1}{n}] \text{ 上,} \\ \varphi_n(r) = 0 \text{ 在 } [A - \frac{1}{n+1}, A] \text{ 上.} \end{cases} \quad (27)$$

因而有

$$\begin{aligned} \mu_n(r, t, x) &= \mu(r, t, x)\varphi_n(r) = \\ &\begin{cases} \mu(r, t, x) \text{ 在 } \bar{Q}_n \text{ 上,} \\ \mu(r, t, x)\varphi_n(r) \text{ 在 } Q_{n+1} \setminus Q_n \text{ 上,} \\ 0 \text{ 在 } \bar{Q} \setminus Q_{n+1} \text{ 上.} \end{cases} \end{aligned} \quad (28)$$

由式(27),(28)定义的 $\mu_n(r, t, x)$ 显然符合(26)的要求.以后假定 $\mu_n(r, t, x)$ 是由式(27),(28)给定的.

由 $\mu_n(r, t, x)$ 在 $\bar{Q}$ 上的连续有界性,依据定理2,对每个 n 存在属于 V 的惟一的 $p(r, t, x; \mu_n)$,记作 p_n, p_n 是下面问题(29)~(32)的广义解:

$$\frac{\partial p_n}{\partial r} + \frac{\partial p_n}{\partial t} - k\Delta p_n + (\mu_n + v + \lambda)p_n = 0 \text{ 在 } Q \text{ 内,} \quad (29)$$

$$p_n(0, t, x) = \int_0^A \beta(r, t, x)p_n(r, t, x)dr \text{ 在 } \Omega_T \text{ 内,} \quad (30)$$

$$p_n(r, 0, x) = p_0(r, x) \text{ 在 } \Omega_A \text{ 内,} \quad (31)$$

$$p_n(r, t, x) = 0 \text{ 在 } \Sigma \text{ 上.} \quad (32)$$

用 p_n 乘方程(29),并在 Ω_A 上积分,对所得的积分恒等式中有关 $\frac{\partial p_n}{\partial r} p_n + \frac{\partial p_n}{\partial t} p_n$ 的项分部积分,关于 $k\Delta p_n$ 的项利用 Green 公式作变形,并注意式(30)和 $p_n^2(A, t, x) \geq 0$,就得到

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \|p_n(t)\|^2 + \alpha_2 \|p_n(t)\|^2 + \\ &2 \int_{\Omega_A} (\mu_n + v + \lambda) p_n^2(t) dr dx \leq \\ &\int_{\Omega} \left[\int_0^A \beta p_n dr \right]^2 dx. \end{aligned} \quad (33)$$

其中:常数 $\alpha_2 > 0$ 只与 k 有关,模 $|\cdot|$ (相应地模 $\|\cdot\|$) 表示空间 $L^2(\Omega_A)$ (相应地 $L^2(0, A; H_0^1(\Omega))$) 的范数.对式(33)在区间 $(0, t)$ 上关于 t 积分,记 $\Omega_t = (0, t) \times \Omega, Q_t = (0, A) \times \Omega_t$,并注意式(31),得到

$$\begin{aligned} &\|p_n(t)\|^2 + \alpha_2 \int_0^t \|p_n(\tau)\|^2 d\tau + \\ &2 \int_{Q_t} (\mu_n + v + \lambda) p_n^2(\tau) dr d\tau dx \leq \\ &\int_{\Omega_t} \left(\int_0^A (\beta p_n)(r, \tau, x) dr \right)^2 d\tau dx + \|p_0\|_{L^2(\Omega_A)}^2. \end{aligned} \quad (34)$$

运用 Hölder 不等式,估计上式不等号右边第一项,并合并同类项,然后对所得式子在 $(0, T)$ 上对 t 积分,得到 $\int_Q [1 + 2T(\mu_n + v + \lambda - C_4)] p_n^2 dQ + \alpha_2 T \|p_n\|_V^2 \leq T \|p_0\|_{L^2(\Omega_A)}^2$,其中常数 $C_4 = A\bar{\beta}^2/2$.由于 $v \geq \gamma_0, \mu_n \geq 0, T > 0, \alpha_2 > 0$,常数 $C_4 > 0$ 以及选取 $\lambda > 0$ 足够大,例如 $\lambda > C_4$,所以从上式就推得

$$\text{序列 } \{p_n\} \text{ 分别在 } L^2(Q) \text{ 和 } V \text{ 中一致有界.} \quad (35)$$

由式(35)推得:存在 V 中的 p 和 $\{p_n\}$ 的一个子序列,仍然记作 $\{p_n\}$,使得:当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $p_n \rightarrow p$ 在 V 中弱, $p \in V$ 和 $p_n \rightarrow p$ 在 $L^2(Q)$ 中弱. (36)

Δ 是从 $V \rightarrow V'$ 的有界线性算子.因此 Δp_n 在 V' 中是一致有界的.从方程(29)和(35)推断出:序列 $\{\frac{\partial p_n}{\partial r} + \frac{\partial p_n}{\partial t} + (\mu_n + v + \lambda)p_n\}$ 依 V' 的范数是一致有界的.从而推出:存在 $h \in V'$,且当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{\partial p_n}{\partial r} + \frac{\partial p_n}{\partial t} + (\mu_n + v + \lambda)p_n \rightarrow h$ 在 V' 中弱, $h \in V'$. (37)

逐次考察式(37)左边各项的收敛情况:对任意给定的 $\varphi \in \mathcal{D}(Q)$,其中 $\mathcal{D}(Q) = \{\varphi | \varphi \text{ 在 } Q \text{ 上无限次可微并且有紧的支集,还赋予导出极限拓扑}\}^{[17]}$.

显然有 $\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial r} \in \mathcal{D}(Q)$,而且 $\mathcal{D}(Q) \subset V = V'$.由广义导数的定义和式(36)可得:当 $n \rightarrow +\infty$ 时,

$$\begin{aligned} &\int_Q \frac{\partial p_n}{\partial r} \varphi dQ = \\ &-\int_Q \frac{\partial \varphi}{\partial r} p_n dQ \rightarrow -\int_Q \frac{\partial \varphi}{\partial r} p dQ = \end{aligned}$$

$$\int_Q \frac{\partial p}{\partial r} \varphi dQ, \forall \varphi \in \mathcal{D}(Q). \quad (38)$$

由于 $\mathcal{D}(Q)$ 在 V 中稠, 因此

$$\begin{cases} \text{式(38)对任意的 } \varphi \in V \text{ 也成立,} \\ \text{而且 } p_r, p_t \text{ 均存在, 且 } p_r, p_t \in V'. \end{cases} \quad (39)$$

从而 $\{\frac{\partial p_n}{\partial r}\}, \{\frac{\partial p_n}{\partial t}\}$ 分别地在 V' 中一致有界. 由此和式(35)以及紧性定理1推得

$$p_n \rightarrow p \text{ 在 } L^2(Q) \text{ 中强, 当 } n \rightarrow +\infty \text{ 时.} \quad (40)$$

依式(6)及常数 $\lambda > 0$, 从式(40)有: 当 $n \rightarrow +\infty$ 时,

$$\begin{cases} \int_Q (v + \lambda) p_n \varphi dQ \rightarrow \int_Q (v + \lambda) p \varphi dQ, \\ \forall \varphi \in V, (v + \lambda) p \in V'. \end{cases} \quad (41)$$

考察式(37)中的剩下的项 $\mu_n p_n$, 有: 当 $n \rightarrow +\infty$ 时,

$$\int_Q \mu_n p_n \varphi dQ \rightarrow \int_Q \mu p \varphi dQ, \forall \varphi \in \mathcal{D}(Q). \quad (42)$$

事实上

$$\begin{aligned} \int_Q \mu_n p_n \varphi dQ &= \\ \int_Q \mu_n (p_n - p) \varphi dQ + \int_Q \mu_n p \varphi dQ &= I_n^{(1)} + I_n^{(2)}. \end{aligned} \quad (43)$$

由广义积分概念和 μ_n 的定义(27), (28), 并令

$$A_n = A - \frac{1}{n}, \text{ 则有}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n^{(2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_Q \mu_n p \varphi dQ =$$

$$\lim_{A_n \rightarrow A} \int_0^{A_n} dr \int_{\Omega_r} \mu p \varphi dQ = \int_Q \mu p \varphi dQ, \forall \varphi \in \mathcal{D}(Q), \quad (44)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n^{(1)} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_Q \mu_n (p_n - p) \varphi dQ = 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}(Q). \quad (45)$$

这是因为由 μ_n 的定义(27), (28)和 $\varphi \in \mathcal{D}(Q)$ 以及 $\text{supp } \varphi$ 定义, 函数 $\mu_n \varphi$ 在 $Q_0 \equiv \text{supp } \varphi (\subset \subset Q)$ 上是一致有界的, 即 $|\mu_n \varphi| \leq M < +\infty$, 而在 $(Q \setminus \text{supp } \varphi)$ 上为零. 由此及式(40)有: 当 $n \rightarrow +\infty$ 时,

$$|I_n^{(1)}| = \left| \int_Q (\mu_n \varphi) (p_n - p) dQ \right| =$$

$$\left| \int_{Q_0} (\mu_n \varphi) (p_n - p) dQ \right| + \left| \int_{Q \setminus Q_0} (\mu_n \varphi) (p_n - p) dQ \right| \leq$$

$$M(\text{mes } Q)^{1/2} \|p_n - p\|_{L^2(Q)} + 0 \rightarrow 0,$$

即式(45)成立. 由式(43)~(45)推得式(42)成立. 由 $\mathcal{D}(Q)$ 在 V 中稠, 式(42)对任意的 $\varphi \in V$ 也成立.

由式(39), (41)和(42), 就推得: 当 $n \rightarrow +\infty$ 时,

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_n}{\partial r} + \frac{\partial p_n}{\partial t} + (v + \lambda) p_n + \mu_n p_n &\rightarrow \\ \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial t} + (v + \lambda) p + \mu p &\text{在 } V' \text{ 中弱.} \end{aligned} \quad (46)$$

依据极限的惟一性, 从式(37)和(46)推得 $h = \frac{\partial p}{\partial r} +$

$\frac{\partial p}{\partial t} + (v + \lambda) p + \mu p$. 因此由式(37), (39), (41)推得

$$\mu p = h - \left(\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial t} + (v + \lambda) p \right) \in V'. \quad (47)$$

由 $\mathcal{D}(Q)$ 在 V 中稠和(36)容易证明: 当 $n \rightarrow +\infty$ 时,

$$\int_Q \nabla p_n \cdot \nabla \varphi dQ \rightarrow \int_Q \nabla p \cdot \nabla \varphi dQ, \forall \varphi \in V. \quad (48)$$

这样, 在式(29)中令 $n \rightarrow +\infty$, 从式(46)~(48)就推得式(36)中的极限函数 $p \in V$ 在 V' 意义下满足方程(1'). 接下来证明 p 满足条件(11). 从式(30)有

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_T} p_n \varphi(0, t, x) dt dx &= \\ \int_{\Omega_T} \left[\int_0^A \beta(r, t, x) p_n(r, t, x) dr \right] \varphi(0, t, x) dt dx, \end{aligned}$$

$$\forall \varphi \in \Phi.$$

注意到迹引理1中的式(15), 由分部积分法和应用式(40)、假设条件 H_3 、式(36), (38), 在上式中令 $n \rightarrow +\infty$ 取极限, 就推得 p 满足条件(11). 最后, 用类似于证明 p 满足式(11)的方法可推得 p 满足条件(12). 至此, 就证明了式(36)中的极限函数 $p \in V$ 是问题(1'), (2)~(4)的广义解. 回忆起此处的 p 是变换 $g = e^{-\lambda t} p$ 中的 g , 那么把前面证明过程中的 p 返回记作 g , 则 $p = g e^{\lambda t}$ 就是问题(1)~(4)在 V 中的广义解. 存在性得证.

2) 证明惟一性. 只须就方程(1'), (2)~(4)证明之. 设 p_1, p_2 是问题(1'), (2)~(4)任意给定的两个解, 令 $p = p_1 - p_2$, 则 p 满足方程(1'), (2)~(4)及齐次初始条件: $p(r, 0, x) = 0$ (即 $p_0 = 0$) 在 Ω_A 内.

设 A_0 满足 $0 < A_0 < A$, $Q_0 = (0, A_0) \times (0, T) \times \Omega$. 用 p 去乘方程(1'), 并在 Q_0 上积分, 得到

$$\int_{Q_0} (p_r + p_t + \mu p + \lambda p + \nu p) p dQ + k \int_{Q_0} |\nabla p|^2 dQ = 0. \quad (49)$$

对式(49)的第一项分部积分,利用式(2)和 $p(r, 0, x) = 0$, 推得

$$\int_{Q_0} [p_r + p_t + (\mu + v + \lambda)p] p dQ = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} p^2(r, T, x) dr dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega_T} p^2(A_0, t, x) dt dx + \int_{Q_0} (\mu + v + \lambda) p^2 dQ - \frac{1}{2} \int_{\Omega_T} \left[\int_0^{A_0} \beta p dr \right]^2 dt dx.$$

而 $\int_{\Omega_T} \left[\int_0^{A_0} \beta p dr \right]^2 dt dx \leq C_5 \|p\|_{L^2(Q_0)}^2$, $C_5 = \beta A_0 > 0$.

将该式及上式代入式(49)中,并令 $A_0 \rightarrow A$, 就推得

$$\lambda \int_{Q'} p^2 dQ + k \int_{Q'} |\nabla p|^2 dQ \leq \frac{1}{2} C_5 \int_{Q'} p^2 dQ.$$

取 $\lambda > \frac{C_5}{2}$, 得 $(\lambda - \frac{C_5}{2}) \int_{Q'} p^2 dQ \leq 0$ 和 $p = 0$ a. e. 在 Q 内, 即 $p_1 = p_2$ a. e. 在 Q 内. 惟一性得证.

证毕.

推论 1 在定理 3 的假设下, 还有结果 $\mu^{1/2} p \in L^2(Q)$, $\mu p \in L^2(Q)$.

3 最优控制的存在性 (Existence of optimal control)

下面的定理是本文的主要结果之一.

定理 4 设 $p(v) \in V, Dp \in V'$ 为由问题(1)~(4)所支配的系统 S 的状态, 容许控制集合 $\mathcal{B}$ 由式(6)确定, 性能指标泛函 $J(v)$ 由式(8)给定. 若假设 $H_1) \sim H_4)$ 成立, 则问题(9)在 $\mathcal{B}$ 中存在一个最优收获控制 $u \in \mathcal{B}$, 即 u 满足问题(9)中的等式

$$J(u) = \sup_{v \in \mathcal{B}} J(v). \tag{50}$$

证 设 $\{v_n\} \subset \mathcal{B}$ 为问题(9)的极大化序列, 使得: 当 $n \rightarrow +\infty$ 时,

$$J(v_n) \rightarrow \int \sup_{v \in \mathcal{B}} J(v). \tag{51}$$

由 $\mathcal{B}$ 的定义式(6)有 $\|v_n\|_{L^2(Q)} \leq M_0 < +\infty$, 其中 $M_0 = \gamma_1 \text{mes} Q$. 因而, 存在 $u \in \mathcal{B}$ 和可以抽出 $\{v_n\}$ 的一个子序列, 这里仍记为 $\{v_n\}$ 使

$$v_n \rightarrow u \text{ 在 } L^2(Q) \text{ 中弱, } u \in \mathcal{B}. \tag{52}$$

设 $p_n = p(r, t, x; v_n) = p(v_n) \in V, Dp_n \in V'$ 为问题(1)~(4)当 $v = v_n$ 时的广义解, 按定义 1, p_n 满足积分恒等式

$$\int_{\Theta} \langle Dp_n + \mu p_n, \varphi \rangle dr dt + k \int_{Q'} \nabla p_n \cdot \nabla \varphi dQ = - \int_{Q'} v_n p_n \varphi dQ, \quad \forall \varphi \in V, \tag{53}$$

$$\int_{\Omega_T} (p_n \varphi)(0, t, x) dt dx =$$

$$\int_{\Omega_T} \left[\int_0^A \beta p_n dr \right] \varphi(0, t, x) dt dx, \quad \forall \varphi \in \Phi, \tag{54}$$

$$\int_{\Omega_A} (p_n \varphi)(r, 0, x) dr dx =$$

$$\int_{\Omega_A} p_0(r, x) \varphi(r, 0, x) dr dx, \quad \forall \varphi \in \Phi. \tag{55}$$

首先证明存在 $p \in V, Dp \in V'$, 使得: 当 $n \rightarrow +\infty$ 时,

$$p_n \rightarrow p \text{ 在 } V \text{ 中弱, } p \in V, \tag{56}$$

$$Dp_n \rightarrow Dp \text{ 在 } V' \text{ 中弱,} \tag{57}$$

$$p_n \rightarrow p \text{ 在 } L^2(Q) \text{ 中强.} \tag{58}$$

采用类似第 2 节中导出估计式(34)的手法, 可以推出估计式

$$|p_n(t)|^2 + \alpha \int_0^t \|p_n(\tau)\|^2 d\tau + \int_0^t \int_{\Omega_A} \mu p_n^2(\tau) dr dx d\tau \leq |p_n(0)|^2 + \int_0^t (A\beta^2 + 2\gamma_1) |p_n(\tau)|^2 d\tau, \quad \alpha > 0. \tag{59}$$

由 Gronwall 不等式, 推得

$$|p_n(t)|^2 \leq |p_0|^2 \exp[T(A\beta^2 + 2\gamma_1)] \equiv M_1 < +\infty.$$

将该式在 $[0, T]$ 上积分, 得到

$$\|p_n\|_{L^2(Q)}^2 \leq TM_1 \equiv M_2 < +\infty. \tag{60}$$

其中 M_2 是与 n 无关的正数. 由式(59)和(60)可以推得 $\|p_n\|_V^2 \leq M_3 < +\infty$, 其中常数 $M_3 = \alpha^{-1} [|p_0|^2 + (A\beta^2 + 2\gamma_1)M_2]$ 与 n 无关. 由此推得: 可从序列 $\{p_n\}$ 中抽出子序列仍记为 $\{p_n\}$ 使得式(56)成立.

采用类似于第 2 节式(38)~(40)的证明手法, 可以证明(57), (58)成立. 在式(53)~(55)中让 $n \rightarrow +\infty$ 取极限, 由式(56)~(58)推得式(56)的极限函数 $p \in V, Dp \in V'$ 和式(52)中的极限函数 $u \in \mathcal{B}$ 满足积分恒等式(10)~(12)(其中 $v = u$). 按记号式(7), 就有

$$p(r, t, x) = p(r, t, x; u) = p(u) \in V, Dp \in V' \tag{61}$$

为问题(1)~(4)相应于 $v = u$ 的广义解.

最后证明式(52)中的极限函数 u 为系统 S 的最优收获控制, 即 u 满足等式(50). 由 $\mathcal{B}$ 的定义式(6)及(60)有 $0 \leq J(v_n) = \int_{Q'} v_n p_n dQ \leq \gamma_1 \int_{Q'} p_n dQ \leq \gamma_1 (\text{mes} Q)^{1/2} M_2^2 < +\infty$. 由此及式(51)有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(v_n) = \sup_{v \in \mathcal{B}} J(v) < +\infty.$$

由极限惟一性, 要证明等式(50)成立, 只须证明: 当 $n \rightarrow +\infty$ 时,

$$J(v_n) \rightarrow \int_Q u(r, t, x) p(r, t, x; u) dQ = J(u). \quad (62)$$

由式(52), 对于式(61)的 $p \in V \subset L^2(Q)$ 有: 当 $n \rightarrow +\infty$ 时,

$$\int_Q (v_n - u) p(r, t, x; u) dQ \rightarrow 0. \quad (63)$$

由式(58)和(61)有: 当 $n \rightarrow +\infty$ 时 $p(v_n) \rightarrow p(u)$ 在 $L^2(Q)$ 中强. 由此及式(63), 并注意到 $\{v_n\}$ 在 $L^2(Q)$ 中的有界性可得

$$\begin{aligned} |J(u) - J(v_n)| &= \\ \left| \int_Q [v_n p(v_n) - u p(u)] dQ \right| &\leq \\ \left| \int_Q v_n [p(v_n) - p(u)] dQ \right| + \left| \int_Q (v_n - u) p(u) dQ \right| &\rightarrow \\ 0 + 0 = 0, &\text{ 当 } n \rightarrow +\infty \text{ 时,} \end{aligned}$$

即式(62)成立, 从而等式(50)成立. 证毕.

4 必要条件和最优性组 (Necessary condition and optimality system)

先讨论收获控制 $u \in \mathcal{U}$ 为最优的必要条件.

设 $p \in V$ 为系统 S 的广义解, 由定理3有: $p(v)$ 是从 $L^2(Q) \rightarrow V$ 的非线性算子. 本文暂时在形式上写出算子 $p \in M(L^2(Q), V)$ 在 u 处沿方向 $(v - u)$ 的 G-微分^[20]:

$$\begin{aligned} \bar{p} &\equiv \bar{p}(u)(v - u) = \frac{d}{d\lambda} p(u + \lambda(v - u)) \Big|_{\lambda=0} = \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{1}{\lambda} [p(u + \lambda(v - u)) - p(u)], \quad \forall v \in \mathcal{U}. \end{aligned} \quad (64)$$

其中: $p_\lambda = p(r, t, x; u_\lambda)$, $p = p(u)$, $u_\lambda = u + \lambda(v - u)$, $0 < \lambda < 1$, $u \in \mathcal{U}$.

上面之所以说“暂时在形式上”, 是因为到目前为止作者还不知道式(64)中的极限 $\bar{p}$ 是否存在. 如果存在, 按文献[20]的定义 $\bar{p}$ 是从 $L^2(Q) \rightarrow V$ 的算子, 记作 $\bar{p} \in M(L^2(Q) \rightarrow V)$. 现在还是在形式上推导 $\bar{p}$ 应该满足的方程及条件(当然, 后面一旦证明 $\bar{p}$ 存在, 那就不是形式上的了).

将 p_λ 满足的积分恒等式(10)~(12)(其中 $p = p_\lambda$, $v = u_\lambda$) 与 $p(u)$ 所满足的积分恒等式(10)~(12)(其中 $p = p(u)$, $v = u$) 作差, 并除以 $\lambda > 0$, 令 $\lambda \rightarrow 0^+$ 取极限, 按记号式(64)这个形式上的极限 $\bar{p}$ 就满足积分恒等式

$$\begin{aligned} \int_{\Theta} \langle D\bar{p} + (\mu + u)\bar{p}, \varphi \rangle dr dt + k \int_Q \nabla \bar{p} \cdot \nabla \varphi dQ = \\ - \int_Q (v - u) p \varphi dQ, \quad \forall \varphi \in V, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_T} (\bar{p}\varphi)(0, t, x) dt dx = \\ \int_{\Omega_T} \left[\int_0^A \beta p dr \right] \varphi(0, t, x) dt dx, \quad \forall \varphi \in \Phi, \end{aligned} \quad (65)$$

$$\int_{\Omega_A} (\bar{p}\varphi)(r, 0, x) dr dx = 0, \quad \forall \varphi \in \Phi,$$

$$\bar{p}(r, t, x) = 0 \text{ 在 } \Sigma \text{ 上.}$$

式(65)中的前3个积分恒等式可以分别称作 $\bar{p}$ 在 V' 意义下, 在 $L^2(\Omega_T)$ 中的弱意义下和在 $L^2(\Omega_A)$ 中的弱意义下分别满足下面的前3个等式, 而第4个照旧:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} - k\Delta \bar{p} + (\mu + u)\bar{p} = -(v - u)p \text{ 在 } Q \text{ 内,} \\ \bar{p}(0, t, x) = \int_0^A \beta p dr \text{ 在 } \Omega_T \text{ 内,} \\ \bar{p}(r, 0, x) = 0 \text{ 在 } \Omega_A \text{ 内,} \\ \bar{p}(r, t, x) = 0 \text{ 在 } \Sigma \text{ 上.} \end{cases} \quad (66)$$

由于式(66)中第1式等式右端的已知函数 $f = (v - u)p$ 与 $\bar{p}$ 无关, 且 $f \in L^2(Q)$ 和有界, 因而问题(66)与问题(1)~(4)属于同一类型的问题, 只是相差一个自由项 f . 运用本文定理3的证明方法, 容易证明在定理3所设条件下, 问题(66)在 V 中存在惟一广义解 $\bar{p} \in V$, $D\bar{p} \in V'$. 由此可见, 式(64)表达的 $\bar{p}$ 已不再是形式上的, 而是确实存在的, 而且由方程组(66)惟一确定. 本文后面要用到的也正是方程组(66)及其所确定的广义解 $\bar{p} \in V$, $D\bar{p} \in V'$ 这些事实.

现在来导出 $u \in \mathcal{U}$ 为最优的必要条件.

定理5 设 u 是系统 S 的最优收获控制, 则 u 满足不等式

$$- \int_Q [\bar{u}\varphi + (v - u)p(u)] dQ \geq 0, \quad \forall v \in \mathcal{U}, \quad (67)$$

即 $u \in \mathcal{U}$ 为系统最优收获控制的必要条件是 u 满足不等式(67).

证 由 $J(v)$ 的结构式(9)和 $u \in \mathcal{U}$ 为最优控制, 以及 u_λ 和 p_λ 的含义, 有

$$\begin{aligned} J(u) - J(u_\lambda) &= \int_Q (u p - u_\lambda p_\lambda) dQ = \\ \int_Q [u p - (u + \lambda(v - u)) p(u + \lambda(v - u))] dQ &= \\ - \int_Q u [p(u + \lambda(v - u)) - p(u)] dQ - \\ \int_Q \lambda (v - u) p(u + \lambda(v - u)) dQ &\geq 0. \end{aligned}$$

将上式除以 λ , 令 $\lambda \rightarrow 0^+$ 取极限, 并注意到 p 的定义式(64), 由极限保号性推得

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{1}{\lambda} \left\{ - \int_Q u [p(u + \lambda(v - u)) - p(u)] dQ - \int_Q (v - u) p[u + \lambda(v - u)] dQ \right\} = - \int_Q [u\dot{p} + (v - u)p] dQ \geq 0.$$

即式(67)成立. 证毕.

为了变换不等式(67), 用

$$\begin{cases} -\frac{\partial q}{\partial r} - \frac{\partial q}{\partial t} - k\Delta q + (\mu + u)q - \beta(r, t, x)q(0, t, x) = -u & \text{在 } Q \text{ 内,} \\ q(A, t, x) = 0 & \text{在 } \Omega_T \text{ 内,} \\ q(r, T, x) = 0 & \text{在 } \Omega_A \text{ 内,} \\ q(r, t, x) = 0 & \text{在 } \Sigma \text{ 上.} \end{cases} \quad (68)$$

定义伴随状态 $q(r, t, x; u)$. 上述问题(68)容许惟一解 $q(r, t, x; u) \in V$ (只要作变换 $r = A - r', t = T - t'$, 即可化为类似问题(1)~(4)情形, 可用类似定理3的证明方法证明之). 用 p 乘式(68)中第一式并在 Q 上积分, 得到

$$- \int_Q u\dot{p} dQ = \int_Q \left[-\frac{\partial q}{\partial r} - \frac{\partial q}{\partial t} - k\Delta q + (\mu + u)q - \beta(r, t, x)q(0, t, x) \right] p dQ.$$

对上式进行分部积分, 并注意到式(68)的后3个条件和式(66)能够推得 $\int_Q u\dot{p} dQ = \int_Q (v - u)pq dQ$. 由此, 式(67)就等价于

$$\int_Q p(u)(1 + q(u))(u - v) dQ \geq 0, \quad \forall v \in U. \quad (69)$$

这样得到本文另一个主要结果:

定理 6 设 $p(v)$ 是由问题(1)~(4)所描述的系统 S 的状态, 性能指标泛函 $J(v)$ 由式(8)给出, 容许控制集合 $\mathcal{U}$ 由式(6)确定. 若 $u \in \mathcal{U}$ 为系统 S 关于问题(9)的最优收获控制, 则 $u \in \mathcal{U}$ 由方程(1)~(4) (其中 $v = u$), 伴随方程(68)及变分不等式(69)所组成的最优性组的联立解 $\{u, p, q\}$ 所确定.

推论 2 最优性必要条件有 Euler-Langrange 组形式(77), (78).

从 $\mathcal{U}$ 的定义式(6)和变分不等式(69)可以容易推得局部性条件 (见文献[14], pp. 53, 54)

$$\int_Q p(u)(1 + q(u))(u - \xi) dQ \geq 0, \quad \forall \xi \in [\gamma_0, \gamma_1]. \quad (70)$$

将上式变形为

$$\int_Q p(u)(1 + q(u))u dQ \geq \int_Q p(u)(1 + q(u))\xi dQ, \quad \forall \xi \in [\gamma_0, \gamma_1].$$

并记 $H_1(r, t, x; u) = p(r, t, x; u)(1 + q(r, t, x; u))$, 则有 u 为最优控制的必要条件的另一表达式

$$\int_Q H_1(r, t, x; u)u dQ = \max_{\gamma_0 \leq \xi \leq \gamma_1} \int_Q H_1(r, t, x; u)\xi dQ. \quad (71)$$

为了得到最优性必要条件的 Euler-Langrange 组形式, 回到式(70). 分几种情形讨论其取值情形:

在式(70)中, 若

$$p(u)(1 + q(u)) > 0, \quad (72)$$

则当

$$u - \xi \geq 0 \text{ 且 } \xi \in [\gamma_0, \gamma_1] \quad (73)$$

时, 式(70)成立. 但是式(73)等价于 $u = \gamma_1$. 因此从(72), (73)推得

$$\begin{cases} \text{在式(70)中若 } p(u)(1 + q(u)) > 0, \\ \text{则当 } u = \gamma_1 \text{ 时, 式(70)成立.} \end{cases} \quad (74)$$

同理有

$$\text{若 } p(u)(1 + q(u)) < 0, \text{ 则 } u = \gamma_0; \quad (75)$$

$$\begin{cases} \text{若 } p(u)(1 + q(u)) = 0, \\ \text{则 } (u - \xi) \text{ 取不定值且 } \xi \in [\gamma_0, \gamma_1], \text{ 即 } u \text{ 取不定值.} \end{cases} \quad (76)$$

综上所述, 从式(74)~(76)有: 若令

$$H = H(r, t, x, u) = p(r, t, x; u)(1 + q(r, t, x; u)), \quad (77)$$

则有

$$u = \begin{cases} \gamma_1, & \text{若 } H > 0, \\ \gamma_0, & \text{若 } H < 0, \\ \text{不定,} & \text{若 } H = 0. \end{cases} \quad (78)$$

参考文献 (References):

[1] GURTIN M E. A system of equations for age-dependent population diffusion [J]. *J of Theoretical Biology*, 1973, 40: 389 - 392.

[2] 付军, 陈任昭. 一类与年龄相关的种群扩散系统解的存在唯一性及对收获控制的连续相依性 [J]. *东北师大学报 (自然科学版)*, 2002, 34(2): 1 - 6.

(FU Jun, CHEN Renzhao. Solution and continuous dependence of solution for harvesting control in a class of population diffusion system [J]. *J of Northeast Normal University (Natural Science Edition)*, 2002, 34(2): 1 - 5.)

- [3] SONG Jian, YU Jingyuan. *Population System Control* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1987.
- [4] 于景元, 郭宝珠, 朱广田. 人口分布参数系统控制理论[M]. 第一版. 武汉: 华中理工大学出版社, 1999.
(YU Jingyuan, GUO Baozhu, ZHU Guangtian. *Control Theory for Population Distributed Parameter System* [M]. 1st edition. Wuhan: Press of Huazhong University of Technology, 1999.)
- [5] SONG Jian, CHEN Renzhao. Dynamic characteristics of nonstationary population systems and computational formulas of several important demographic indices [J]. *Scientia Sinica (Series A)*, 1983, 26(12): 1314 – 1325.
- [6] CHEN Renzhao, GAO Hang. Lyapunov's stability for time-varying population systems [J]. *Science in China (Series A)*, 1990, 33(8): 909 – 919.
- [7] 高夯. 开环与闭环时变人口系统的稳定性[J]. 系统科学与数学, 1991, 11(2): 187 – 192.
(GAO Hang. Stability of the open time-varying population system and closed time-varying population system [J]. *J of Systems Science and Mathematical sciences*, 1991, 11(2): 187 – 192.)
- [8] ANITA S, IANNELI M, KIM M Y, et al. Optimal harvesting for periodic age-dependent population dynamics [J]. *SIAM J of Applied Mathematics*, 1998, 58(5): 1648 – 1666.
- [9] GURTIN M E, MURPHY L F. On the optimal harvesting of age-structured populations: some simple models [J]. *Mathematical Biosciences*, 1981, 55: 115 – 136.
- [10] MURPHY L F, SMITH S J. Optimal harvesting of an age-structured population [J]. *J of Mathematical Biology*, 1990, 29: 77 – 90.
- [11] 李健全, 陈任昭. 时变种群扩散系统最优生育率控制的非线性问题[J]. 应用数学学报, 2002, 25(4): 626 – 441.
(LI Jianquan, CHEN Renzhao. A nonlinear problem of the optimal fertility rate control in time-varying population system with diffusion [J]. *Acta Mathematica Applicatae Sinica*, 2002, 25(4): 626 – 441.)
- [12] 陈任昭, 张丹松, 李健全. 具有空间扩散的种群系统解的存在唯一性与边界控制[J]. 系统科学与数学, 2002, 22(1): 1 – 13.
(CHEN Renzhao, ZHANG Dansong, LI Jianquan. Existence and uniqueness of the solution and boundary control for population system with spatial diffusion [J]. *J of Systems Science and Mathematical Sciences*, 2002, 22(1): 1 – 13.)
- [13] 付军, 陈任昭. 年龄相关的种群扩散系统的最优分布控制[J]. 数学的实践与认识, 2003, 33(3): 93 – 98.
(FU Jun, CHEN Renzhao. Optimal distributed control for age dependent population diffusion system [J]. *Mathematics in Practice and Theory*, 2003, 33(3): 93 – 98.)
- [14] LIONS J L. *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1971.
- [15] LANGLAIS M. Large time behavior in nonlinear age-dependent population dynamics problem with spatial diffusion [J]. *J of Mathematical Biology*, 1988, 26: 319 – 346.
- [16] LANGLAIS M A. Non-linear problem in age-dependent population diffusion [J]. *SIAM on Mathematical Analysis*, 1985, 16(3): 510 – 529.
- [17] LIONS J L, MAGENES E. *Non-homogeneous Boundary Value Problems and Application (I)* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1972.
- [18] LIONS J L. *Operational Differential Equations and Boundary Value Problems* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1970: 60 – 61.
- [19] ADAMS R A. *Sobolev Spaces* [M]. New York: Academic Press, 1975: 172 – 173.
- [20] BERGER M S. *Nonlinearity and Functional Analysis* [M]. New York: Academic Press, 1977.

作者简介:

付 军 (1963—), 女, 吉林师范大学数学学院教授, 博士, 2003年毕业于中国航天科技集团公司北京信息控制研究所, 获博士学位, 研究领域为分布参数系统控制, E-mail: jlfj8080@yahoo.com.cn;

李健全 (1969—), 男, 博士, 1992年和1996年毕业于东北师范大学数学系, 分别获学士学位和硕士学位, 2001年毕业于中国航天科技集团公司北京信息控制研究所, 获博士学位, 研究领域为分布参数系统控制, E-mail: lijq@sctu.edu.cn;

陈任昭 (1933—), 男, 教授, 北京信息控制研究所研究员(兼)和博士研究生导师, 1962年毕业于东北师大微分方程研究生班, 1983年由国家教育部审批从讲师破格晋升为教授, 1993年被国务院学位委员会审批为博士研究生导师, 主要从事分布参数系统控制理论的研究, 已公开发表学术论文100余篇, E-mail: jdipeng@sina.com.