

线性时滞系统的时滞相关鲁棒控制

吴敏¹, 张先明^{1,2}, 余锦华³

(1. 中南大学 信息科学与工程学院, 湖南 长沙 410083; 2. 中南大学 数学科学与计算技术学院, 湖南 长沙 410083;

3. 东京工科大学 工学部, 日本 东京 192-0982)

摘要: 讨论了同时具有输入时滞与状态时滞的线性系统的时滞相关鲁棒控制问题. 将矩阵分解思想应用于线性时滞系统的控制综合, 借助于积分不等式, 利用 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法, 得到了系统经无记忆状态反馈后可镇定的、基于 LMI 的时滞相关条件. 既不要对原系统进行模型变换, 也不要对交叉项进行界定. 最后的实例说明了本文方法的有效性.

关键词: 输入时滞; 状态时滞; 时滞相关; 鲁棒控制; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP13

文献标识码: A

Delay-dependent robust control for linear time-delay uncertain systems

WU Min¹, ZHANG Xian-ming^{1,2}, SHE Jin-hua³

(1. School of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha Hunan 410083, China;

2. School of Mathematical Science and Computing Technology, Central South University, Changsha Hunan 410083, China;

3. School of Bionics, Tokyo University of Technology, Tokyo 192-0982, Japan)

Abstract: The delay-dependent robust control for uncertain systems with both state and input delays is discussed. By introducing the matrix decomposition idea into the synthesis problem, incorporating with the integral inequality and Lyapunov-Krasovskii functional method, a new delay-dependent condition based on linear matrix inequality is obtained which guarantees that the system is asymptotically stable via memoryless controller. Neither the model transformation nor the bounding cross-terms is employed. Some numerical examples demonstrate that the proposed method is efficient.

Key words: input delay; state delay; delay-dependent; robust control; linear matrix inequality(LMI)

1 引言(Introduction)

线性时滞系统的分析与综合近年来受到广泛关注. 最近 Richard^[1]较系统地总结了这方面的最新研究成果, 同时提出了 4 个 Open Problems, 其中之一为: 如何有效地控制如下线性时滞系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-h) + Bu(t) + B_1u(t-h). \quad (1)$$

当 $A_1 = 0$ 时, 通常利用 Arstein 模型退化方法(Arstein model reduction method)^[2], 将原系统变换成无时滞的系统, 从而有效地解决了这类系统的控制问题, 但是这一方法得到的控制器具有分布时滞, 难于实现.

当 $A_1 \neq 0$ 时, 文献[3~5]用 Riccati 不等式方法得到了无记忆控制器, 保证了系统在该控制器作用下的闭环系统是渐近稳定的, 但该条件不依赖于时滞大小. 据作者所知, 当 $A_1 \neq 0$ 时系统(1)的时滞相关综合问题的研究很少报道.

本文借助于文献[6]建立的积分不等式, 引入矩阵分解思想, 重新讨论了系统(1)的时滞相关稳定与镇定问题, 利用 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法, 获得了系统经无记忆状态反馈后可镇定的、基于 LMI 的时滞相关充分条件, 这一条件可用来讨论只含有状态时滞、或只含有输入时滞、或同时含有输入时滞与状态时滞的线性系统的时滞相关稳定与镇定问题, 具有一般性, 同时得到的控制器为无记忆控制器, 结构简单、易于实现.

全文沿用如下记号: A^T 表示矩阵 A 的转置的逆; $P = P^T > 0$ 表示对称正定阵; $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times n}$ 分别表示实数域上的 n 维向量空间与 $n \times n$ 矩阵空间; I 表示具有适当维数的单位矩阵; $\text{diag}\{A, B, \dots, C\}$ 表示块对角矩阵; 矩阵中的“*”表示对称矩阵的对称项.

2 问题描述(Problem statements)

考虑如下同时具有状态时滞及输入时滞的不确

定线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \\ (A + \Delta A(t))x(t) + (A_1 + \Delta A_1(t))x(t-h(t)) + \\ (B + \Delta B(t))u(t) + B_1 u(t-h(t)), \\ x(t) = \phi(t), \forall t \in [-\bar{h}, 0]. \end{cases} \quad (2)$$

式中: $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 为系统状态, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ 为控制输入, $\phi(t)$ 为初始条件, $h(t)$ 为时变时滞, 满足

$$0 \leq h(t) \leq \bar{h} < \infty, \dot{h}(t) \leq d < 1. \quad (3)$$

A, A_1, B, B_1 为具有适当维数的常数实矩阵; $\Delta A(t), \Delta A_1(t), \Delta B(t)$ 为实矩阵函数, 表示时变参数不确定性, 具有以下形式

$$[\Delta A(t) \quad \Delta A_1(t) \quad \Delta B(t)] = DF(t)[E \quad E_1 \quad E_b]. \quad (4)$$

其中: D, E_1, E_b 为已知的常数实矩阵, 时变未知实矩阵 $F(t)$ 满足 $F^T(t)F(t) \leq I, \forall t$.

为方便讨论, 引入如下无记忆状态反馈

$$u(t) = Kx(t). \quad (5)$$

本文主要讨论不确定系统(2)在形如(5)的控制器作用下可鲁棒镇定的时滞相关充分条件. 为此, 引入如下引理.

引理 1^[6] (积分不等式) 设 $x(t)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上具有连续一阶导数的向量函数, 则对 $\forall M_1, M_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}, \forall R = R^T > 0, \forall h(t) \geq 0$, 满足不等式

$$\begin{aligned} & - \int_{t-h(t)}^t \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds \leq \\ & \xi^T(t) \begin{bmatrix} M_1^T + M_1 & -M_1^T + M_2 \\ * & -M_2^T - M_2 \end{bmatrix} \xi(t) + \\ & h(t) \xi^T(t) \begin{bmatrix} M_1^T \\ M_2^T \end{bmatrix} R^{-1} [M_1 \quad M_2] \xi(t). \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $\xi^T(t) = [x^T(t) \quad x^T(t-h(t))]$.

引理 2^[7] 给定矩阵 $Q = Q^T$, 以及适当维数的矩阵 H, L , 则

$$Q + HFL + L^T F^T H^T < 0.$$

对任意满足 $F^T F \leq I$ 的 F 成立的充要条件是存在 $\epsilon > 0$, 使得

$$Q + \epsilon^{-1} H H^T + \epsilon L^T L < 0.$$

3 主要结果(Main results)

这一节, 陈述本文的主要结论. 首先利用引理 1 讨论系统(2)的标称系统(即 $F(t) = 0$)经无记忆控制器(5)作用后渐近稳定的时滞相关充分条件. 此时闭环系统为

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + (A_1 + B_1 K)x(t-h(t)). \quad (7)$$

为得到系统(7)渐近稳定的基于 LMI 的时滞相关充分条件, 同时解出控制器 K , 首先对系统(7)稍作整理. 引入文献[8,9]的思想, 将状态时滞矩阵 A_1 作如下分解: $A_1 = A_{11} + A_{12}$, 其中 A_{11}, A_{12} 为常数实矩阵. 于是系统(7)可表示为

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & (A + BK)x(t) + A_{11}x(t-h(t)) + \\ & (A_{12} + B_1 K)x(t-h(t)). \end{aligned} \quad (8)$$

记 $A_K = A + BK, A_{1K} = A_{12} + B_1 K$, 然后令

$$\xi^T(t) = [x^T(t) \quad x^T(t-h(t)) \quad A_{1K}x(t-h(t))]^T, \quad (9)$$

重写式(8), 得到

$$\dot{x}(t) = [A_K \quad A_{11} \quad I] \xi(t). \quad (10)$$

利用引理 1, 得到如下定理:

定理 1 给定常量 $\bar{h} > 0, d < 1$. 如果存在 $X > 0, \bar{R} > 0, \bar{Q} > 0$, 以及 $M, Z \in \mathbb{R}^{n \times n}, Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 使得以下 LMI 成立:

$$\begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \bar{Q} & \rho_{14} & 0 & \rho_{16} \\ * & \rho_{22} & 0 & \rho_{24} & \bar{h}\bar{R} & 0 \\ * & * & \rho_{33} & \bar{h}I & 0 & 0 \\ * & * & * & -\bar{h}\bar{R} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{h}\bar{R} & 0 \\ * & * & * & * & * & -\bar{Q} \end{bmatrix} < 0, \quad (11)$$

其中

$$\begin{cases} \rho_{11} = AX + XA^T + A_{11}Z + Z^T A_{11}^T + BY + Y^T B^T, \\ \rho_{12} = X + A_{11}M - Z^T, \quad \rho_{16} = XA_{12}^T + Y^T B_1^T, \\ \rho_{14} = \bar{h}(XA^T + Y^T B^T + Z^T A_{11}^T), \\ \rho_{22} = -M - M^T, \quad \rho_{24} = \bar{h}(M^T A_{11}^T), \\ \rho_{33} = -(1-d)\bar{Q}, \end{cases} \quad (12)$$

则闭环系统(7)渐近稳定, 并且 $K = YX^{-1}$.

证 取 Lyapunov-Krasovskii 泛函

$$\begin{aligned} V(t) = & x^T(t)Px(t) + \int_{-\bar{h}}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)dsd\theta + \\ & \int_{t-h(t)}^t x^T(s)A_{1K}^T Q A_{1K} x(s)ds. \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $P > 0, R > 0, Q > 0$. 则 $V(t)$ 沿系统(7)的轨线的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & \bar{h}\dot{x}^T(t)R\dot{x}(t) + x^T(t)A_{1K}^T Q A_{1K} x(t) - \\ & (1-\dot{h}(t))x^T(t-h(t))A_{1K}^T Q A_{1K} x(t-h(t)) - \\ & \int_{t-h}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds + 2x^T(t)P\dot{x}(t). \end{aligned} \quad (14)$$

由式(3)知 $h(t) \leq \bar{h}$, 于是有

$$-\int_{t-\bar{h}}^t \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds \leq -\int_{t-h(t)}^t \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds. \quad (15)$$

对式(15)的右边应用引理1,并代入式(14),然后利用式(9)定义的 $\zeta(t)$ 及式(10),得到

$$\dot{V}(t) \leq \zeta^T(t) [\Sigma + \bar{h} \Gamma_1^T R \Gamma_1 + \bar{h} \Gamma_2^T R \Gamma_2] \zeta(t).$$

其中

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \varphi_{11} + A_{1K}^T Q A_{1K} & \varphi_{12} & P \\ * & \varphi_{22} & 0 \\ * & * & \varphi_{33} \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_1 = [A_K \quad A_{11} \quad I], \Gamma_2 = [M_1 \quad M_2 \quad 0],$$

$$\varphi_{11} = P A_K + A_K^T P + M_1^T + M_1, \varphi_{12} = P A_{11} - M_1^T + M_2,$$

$$\varphi_{22} = -M_2^T - M_2, \varphi_{33} = -(1-d)Q.$$

由 Schur 补引理,如果如下非线性矩阵不等式成立:

$$\Xi = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & P & \bar{h} A_K^T & \bar{h} M_1^T & A_{1K}^T \\ * & \varphi_{22} & 0 & \bar{h} A_{11}^T & \bar{h} M_2^T & 0 \\ * & * & \varphi_{33} & \bar{h} I & 0 & 0 \\ * & * & * & -\bar{h} R^{-1} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{h} R & 0 \\ * & * & * & * & * & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad (16)$$

有 $\dot{V}(t) < 0$, 于是由 Lyapunov-Krasovskii 稳定性定理,知系统(7)是渐近稳定的.

为从非线性矩阵不等式(16)解出控制器 K , 定义

$$W = \begin{bmatrix} P & 0 \\ M_1 & M_2 \end{bmatrix}, \bar{A} = \begin{bmatrix} A_K & A_{11} \\ I & -I \end{bmatrix}.$$

如果(16)成立,则 M_2 非奇异,从而 W 可逆,定义

$$W^{-1} = \begin{bmatrix} X & 0 \\ Z & M \end{bmatrix},$$

$$T = \text{diag}\{W^{-1}, Q^{-1}, I, R^{-1}, I\},$$

对式(16)左乘 T^T , 右乘 T , 然后令 $Y = KX$, $\bar{Q} = Q^{-1}$, $\bar{R} = R^{-1}$, 如果 LMI(11)成立, 则 $T^T \Xi T < 0$, 从而 $\Xi < 0$, 于是闭环系统(7)渐近稳定, 并且控制器增益为 $K = YX^{-1}$. 证毕.

注1 定理1给出了系统(2) ($F(t) = 0$) 经无记忆状态反馈后可镇定的时滞相关条件, 这一条件不仅适用于 $A_1 = 0$, 也适用于 $A_1 \neq 0$ 的系统, 因而具有一般性. 同时, 当 $B_1 = 0$ 时, 后面的实例也表明定理1较文献[10, 11]的相应结论具有较小的保守性.

注2 定理1的有效性在于时滞矩阵 A_1 的分解. 一种简单而有效的分解方法是: 在 LMI(11)中令 $Z = M = X$, 然

后引入新的矩阵变量 $L = A_{12}X$. 如果 LMI(11)有解, 则系统(7)渐近稳定, 于是得到 A_1 的一种分解 $A_1 = A_{11} + A_{12}$, 其中 $A_{12} = LX^{-1}$.

下面, 讨论不确定系统(2)的时滞相关鲁棒镇定问题. 利用定理1及引理2得到

定理2 给定常量 $\bar{h} > 0, d < 1$. 如果存在 $X > 0, \bar{R} > 0, \bar{Q} > 0, M, Z \in \mathbb{R}^{n \times n}, Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 及 $\epsilon > 0$ 使得 LMI 成立:

$$\begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \bar{Q} & \rho_{14} & 0 & \rho_{16} & \epsilon D & \rho_{18} \\ * & \rho_{22} & 0 & \rho_{24} & \bar{h} \bar{R} & 0 & 0 & \rho_{28} \\ * & * & \rho_{33} & \bar{h} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\bar{h} \bar{R} & 0 & 0 & \epsilon \bar{h} D & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{h} \bar{R} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\bar{Q} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\epsilon I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\epsilon I \end{bmatrix} < 0, \quad (17)$$

其中 $\rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{14}, \rho_{22}, \rho_{24}, \rho_{33}$ 定义于式(12),

$$\begin{cases} \rho_{18} = X E^T + Z^T E_1^T + Y^T E_b^T, \\ \rho_{28} = M^T E_1^T, \end{cases}$$

则系统(2)是可鲁棒镇定的, 并且控制器增益 $K = YX^{-1}$.

证 由定理1及引理2即可证得, 在此从略.

4 数值例子(Numerical examples)

例1 考虑系统(2)^[12, 13], 其中

$$\begin{cases} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.25 & -3 \end{bmatrix}, \Delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ v & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ |v| \leq \gamma, A_1 = \Delta A_1 = 0, B = \Delta B_1 = 0. \end{cases} \quad (18)$$

当 $\gamma = 10$ 时, 文献[12, 13] 获得了可镇定系统(18)的鲁棒控制器, 但其控制器具有分布时滞, 难于实现. 利用本文方法, 将 ΔA 表示为

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma \end{bmatrix} F(t) [1 \quad 0], F^T(t) F(t) \leq I.$$

对 $A_1 = 0$ 作如下分解: $A_1 = A_{11} + A_{12}$, 其中

$$A_{11} = \begin{bmatrix} -1.4 & -0.2 \\ -7.5 & -2.8 \end{bmatrix}, A_{12} = -A_{11}.$$

解 LMI(17), 得到镇定系统(18)的鲁棒控制器为

$$u(t) = [-16.0063 \quad -4.0141] x(t).$$

例2 考虑系统(2), 其中

$$\begin{cases} A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} -2 & -0.5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, B_1 = 0, \\ D = 0.2I, E = I, E_1 = 0, E_b = 0, 0 \leq h \leq \bar{h}. \end{cases} \quad (19)$$

文献[6, 10, 11]讨论了系统(19)可镇定的时滞上界,得到的结果列于表1.应用本文方法,对 A_1 作如下分解: $A_1 = A_{11} + A_{12}$,其中

$$A_{11} = \begin{bmatrix} -0.8 & 0 \\ 0 & -0.8 \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} -1.2 & -0.5 \\ 0 & -0.2 \end{bmatrix}.$$

利用定理2,得到的结果也列于表1.

表1 系统(19)可鲁棒镇定的时滞界 $\bar{h}$

Table 1 Achieved maximum delay stability bounds $\bar{h}$, for system (19)

方 法	$\bar{h}$
文献[11]定理2	0.45
文献[10]定理1	0.5865
文献[6]定理3.2	0.6352
本文定理2	0.9498

可见,利用本文方法得到的时滞上界较文献[6, 10, 11]明显增大,因而具有较小的保守性.

5 结论(Conclusion)

本文将矩阵分解思想应用于时滞系统的控制综合,结合积分不等式,讨论了同时具输入时滞与状态时滞线性系统的稳定化问题,获得了系统经无记忆状态反馈后渐近稳定的、基于LMI的时滞相关条件.数值例子表明了本文方法的有效性.

参考文献(References):

- [1] RICHARD J. Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems [J]. *Automatica*, 2003, 39(10): 1667 - 1694.
- [2] ARSTEIN Z. Linear systems with delayed controls: A reduction [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1982, 27(4): 869 - 879.
- [3] CHOI H H, CHUNG M J. Memoryless stabilization of uncertain dynamic systems with time-varying delayed state and control [J]. *Automatica*, 1995, 31(9): 1349 - 1351.
- [4] KIM J H, JEUNG E T, PARK H B. Robust control for parameter un-

certain delay systems in state and control input [J]. *Automatica*, 1996, 32(9): 1337 - 1339.

- [5] HAN Q L, MEHDI D. Comments on "Robust control for parameter uncertain delay systems in state and control input" [J]. *Automatica*, 1998, 34(12): 1665 - 1666.
- [6] 张先明, 吴敏, 何勇. 不确定多时变时滞系统的时滞相关鲁棒控制[J]. 控制与决策, 2004, 19(5): 496 - 500.
(ZHANG Xianming, WU Min, HE Yong. Delay dependent robust control for linear systems with multiple time-varying delays and uncertainties [J]. *Control and Decision*, 2004, 19(5): 496 - 500.)
- [7] XIE L H. Output feedback H-infinite control of systems with parameter uncertainty [J]. *Int J Control*, 1996, 63(3): 741 - 750.
- [8] HAN Q L. Stability criteria for a class of linear neutral systems with time-varying discrete and distributed delays [J]. *IMA J of Mathematical Control and Information*, 2003, 20(2): 371 - 386.
- [9] GOUBET-BATHOLOMEUS A, DAMBRINE M, RICHARD J P. Stability of perturbed systems with time-varying delays [J]. *Systems & Control Letters*, 1997, 31(3): 155 - 163.
- [10] FRIDMAN E, SHAKED U. An improved stabilization method for linear time-delay systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 47(11): 1931 - 1937.
- [11] MOON Y S, PARK P G, KWON W H, et al. Delay-dependent robust stabilization of uncertain state-delayed systems [J]. *Int J Control*, 2001, 74(14): 1447 - 1455.
- [12] MOON Y S, PARK P, KWON W H. Robust stabilization of uncertain input-delay systems using reduction method [J]. *Automatica*, 2001, 37(2): 307 - 312.
- [13] YUE D. Robust stabilization of uncertain systems with unknown input delay [J]. *Automatica*, 2004, 40(2): 331 - 336.

作者简介:

吴 敏 (1963—)男, 博士生导师, 主要研究方向为鲁棒控制、智能控制和过程控制, E-mail: min@mail.csu.edu.cn;

张先明 (1968—)男, 博士研究生, 主要研究方向为时滞系统、广义系统的鲁棒控制, E-mail: zhangxmy@yahoo.com.cn;

余锦华 (1963—)男, 副教授, 主要研究方向为鲁棒控制、智能控制和过程控制, E-mail: she@cc.teu.ac.jp.