

离散广义区间系统的保成本控制

陈芳信, 汪秉文, 姜 新

(华中科技大学 控制科学与工程系, 湖北 武汉 430074)

摘要: 分析了离散广义区间系统的保成本控制问题. 当系统参数在某一确定区间变化时, 控制器能保证闭环系统稳定和一定的线性二次型性能指标上界. 基于 Lyapunov 稳定性理论, 该控制器的设计可转化为线性矩阵不等式的可解性问题. 数值仿真也验证了所给方法的有效性.

关键词: 广义区间系统; 保成本控制; Schur 补; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Guaranteed cost control for the discrete time singular interval systems

CHEN Fang-xin, WANG Bing-wen, JIANG Xin

(Department of Control Science & Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan Hubei 430074, China)

Abstract: The problem of guaranteed cost control for the discrete-time singular interval systems was analyzed. When the system parameters vary within a certain interval matrices, the stability of closed-loop system and a certain upper bound of the linear quadratic cost function are both guaranteed by the controller. Based on Lyapunov stability theory, the design of controller can be transformed to a linear matrix inequality (LMI) feasibility problem. The numerical simulation result was provided to demonstrate the effectiveness of the presented method.

Key words: singular interval systems; guaranteed-cost control; Schur complement; linear matrix inequality (LMI)

1 引言 (Introduction)

近年来, 由于对参数不确定性系统鲁棒稳定性检验的需要, 使得广义区间系统的研究引起了众多学者的关注. 文献[1]对广义系统给出了一些关于可控、可观测、稳定性等方面的结果; 文献[2]在不假设系统为正则的情况下, 给出一类离散广义区间系统的可正定充分条件. 然而在实际控制系统设计中, 不仅要求控制系统鲁棒稳定, 而且要求闭环系统满足一定的性能指标要求.

不确定系统的保成本控制问题最早由 Chang 和 Peng^[4]提出. 近几年, 随着不确定系统鲁棒控制研究所取得的进展, 不确定系统的保成本控制问题得到了广泛的研究^[3]. 然而, 迄今为止, 这方面的研究仅局限于正常系统. 基于这个问题, 本文借鉴 H_2/H_∞ 的思想, 讨论了一类离散广义区间系统的保成本控制问题. 基于 Lyapunov 稳定理论构造了状态反馈控制器, 当系统参数在某一确定区间变化时, 该控制器能确保闭环系统稳定和一定的线性二次型性能指标的上界, 所得结论均以线性矩阵不等式的形式存在,

应用 MATLAB 中的 LMI 工具箱, 可以方便地求解出其保成本控制器.

2 问题描述 (Problem fomulation)

考虑如下离散广义区间系统

$$X(k+1) = AX(k) + Bu(k). \quad (1)$$

其中: $X(k) \subseteq \mathbb{R}^{n \times 1}$, $u(k) \subseteq \mathbb{R}^{1 \times 1}$ 分别是系统的状态及控制输入; A, B 是适当维数的矩阵, 其元素是不确定的, 也可以是时变的, 但属于某一确定的区间.

设 $A^m = [a_{ij}^m] \subseteq \mathbb{R}^{n \times n}$, $A^M = [a_{ij}^M] \subseteq \mathbb{R}^{n \times n}$, $B^m = [b_i^m] \subseteq \mathbb{R}^{n \times 1}$, $B^M = [b_i^M] \subseteq \mathbb{R}^{n \times 1}$; 其中 $a_{ij}^m \leq a_{ij} \leq a_{ij}^M$, $b_i^m \leq b_i \leq b_i^M$, $1 \leq i, j \leq n$, 且 $a_{ij}^m, a_{ij}^M, b_i^m, b_i^M$ 为已知的实系数. a_{ij}, b_i 分别为 A, B 对应的元素. 取

$$A_0 = \frac{A^m + A^M}{2}, \quad B_0 = \frac{B^m + B^M}{2},$$

$$\Delta A_0 = \frac{A^M - A^m}{2}, \quad \Delta B_0 = \frac{B^M - B^m}{2},$$

则系统(1)可表示成如下矩阵凸多面体:

$$X(k+1) = (A_0 + \sum_{i,j=1}^n e_i f_{ij} e_j^T) X(k) + (B_0 + \sum_{i=1}^n e_i d_i) u(k). \quad (2)$$

其中 $e_i \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 为第 i 个元素为 1, 其余为 0 的单位列向量.

对系统(1)定义如下的成本函数

$$J = \sum_{k=1}^{\infty} X^T(k) Q X(k) + u^T(k) R u(k). \quad (3)$$

其中 Q, R 为给定的对称正定阵.

本文的目的是对系统(1)式和给定成本函数(3)式, 给出存在成本控制的条件和相应的保成本控制律的设计方法.

3 主要结果(Main results)

定理 1 对系统(1)和成本函数(3), 若存在一个矩阵 $K \subseteq \mathbb{R}^{1 \times n}$ 和一个正定对称矩阵 $P \subseteq \mathbb{R}^{n \times n}$, 使得下列不等式

$$[A + BK]^T P [A + BK] - P + Q + K^T R K < 0 \quad (4)$$

成立, 则控制器

$$u(k) = KX(k) \quad (5)$$

为系统(1)的一个在 H_{∞} 范数下具有成本矩阵 P 的保成本控制律. 且其闭环系统 $X(k+1) = [A + BK]X(k)$ 是二次稳定的, 相应的成本函数值满足

$$J \leq X_0^T P X_0. \quad (6)$$

其中 $X_0 \subseteq \mathbb{R}^{n \times 1}$ 是系统(1)的初始状态.

证 若存在矩阵 $K \subseteq \mathbb{R}^{1 \times n}$ 和一个正定对称矩

阵 $P \subseteq \mathbb{R}^{n \times n}$, 使得定理的条件成立, 考虑 Lyapunov 泛函 $V(k) = X^T(k) P X(k)$ 有

$$\begin{aligned} \Delta V(k+1) &= V(k+1) - V(k) = \\ &X^T(k+1) P X(k+1) - X^T(k) P X(k) = \\ &X^T(k) [A + BK]^T P [A + \\ &BK] X(k) - X^T(k) P X(k) \leq \\ &- X^T(k) [Q + K^T R K] X(k) \leq 0, \end{aligned} \quad (7)$$

故闭环系统是二次稳定的. 即当 $k \rightarrow \infty$, 有 $X(k) \rightarrow 0$. 同时, 由式(7)有

$$V(k+1) - V(k) \leq - X^T(k) Q X(k) - u^T(k) R u(k).$$

对上式从 0 到 ∞ 进行求和, 则得

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} X^T(k) Q X(k) + u^T(k) R u(k) &\leq \\ X_0^T P X_0 - X_1^T P X_1 + X_1^T P X_1 - X_2^T P X_2 + \dots, \end{aligned}$$

即

$$J \leq X_0^T P X_0. \quad (8)$$

从而定理得证.

以上定理表明, 该保成本控制不仅使闭环系统是 Lyapunov 稳定的, 而且使得成本函数(3)不超过某个确定的上界. 若将具有 H_{∞} 的保成本控制器的综合问题转化为线性矩阵不等式(LMI)的可解性问题, 可得到如下主要结果:

定理 2 给定一类离散广义区间系统(1)和成本函数(3), 如果存在正定对称矩阵 $P \subseteq \mathbb{R}^{n \times n}$ 、矩阵 $K \subseteq \mathbb{R}^{1 \times n}$ 以及 $\lambda_{ij} > 0, \lambda_i > 0$ ($1 \leq i, j \leq n$) 使下列 LMI 可解, 则存在具有 H_{∞} 范数下的保成本控制器 $u(k) = KX(k)$, 且 $J \leq X_0^T P X_0$.

$$\begin{pmatrix} -P^{-1} & A_0 + B_0 K & e_1 & e_1 & \cdots & e_1 & \cdots & e_n \\ (A_0 + B_0 K)^T & K^T(R + \sum_{i=1}^n \lambda_i \Delta b_i^2)K + \sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij} \Delta a_{ij}^2 e_j e_j^T - P + Q & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \vdots \\ e_1 & 0 & -\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & 0 & 0 & -\lambda_{11} & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_{11} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ e_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_{nn} \end{pmatrix} \leq 0. \quad (9)$$

其中 $\Delta b_i, \Delta a_{ij}$ 分别为 $\Delta A, \Delta B$ 之对应元素.

证 若存在正定对称矩阵 $P \subseteq \mathbb{R}^{n \times n}$ 、矩阵 $K \subseteq \mathbb{R}^{1 \times n}$ 使式(9)成立. 将式(2)代入式(4), 由矩阵的 Schur 补^[5], 则式(4)变为

$$\begin{pmatrix} -P^{-1} & A_0 + B_0 K \\ (A_0 + B_0 K)^T & -P + Q + K^T R K \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \sum_{i,j=1}^n e_i f_{ij} e_j^T \\ \sum_{i,j=1}^n e_j f_{ij} e_i^T & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sum_{i=1}^n e_i d_i K \\ \sum_{i=1}^n K^T d_i e_i^T & 0 \end{pmatrix} \leq 0. \quad (10)$$

考虑第2项,利用文献[5]中引理1,则存在 $\lambda_{ij} > 0$, 使下式成立:

$$\begin{pmatrix} 0 & \sum_{i,j=1}^n e_i f_{ij} e_j^T \\ \sum_{i,j=1}^n e_j f_{ij} e_i^T & 0 \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^n \left[\begin{pmatrix} e_i \\ 0 \end{pmatrix} (0 \quad f_{ij} e_j^T) + \begin{pmatrix} 0 \\ f_{ij} e_j \end{pmatrix} (e_i^T \quad 0) \right] \leq \sum_{i,j=1}^n \left[\lambda_{ij} \Delta a_{ij}^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e_j e_j^T \end{pmatrix} + \frac{1}{\lambda_{ij}} \begin{pmatrix} e_i \\ 0 \end{pmatrix} (e_i^T \quad 0) \right]. \quad (11)$$

同理,考虑第3项,则存在 $\lambda_i > 0$ 使得下式成立.

$$\begin{pmatrix} 0 & \sum_{i,j=1}^n e_i f_{ij} e_j^T \\ \sum_{i,j=1}^n e_j f_{ij} e_i^T & 0 \end{pmatrix} \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \Delta b_i^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K^T K \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \begin{pmatrix} e_i \\ 0 \end{pmatrix} (e_i^T \quad 0). \quad (12)$$

应用 Schur 补,并将式(11),(12)代入式(10),即可证得式(9).

很明显定理2给出了其保成本控制存在的充分条件,但并不能保证成本函数为最小,对系统(1)和性能指标(3),根据文献[4]中的引理2.1,在实际应用时,离散广义区间系统(1)的保成本控制问题转化为如下的优化问题:

$$\begin{aligned} & \min(J) \\ & \begin{cases} \begin{bmatrix} -J & X_0^T \\ X_0 & -P^{-1} \end{bmatrix} < 0, \\ \text{不等式(9)}. \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

4 仿真算例(Simulation example)

这里引用文献[6]的例子,其系统参数为

$$A = \begin{bmatrix} 1.2 + 0.1p & 0.1 \\ 0.1 & 0.6(1 + p^2) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \pm 0.01 \end{bmatrix}.$$

其中 p 在区间 $[-2, 2]$ 之间变化,选取系统保成本函数(3)的加权矩阵, $Q = I, R = 1$ 则相应地

$$A^m = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}, \quad A^M = \begin{pmatrix} 1.4 & 0.1 \\ 0.1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1.2 & 0.1 \\ 0.1 & 1.8 \end{pmatrix}, \quad \Delta A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 1.2 \end{pmatrix},$$

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B^m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.99 \end{pmatrix},$$

$$B^M = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.01 \end{pmatrix}, \quad \Delta B_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.01 \end{pmatrix}.$$

利用 MATLAB 软件中 LMI 工具包中的 mincx 命令求解式(13),可得

$$P = \begin{bmatrix} 132.4523 & 16.5194 \\ 16.5194 & 5.5612 \end{bmatrix},$$

$$K = [-3.1060 \quad -1.7774].$$

当 $p = 0$ 时,则 $A = \begin{bmatrix} 1.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 \end{bmatrix}$, 取 $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 其系统控制曲线如图1所示.

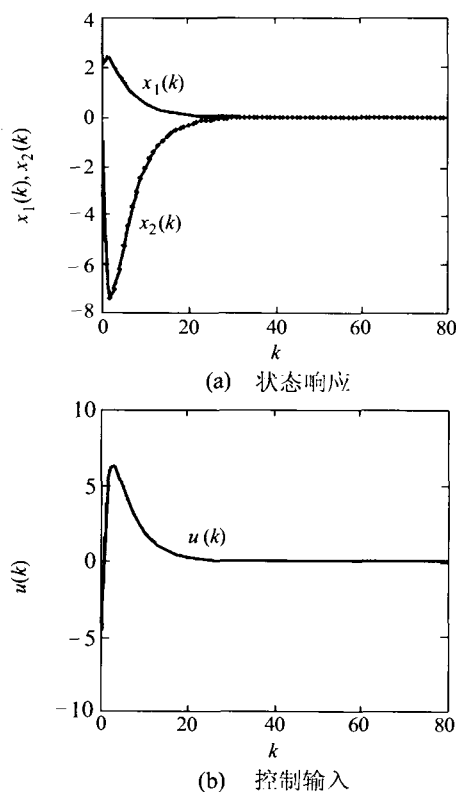


图1 系统响应曲线

Fig. 1 Response of the system

很明显,本文所设计的保成本控制律具有较好的动态性能和稳定性能.

5 结论(Conclusion)

本文讨论了具有 H_∞ 范数下离散广义区间系统的保成本控制,通过构造一类参数相关的李雅普诺夫函数,利用矩阵不等式得到了使其二次型成本函数有确定上界的反馈控制律存在的充分条件,不仅能保证系统稳定.同时将问题转化为寻求一个参数矩阵不等式的正定解,利用 MATLAB 软件中 LMI 工具包中的 mincx 命令可以方便求解.仿真结果表明所获得的状态反馈控制律的有效性.

参考文献(References):

- [1] 李晓艳, 蒋威. 广义区间系统可控和可观测的充分条件[J]. 工科数学, 2002, 18(4): 5-8.
(LI Xiaoyan, JIANG Wei. Sufficient conditions for the controllability and observability of singular systems with interval plants [J]. *J of Mathematics for Technology*, 2002, 18(4): 5-8.)
- [2] 苏晓明, 张庆灵. 广义区间系统的正则性与脉冲性分析[J]. 沈阳工业大学学报, 2001, 23(6): 504-507.
(SU Xiaoming, ZHANG Qingling. On regularity and impulse analysis of singular interval systems [J]. *J of Shenyang University of Technology*, 2001, 23(6): 504-507.)
- [3] 徐胜元, 杨成梧. 广义区间动力系统的稳定性分析[J]. 控制理论与应用, 2000, 17(2): 251-254.
(XU Shenyuan, YANG Chengwu. On stability analysis of generalized interval dynamic systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2000, 17(2): 251-254.)
- [4] Zhang, MSL., Peng, TKC. Adaptive guaranteed cost control of systems with uncertain parameters [J]. *IEEE Trans Automatic Control*, 1972, 17(4): 474-483.
- [5] LI Yu. Optimal guaranteed cost control of discrete-time uncertain systems with both state and input delays [J]. *J of the Franklin Institute*, 2001, 338(1): 1513-1518.
- [6] SAAJ M C. A new algorithm for discrete-time sliding-mode control using fast output sampling feedback [J]. *IEEE Trans on Industrial Electronics*, 2002, 49(3): 518-523.

作者简介:

陈芳信 (1964—), 男, 博士研究生, 主要研究方向为人工智能、化工过程控制, E-mail: chenchang0115@163.com;

汪秉文 (1946—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为控制理论与应用、计算机集成系统、人工智能及其应用;

姜新 (1973—), 男, 博士, 在华中科技大学图象所做博士后研究工作, 主要研究方向为嵌入式系统的研究和开发.