

基于 LMI 的输出反馈鲁棒完整性控制器设计

宗 臻, 王诗宓

(清华大学 自动化系, 北京 100084)

摘要: 完整性是容错控制的一个重要研究方向, 不确定系统的鲁棒完整性研究具有很强的实际意义. 本文基于 $[0, \sigma]$ 故障模型和线性矩阵不等式(LMI)方法, 提出了参数不确定系统的输出反馈鲁棒完整性控制器存在的充分条件, 通过求解两个矩阵不等式获得控制器, 使闭环系统在传感器发生故障时仍然保持二次稳定, 并对参数不确定性具有鲁棒性. 数值示例说明了该方法的有效性.

关键词: 容错控制; 鲁棒完整性; 输出反馈; LMI

中图分类号: TP13

文献标识码: A

Design of output feedback controller with robust integrity based on LMI approach

ZONG Zhen, WANG Shi-fu

(Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: Integrity is an important research orientation of fault-tolerant control, and the study of robust integrity of systems with parameter uncertainties is of great significance in practice. In this paper, sufficient conditions for output feedback systems with robust integrity based on a $[0, \sigma]$ model of failure and LMI approach are proposed. Dynamic output feedback controllers, which maintain the quadratic stability of closed-loop systems with parameter uncertainties and sensor failures, can be obtained by solving two matrix inequalities. The effectiveness of this method is demonstrated with a numerical example.

Key words: fault-tolerant control; robust integrity; output feedback; LMI(linear matrix inequality)

1 引言(Introduction)

作为提高复杂系统可靠性的手段之一, 容错控制技术近年来受到了广泛重视. 容错控制的一个重要研究方向是所谓“完整性控制”问题, 即针对 MIMO 对象设计控制器, 使闭环系统在传感器或执行器发生故障的情况下仍然保持稳定. 由于传感器或执行器在实际系统中是最容易发生故障的部件, 所以完整性控制有很高的应用价值. 另一方面, 由于系统的建模误差和外界干扰等因素, 系统模型带有一定程度的不确定性是不可避免的. 因此, 研究不确定系统的鲁棒控制问题具有很强的实际意义.

关于参数不确定系统的鲁棒完整性控制, 已经有不少研究成果. 文献[1]基于一个 Riccati 方程的解, 给出了对执行器失效具有完整性的控制器设计方法, 并对参数不确定性具有鲁棒性. 文献[2]基于线性变换技术, 讨论了离散系统的 D 稳定鲁棒完整性条件及控制器设计. 文献[3]针对参数乘性摄动系统, 给出了系统具有鲁棒完整性的必要条件和充分

条件. 文献[4]和文献[5]分别研究了不确定广义系统和不确定离散时滞系统的鲁棒完整性控制问题.

目前研究中的主要问题是: 1) 控制器大多采用状态反馈的形式, 但实际上往往不能直接获取系统的所有状态, 因此状态反馈形式的控制器在应用中有一定的局限性; 2) 控制器设计大多基于 Riccati 方程求解, 在设计过程中需要反复调整权矩阵; 3) 一般的完整性控制都基于 0-1 故障模型, 只能代表断路故障.

本文基于 $[0, \sigma]$ 故障模型和线性矩阵不等式(Linear Matrix Inequality)方法, 针对参数不确定系统, 提出一种输出反馈鲁棒完整性控制器设计方法. 该方法通过求解两个矩阵不等式获得控制器, 使闭环系统在传感器发生故障时仍然保持二次稳定, 并对参数不确定性具有鲁棒性.

2 问题描述(Problem formulation)

考虑如图 1 所示的线性定常参数不确定 MIMO 输出反馈控制系统 $\Sigma(P_\Delta(s), K(s))$. 设被控对象 $P_\Delta(s)$ 为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_p = (\mathbf{A}_p + \Delta\mathbf{A}_p(t))\mathbf{x}_p + (\mathbf{B}_p + \Delta\mathbf{B}_p(t))\mathbf{u}_p, \\ \mathbf{y}_p = (\mathbf{C}_p + \Delta\mathbf{C}_p(t))\mathbf{x}_p. \end{cases} \quad (1)$$

动态输出反馈控制器 $\mathbf{K}(s)$ 为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_k = \mathbf{A}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k\mathbf{u}_k, \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{C}_k\mathbf{x}_k. \end{cases} \quad (2)$$

其中: $\mathbf{x}_p \in \mathbb{R}^{n_p}$; $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^{n_k}$; $\mathbf{y}_p = \mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^l$; $\mathbf{u}_p = \mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^m$; $\mathbf{A}_p, \mathbf{B}_p, \mathbf{C}_p, \mathbf{A}_k, \mathbf{B}_k, \mathbf{C}_k$ 为相应维数矩阵; $\Delta\mathbf{A}_p(t), \Delta\mathbf{B}_p(t), \Delta\mathbf{C}_p(t)$ 表示时变参数不确定性, 具有如下结构:

$$\begin{bmatrix} \Delta\mathbf{A}_p(t) & \Delta\mathbf{B}_p(t) \\ \Delta\mathbf{C}_p(t) & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \end{bmatrix} \mathbf{F}(t) [\mathbf{H}_1 \quad \mathbf{H}_2]. \quad (3)$$

其中: $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$ 为已知矩阵; $\mathbf{F}(t)^T \mathbf{F}(t) \leq \mathbf{I}$.

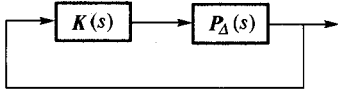


图1 系统 $\Sigma(P_\Delta(s), K(s))$

Fig. 1 System $\Sigma(P_\Delta(s), K(s))$

记 $\bar{\mathbf{A}}_p = \mathbf{A}_p + \Delta\mathbf{A}_p(t)$, $\bar{\mathbf{B}}_p = \mathbf{B}_p + \Delta\mathbf{B}_p(t)$, $\bar{\mathbf{C}}_p = \mathbf{C}_p + \Delta\mathbf{C}_p(t)$, 则闭环系统方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_p \\ \dot{\mathbf{x}}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_p & \bar{\mathbf{B}}_p \mathbf{C}_k \\ \mathbf{B}_k \bar{\mathbf{C}}_p & \mathbf{A}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p \\ \mathbf{x}_k \end{bmatrix}. \quad (4)$$

引入传感器故障阵 $\mathbf{F}_s$:

$$\mathbf{F}_s \in \Theta_s = \{ \mathbf{X} | \mathbf{X} = \text{diag}\{f_{s1}, f_{s2}, \dots, f_{sl}\},$$

$$0 \leq f_{si} \leq \sigma_s, \sigma_s \geq 1, i = 1, \dots, l \}.$$

故障阵为对角阵, 对角元素为 1 表示对应的信号回路正常, 否则表示信号回路发生故障; 对角元素为 0 表示断路, 对角元素小于 1 表示信号缩小, 对角元素大于 1 表示信号放大, 其取值在设计时根据传感器故障的实际情况确定. 则故障系统 $\Sigma_f(P_\Delta(s), \mathbf{F}_s, \mathbf{K}(s))$ 如图 2 所示, 其闭环方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_p \\ \dot{\mathbf{x}}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_p & \bar{\mathbf{B}}_p \mathbf{C}_k \\ \mathbf{B}_k \mathbf{F}_s \bar{\mathbf{C}}_p & \mathbf{A}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p \\ \mathbf{x}_k \end{bmatrix} = \mathbf{A}_f \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p \\ \mathbf{x}_k \end{bmatrix}. \quad (5)$$

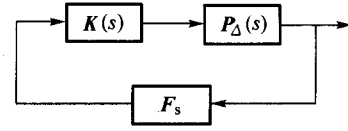


图2 故障系统 $\Sigma_f(P_\Delta(s), \mathbf{F}_s, \mathbf{K}(s))$

Fig. 2 Failure system $\Sigma_f(P_\Delta(s), \mathbf{F}_s, \mathbf{K}(s))$

本文研究的问题是: 设计控制器 $\mathbf{K}(s)$, 使得当传感器发生故障时, 故障系统 $\Sigma_f(P_\Delta(s), \mathbf{F}_s, \mathbf{K}(s))$ 仍然保持稳定, 并对参数不确定性具有鲁棒性.

3 主要结果(Main results)

为了证明后面的结果, 首先给出以下引理:

引理 1^[6] 对任意适维矩阵 $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ 及标量 ϵ , 均有 $\mathbf{X}\mathbf{Y}^T + \mathbf{Y}\mathbf{X}^T \leq \epsilon\mathbf{X}\mathbf{X}^T + \epsilon^{-1}\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T$.

引理 2^[7] 对给定的对称矩阵

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{bmatrix},$$

$\mathbf{S} < \mathbf{0}$ 等价于

$$\mathbf{S}_{22} < \mathbf{0}, \mathbf{S}_{11} - \mathbf{S}_{12}\mathbf{S}_{22}^{-1}\mathbf{S}_{12}^T < \mathbf{0}.$$

引理 3^[8] 设 $\mathbf{A}, \mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{F}$ 为适维实矩阵, 且 $\mathbf{F}^T \mathbf{F} \leq \mathbf{I}$. 如果存在正定阵 $\mathbf{P}$ 和标量 ϵ , 满足 $\epsilon\mathbf{I} - \mathbf{D}^T \mathbf{P} \mathbf{D} > \mathbf{0}$, 则

$$(\mathbf{A} + \mathbf{D}\mathbf{F}\mathbf{E})^T \mathbf{P} (\mathbf{A} + \mathbf{D}\mathbf{F}\mathbf{E}) \leq$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{D} (\epsilon\mathbf{I} - \mathbf{D}^T \mathbf{P} \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^T \mathbf{P} \mathbf{A} + \epsilon \mathbf{E}^T \mathbf{E}.$$

引理 4^[9] 存在对称正定阵 $\mathbf{X}$, 使之同时满足

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M}^T & * \end{bmatrix}, \mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{N} \\ \mathbf{N}^T & * \end{bmatrix}$$

的充分必要条件是

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{S} \end{bmatrix} > \mathbf{0}.$$

当传感器发生故障时, 输出反馈鲁棒完整性控制器的设计可归结为如下定理:

定理 1 对任意传感器故障阵 $\mathbf{F}_s \in \Theta_s$, 故障系统(5) 保持二次稳定且对参数不确定性具有鲁棒性的充分条件是存在标量 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 和对称正定阵 $\mathbf{X}$, 使得 $(\epsilon_1 \epsilon_3)^{-1} \mathbf{I} - \mathbf{E}_{sc}^T \mathbf{E}_{sc} > \mathbf{0}$, 且满足矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{so}^T \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A}_{so} & \mathbf{X} \mathbf{B}_{so} & \mathbf{C}_{so}^T & \mathbf{H}_{sa}^T & \mathbf{X} \mathbf{E}_{sa} & \mathbf{H}_{sc}^T \\ \mathbf{B}_{so}^T \mathbf{X} & -\epsilon_1 \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{so} & \mathbf{0} & -\epsilon_1^{-1} \mathbf{I} + \epsilon_3 \mathbf{E}_{sc} \mathbf{E}_{sc}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_{sa} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\epsilon_2^{-1} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{E}_{sa}^T \mathbf{X} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\epsilon_2 \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_{sc} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\epsilon_3 \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \quad (6)$$

其中

$$A_{so} = \begin{bmatrix} A_P & B_P C_K \\ \delta_s B_K C_P & A_K \end{bmatrix}, B_{so} = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_s B_K \end{bmatrix}, C_{so} = [C_P \ 0],$$

$$E_{sa} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & \delta_s B_K E_2 \end{bmatrix}, E_{sc} = [E_2 \ 0],$$

$$H_{sa} = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 C_K \\ H_1 & 0 \end{bmatrix}, H_{sc} = \begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \delta_s = \sigma_s/2.$$

定理1的证明见附录.定理1研究的是完全完整性控制问题,所以要求 $P_\Delta(s)$ 开环也能稳定,式(6)实际上隐含了这一点,这个要求是相当苛刻的.如果假定闭环系统至少有一个反馈回路不会发生故障(在实际应用中,这一点通常是能够做到的),则只

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{21}^T & B_1 & C_P^T & H_1^T & H_1^T & \Psi_{71}^T & \Psi_{81}^T & H_1^T \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} & 0 & \Psi_{42}^T & \Psi_{52}^T & \Psi_{62}^T & E_1 & 0 & \Psi_{92}^T \\ B_1^T & 0 & -\epsilon_1 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_P & \Psi_{42} & 0 & \Psi_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_1 & \Psi_{52} & 0 & 0 & -\epsilon_2^{-1} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_1 & \Psi_{62} & 0 & 0 & 0 & -\epsilon_2^{-1} I & 0 & 0 & 0 \\ \Psi_{71} & E_1^T & 0 & 0 & 0 & 0 & -\epsilon_2 I & 0 & 0 \\ \Psi_{81} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\epsilon_2 I & 0 \\ H_1 & \Psi_{92} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\epsilon_3 I \end{bmatrix} < 0. \quad (8)$$

其中

$$\Psi_{11} = A_P^T R + R A_P + B_1 C_P + C_P^T B_1^T,$$

$$\Psi_{21} = A_P + A_1^T,$$

$$\Psi_{22} = A_P S + S A_P^T + B_P C_1 + C_1^T B_P^T,$$

$$\Psi_{42} = C_P S, \Psi_{44} = -\epsilon_1^{-1} I + \epsilon_3 E_2 E_2^T,$$

$$\Psi_{52} = H_1 S + H_2 C_1, \Psi_{62} = H_1 S,$$

$$\Psi_{71} = E_1^T R, \Psi_{81} = E_2^T B_1^T, \Psi_{92} = \Psi_{62}.$$

证 由式(7)及引理4可知,存在对称正定阵 $X = \begin{bmatrix} R & M \\ M^T & * \end{bmatrix}$ 及逆阵 $X^{-1} = \begin{bmatrix} S & N \\ N^T & * \end{bmatrix}$, 其中 $R, S \in \mathbb{R}^{n_P \times n_P}$. 由 $XX^{-1} = I$ 可以得到 $MN^T = I - RS$. 因为 $\begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} > 0$, 所以 $I - RS$ 可逆, 则 M, N 满秩. 令 $\Gamma_1 = \begin{bmatrix} R & I \\ M^T & 0 \end{bmatrix}$, $\Gamma_2 = \begin{bmatrix} I & S \\ 0 & N^T \end{bmatrix}$, 显然 Γ_1, Γ_2 均满秩. 对式(6)分别左乘 $\text{diag}\{\Gamma_2^T, I, I, I, I\}$ 和右乘 $\text{diag}\{\Gamma_2, I, I, I, I\}$, 定义变量代换

$$\begin{cases} A_1 = SA_P R + \delta_s NB_K C_P R + SB_P C_K M^T + NA_K M^T, \\ B_1 = \delta_s NB_K, \\ C_1 = C_K M^T. \end{cases} \quad (9)$$

需未发生故障部分能使 $P_\Delta(s)$ 镇定即可.

由于式(6)中含有非线性项 $A_{so}^T X + X A_{so}$, $B_{so}^T X, E_{sa}^T X$ 等, 所以定理1中的矩阵不等式不能直接用于控制器求解. 对此, 可通过引入文献[11]中的变量代换, 得到如下定理:

定理2 对任意传感器故障阵 $F_s \in \Theta_s$, 故障系统(5)保持二次稳定且对参数不确定性具有鲁棒性的充分条件是存在标量 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$, 对称正定阵 R, S 和矩阵 A_1, B_1, C_1 , 使得 $(\epsilon_1 \epsilon_3)^{-1} I - E_{sc}^T E_{sc} > 0$, 且满足矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} > 0, \quad (7)$$

并注意到 $X \Gamma_2 = \Gamma_1$, 即得到式(8).

式(8)对标量 ϵ_1, ϵ_2 不是线性的, 在设计控制器时, 可预先指定 ϵ_1, ϵ_2 为一定的值, 使式(8)成为 LMI, 这样就能利用 MATLAB 中的 LMI 工具箱求解.

执行器发生故障情况与传感器发生故障情况类似, 不再赘述.

4 数值示例(Numerical example)

根据定理2, 对传感器故障具有完整性, 且对参数不确定性具有鲁棒性的输出反馈控制器设计步骤如下:

1) 给定 ϵ_1, ϵ_2 , 求解式(7), (8), 解得 $\epsilon_3, R, S, A_1, B_1, C_1$;

2) 检查 $I - RS$ 是否可逆, 如果可逆, 对其作满秩分解 $MN^T = I - RS$;

3) 求解线性方程组(9), 解得 A_K, B_K, C_K ;

4) $K(s) = C_K(sI - A_K)^{-1} B_K$ 即为所求的控制器.

设被控对象

$$A_P = \begin{bmatrix} -3 & 0.3 \\ 0.4 & -2 \end{bmatrix},$$

$$B_P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C_P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.6 \end{bmatrix},$$

取 $\sigma_s = 2$, 参数不确定性

$$E_1 = E_2 = H_1 = H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$F(t) = \begin{bmatrix} 0.2\sin t & 0 \\ 0 & 0.2\cos t \end{bmatrix}.$$

取 $\epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = 10$, 可解得:

$$\epsilon_3 = 0.5277, R = \begin{bmatrix} 39.5748 & -4.2727 \\ -4.2727 & 26.1462 \end{bmatrix},$$

$$S = \begin{bmatrix} 0.3485 & -0.0294 \\ -0.0294 & 0.2652 \end{bmatrix}.$$

进一步,可求得输出反馈控制器:

$$A_K = \begin{bmatrix} -3.2098 & -0.4451 \\ 1.9195 & -3.0452 \end{bmatrix},$$

$$B_K = \begin{bmatrix} 0.0334 & 0.0158 \\ -0.0003 & 0.0896 \end{bmatrix},$$

$$C_K = \begin{bmatrix} -0.4205 & -0.0430 \\ 0.0306 & -0.3279 \end{bmatrix},$$

采用该控制器得到的闭环系统在不同故障情况下的极点分布如表 1 所示,从表 1 可以看出,对于不同的传感器故障,闭环系统都能保持鲁棒稳定性.本文的方法是有效的.

表 1 不同传感器故障情况下的闭环系统极点分布

Table 1 Poles of the closed-loop system under different sensor failures

传感器故障阵	闭环系统极点	
	无参数摄动	有参数摄动
$F_s = I$ (无故障)	$-1.9043, -3.1106, -3.1200 \pm 0.9255i$	$-2.0109, -3.0016, -3.1213 \pm 0.9265i$
$F_s = \text{diag}\{1, 0\}$	$-1.8931, -3.1063, -3.1278 \pm 0.9235i$	$-2.0038, -2.9971, -3.1270 \pm 0.9249i$
$F_s = \text{diag}\{2, 0\}$	$-1.8945, -3.1043, -3.1281 \pm 0.9264i$	$-2.0062, -2.9956, -3.1266 \pm 0.9291i$
$F_s = \text{diag}\{0, 1\}$	$-1.9029, -3.1128, -3.1196 \pm 0.9226i$	$-2.0084, -3.0032, -3.1217 \pm 0.9223i$
$F_s = \text{diag}\{0, 2\}$	$-1.9141, -3.1174, -3.1117 \pm 0.9246i$	$-2.0154, -3.0079, -3.1159 \pm 0.9239i$
$F_s = 0$ (系统开环)	$-3.1083, -1.8917, -3.1275 \pm 0.9206i$	$-2.9986, -2.0014, -3.1275 \pm 0.9206i$

5 结论(Conclusion)

本文讨论了传感器故障情况下动态输出反馈鲁棒完整性控制器存在的充分条件.并基于 LMI 给出了控制器的设计方法.该方法的优点是:1)采用输出反馈代替了状态反馈,避免了获取状态的困难;2)根据文中给出的充分条件,能得到动态输出反馈鲁棒完整性控制器的参数化表示;3)在标量参数给定的情况下,控制器可利用 MATLAB 的 LMI 工具箱求得,比 Riccati 方法更为简捷.值得进一步研究的问题包括:1)如何减少完整性条件的保守性;2)给出修改和优化设计参数 ϵ_1, ϵ_2 的方法.

参考文献(References):

- [1] 韩清龙,俞金寿.不确定性连续系统具有完整性的反馈设计新方法[J].自动化学报,1998,24(6):768-775.
(HAN Qinglong, YU Jinshou. A new feedback design method for uncertain continuous-time systems possessing integrity [J]. *Acta Automatica Sinica*, 1998, 24(6):768-775.)
- [2] 孙金生,李军,王执铨.不确定离散系统的 D 稳定鲁棒容错控制[J].控制理论与应用,1998,15(4):636-641.
(SUN Jinsheng, LI Jun, WANG Zhiqian. D-stable robust fault-tolerant control for uncertain discrete systems [J]. *Control Theory & Ap-*

plications, 1998, 15(4):636-641.)

- [3] 姜澄,王诗必.具有参数乘性摄动系统的鲁棒完整性研究[J].上海海运学院学报,2001,22(3):149-154.
(JIANG Cheng, WANG Shifu. Robust integrity in systems with multiplicative perturbations on parameters [J]. *J of Shanghai Maritime University*, 2001, 22(3):149-154.)
- [4] 胡刚,谢湘生,刘永清,等.一类不确定广义系统的鲁棒容错控制[J].系统工程与电子技术,2001,23(6):52-54.
(HU Gang, XIE Xiangsheng, LIU Yongqing, et al. Robust fault-tolerant control for a class of uncertain singular systems [J]. *Systems Engineering & Electronics*, 2001, 23(6):52-54.)
- [5] 孙金生,王执铨.不确定离散时滞系统的 D 稳定鲁棒容错控制[J].控制理论与应用,2002,19(6):968-971.
(SUN Jinsheng, WANG Zhiqian. D-stable fault-tolerant control for uncertain discrete-delay systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2002, 19(6):968-971.)
- [6] KHARGONEKAR P P, PETERSEN I R, ZHOU K. Robust stabilization of uncertain linear systems: quadratic stabilization and H_∞ control theory [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1990, 35(3):356-361.
- [7] BOYD S, GHAOUI L E, FERON E, BALAKRISHNAN V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory* [M]. Philadelphia: SIAM, 1994.
- [8] CAO Y Y, SUN Y X, LAM J. Delay-dependent robust H_∞ control for uncertain systems with time-varying delays [J]. *IEE Proc Control Theory and Applications*, 1998, 145(3):338-344.

- [9] IWASAKI T, SKELTON R E. All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence condition and state space formulas [J]. *Automatica*, 1994, 30(8): 1307–1317.
- [10] 王岩, 张庆灵. 不确定广义系统动态输出鲁棒 H_∞ 反馈控制器设计[J]. 控制与决策, 2002, 17(6): 948–951.
(WANG Yan, ZHANG Qingling. Dynamic output feedback robust H_∞ control for uncertain descriptor systems [J]. *Control and Decision*, 2002, 17(6): 948–951.)
- [11] CHILALI M, GAHINET P. H_∞ Design with pole placement constraints: an LMI approach [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1996, 41(3): 358–367.

附录(Appendix):

定理1的证明.

首先证明, 存在鲁棒输出反馈控制器使故障系统(5)系统保持二次稳定的充分条件, 是存在标量 ϵ_1 和对称正定阵 X , 满足以下矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} A_s^T \\ B_s^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_s & B_s \end{bmatrix} + \epsilon_1 \begin{bmatrix} C_s^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_s & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_1 I \end{bmatrix} < 0. \quad (*)$$

其中: $A_s = \begin{bmatrix} \bar{A}_P & \bar{B}_P C_K \\ \delta_2 B_K \bar{C}_P & A_K \end{bmatrix}; B_s = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_s B_K \end{bmatrix}; C_s =$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A_s^T \\ B_s^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_s & B_s \end{bmatrix} + \epsilon_1 \begin{bmatrix} C_s^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_s & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_1 I \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} A_{so}^T \\ B_{so}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{so} & B_{so} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{sa}^T F^T E_{sa}^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{sa} F H_{sa} & 0 \end{bmatrix} + \\ & \epsilon_1 \left(\begin{bmatrix} C_{so}^T \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{sc}^T F^T E_{sc}^T \\ 0 \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} C_{so} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_{sc} F H_{sc} & 0 \end{bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_1 I \end{bmatrix} \leq \\ & \begin{bmatrix} A_{so}^T X + X A_{so} & X B_{so} \\ B_{so}^T X & -\epsilon_1 I \end{bmatrix} + \epsilon_2 \begin{bmatrix} H_{sa}^T H_{sa} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \epsilon_2^{-1} \begin{bmatrix} X E_{sa} E_{sa}^T X & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \\ & \epsilon_1 \left(\begin{bmatrix} C_{so}^T C_{so} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{so}^T E_{sc} (\alpha I - E_{sc}^T E_{sc})^{-1} E_{sc}^T C_{so} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} H_{sc}^T H_{sc} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \\ & \begin{bmatrix} A_{so}^T X + X A_{so} & X B_{so} \\ B_{so}^T X & -\epsilon_1 I \end{bmatrix} + \epsilon_2 \begin{bmatrix} H_{sa}^T H_{sa} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \epsilon_2^{-1} \begin{bmatrix} X E_{sa} E_{sa}^T X & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \\ & \epsilon_1 \begin{bmatrix} C_{so}^T (I - \alpha^{-1} E_{sc} E_{sc}^T)^{-1} C_{so} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \epsilon_1 \alpha \begin{bmatrix} H_{sc}^T H_{sc} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} A_{so}^T X + X A_{so} & X B_{so} \\ B_{so}^T X & -\epsilon_1 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{so}^T & H_{sa}^T & X E_{sa} & H_{sc}^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 (I - \alpha^{-1} E_{sc} E_{sc}^T)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_2^{-1} I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\epsilon_1 \alpha) I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{so} & 0 \\ H_{sa} & 0 \\ E_{sa}^T X & 0 \\ H_{sc} & 0 \end{bmatrix}.$$

令 $(\epsilon_1 \alpha)^{-1} = \epsilon_3$, 由引理2可知, 式(*)成立的充分条件为式(6)成立.

作者简介:

宗臻 (1979—), 男, 2001年于清华大学自动化系获工学学士

$[\bar{C}_P \ 0]$.

根据二次稳定的定义, 对任意传感器故障阵 $F_s \in \Theta_s$, 故障系统(5)保持二次稳定的充分必要条件是存在对称正定阵 X , 使得

$$\begin{aligned} A_f^T X + X A_f &= (A_s^T + \Delta_s^T) X + X (A_s + \Delta_s) = \\ A_s^T X + X A_s + \Delta_s^T X + X \Delta_s &< 0. \end{aligned} \quad (**)$$

其中, $\Delta_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_K (F_s - \delta_s I) \bar{C}_P & 0 \end{bmatrix} = \delta_s^{-1} B_s (F_s - \delta_s I) C_s$.

由引理1, 并注意到 $\delta_s^{-2} (F_s - \delta_s I) (F_s - \delta_s I)^T$ 的对角元均不大于1, 有

$$\begin{aligned} \Delta_s^T X + X \Delta_s &= \\ C_s^T \delta_s^{-1} (F_s - \delta_s I)^T B_s^T X + X B_s \delta_s^{-1} (F_s - \delta_s I) C_s &\leq \\ \epsilon_1^{-1} X B_s \delta_s^{-2} (F_s - \delta_s I) (F_s - \delta_s I)^T B_s^T X + \epsilon_1 C_s^T C_s &\leq \\ \epsilon_1^{-1} X B_s B_s^T X + \epsilon_1 C_s^T C_s, \end{aligned}$$

代入式(**), 有 $A_s^T X + X A_s + \epsilon_1^{-1} X B_s B_s^T X + \epsilon_1 C_s^T C_s < 0$, 由引理2即得式(*).

令 $F = \begin{bmatrix} F(t) & 0 \\ 0 & F(t) \end{bmatrix}$, 则 $A_s = A_{so} + E_{sa} F H_{sa}$, $B_s = B_{so}$, $C_s = C_{so} + E_{sc} F H_{sc}$, 由引理1及引理3, 并注意到 $I + E_{sc} (\alpha I - E_{sc}^T E_{sc})^{-1} E_{sc}^T = (I - \alpha^{-1} E_{sc} E_{sc}^T)^{-1}$, 有

学位, 现为清华大学自动化系控制科学与工程学科硕士研究生, 研究方向为容错控制, E-mail: zongzhen97@mails.tsinghua.edu.cn;

王诗彦 (1944—), 男, 1967年毕业于清华大学动力机械系, 1981年和1983年于英国曼彻斯特大学获理学硕士和哲学博士学位, 现为清华大学自动化系教授, 研究领域为多变量控制、预测控制、容错控制等, E-mail: wsf-dau@mail.tsinghua.edu.cn.