文章编号：1000－8152(2005)05－0699－04

相对阶 $n^*=3$ 系统的鲁棒直接型模型参考自适应控制

解学军，高丽君
（曲阜师范大学 自动化研究所，山东 曲阜 273165）

摘要： 针对相对阶 $n^*=3$ 的具有输入和输出未建模动态的一类系统，设计了可以实现的具有未规范化自适应律的鲁棒直接型模型参考自适应控制器，构造了满足引理 1 性质的自适应律．通过利用 Lyapunov 稳定性理论及鲁棒自适应控制分析理论，构造误差系统，严格地分析了闭环系统的稳定性和跟踪性能．

关键词： 相对阶 $n^*=3$；模型参考自适应控制；直接型；全局稳定性；跟踪性能

中图分类号： TP273.2　　**文献标识码：** A

Robust direct model reference adaptive control for the plants with relative degree $n^*=3$

XIE Xue-jun, GAO Li-jun
(Institute of Automation, Qufu Normal University, Qufu Shandong 273165, China)

Abstract: For a kind of plants with relative degree $n^*=3$ and unmodeled dynamics for input and output, an implementable robust direct model reference adaptive controller with unnormalized adaptive law is designed, and the adaptive laws satisfying the properties of lemma 1 are constructed. By using the Lyapunov stability theory and robust adaptive control analysis theory and constructing the error plant, the stability and tracking performance of the closed-loop plant are analyzed rigorously.

Key words: relative degree $n^*=3$; model reference adaptive control; direct; global stability; tracking performance

1 引言(Introduction)

对于理想系统 $y_p=G_p(s)u_p$，利用严格正实条件和 Lyapunov 稳定性理论容易设计和分析相对阶 $n^*=1,2$ 的具有未规范化自适应律的直接型 MRAC，但将这一结果推广到 $n^*=3$ 却遇到了实质性困难．主要原因在于通过这种方法得到的控制器与不可量测的信号 $\ddot{\theta}(t)$（$\theta(t)$ 是控制器的参数估计）有关，控制器不能用于实现．这个问题一直困扰人们近 20 年，直到 20 世纪 90 年代才得到解决[1]．最近文献[2]通过反推和 Nussbaum 增益方法进一步研究了 $n^*=3$ 及高频增益符号未知的情况．据作者所知，目前关于这一问题的鲁棒性工作仅限于一类简单系统，并且仅能保证闭环系统的局部稳定性[1]．

正是基于上述原因，本文针对相对阶 $n^*=3$、具有输入和输出未建模动态的一般系统，研究了上述问题．本文的主要工作在于：1）由于 $n^*=3$ 且存在未建模动态，因此如何设计可以用于实现的鲁棒直接型 MRAC，以及如何构造具有引理 1 性质的自适应律构成了问题研究的关键；2）严格地给出了闭环系统的全局稳定性和跟踪性能分析．

2 问题的提出(Problem statement)

考虑如下系统

$$y_p=G_p(s)(1+\mu_1\Delta_1(s))u_p+\mu_2\Delta_2(s)y_p, \quad (1)$$

其中：$u_p, y_p\in\mathbb{R}^1$ 分别是输入和输出；$G_p(s)=K_pZ_p(s)/R_p(s)$，$R_p(s)=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0$，$Z_p(s)=s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1s+b_0$，$a_i$ 和 b_j 是未知常数；$\Delta_1(s)$，$\Delta_2(s)$ 是关于输入和输出的未建模动态；$\mu_1,\mu_2\geqslant 0$ 是参数，s 表示微分算子．显然式(1)的状态空间实现为

$$\begin{cases}\dot{x}_p=A_px_p-ay_p+B_pu_p+aN, x_p(0)=0,\\ y_p=C_p^{\mathrm{T}}x_p+N.\end{cases} \quad (2)$$

其中

$$x_p\in\mathbb{R}^n; A_p=\begin{bmatrix}0_{n-1} & I_{n-1}\\ 0 & 0_{n-1}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}; a=\begin{bmatrix}a_{n-1}\\ \vdots\\ a_0\end{bmatrix};$$

收稿日期：2004－02－13；收修改稿日期：2005－01－06．
基金项目：国家自然科学基金资助项目(60304003)；山东省优秀中青年科学家科研奖励基金资助项目(03BS092)；山东省自然科学基金资助项目(Q2002G02)．

$$B_{\mathrm{p}}=\begin{bmatrix}0_{n-m-1}\\ b\end{bmatrix};b=\begin{bmatrix}b_m\\ \vdots\\ b_0\end{bmatrix};C_{\mathrm{p}}^{\mathrm{T}}=[1,0_{n-1}^{\mathrm{T}}];$$

$$N=\mu_1\Delta_1(s)u_{\mathrm{p}}+\mu_2\Delta_2(s)y_{\mathrm{p}}.$$

选取参考模型为

$$y_{\mathrm{m}}=W_{\mathrm{m}}(s)r=K_{\mathrm{m}}\frac{Z_{\mathrm{m}}(s)}{R_{\mathrm{m}}(s)}r. \tag{3}$$

其中: $y_{\mathrm{m}},r\in\mathbb{R}^1$, r 是参考输入.系统、参考模型和未建模动态分别满足如下假设:

P_1: $Z_{\mathrm{p}}(s)$ 是 Hurwitz 多项式; P_2: $G_{\mathrm{p}}(s)$ 的相对阶 $n^*=n-m=3$; P_3: K_{p} 的符号已知,且存在常数 $\bar{K}>0$,使得 $|K_{\mathrm{p}}|\geqslant\bar{K}$.

M_1: $Z_{\mathrm{p}}(s)$ 和 $R_{\mathrm{m}}(s)$ 是阶次分别为 q_{m} 和 p_{m} 的首一 Hurwitz 多项式,且 $p_{\mathrm{m}}\leqslant n$; M_2: 参考模型的相对阶 $p_{\mathrm{m}}-q_{\mathrm{m}}=3$; M_3: 参考输入 $r,\dot{r},\ddot{r}\in L_\infty$.

A_1: $\Delta_1(s),\Delta_2(s)$ 是稳定和严格正则的,且有单位高频增益.

控制目标是设计具有未规范化自适应律的直接型 MRAC,使得闭环系统的所有信号有界,同时系统的输出尽可能地跟踪参考模型的输出.

3 自适应控制器的设计(Design of adaptive controller)

当系统(1)的参数已知时,选取与[1, P_{345}]形式一样的控制律

$$\begin{cases}u_{\mathrm{p}}=\theta^{*\mathrm{T}}w,\\ \dot{\omega}_1=F\omega_1+gu_{\mathrm{p}},\dot{\omega}_2=F\omega_2+gy_{\mathrm{p}}.\end{cases} \tag{4}$$

其中

$$\theta^*=[\theta_1^{*\mathrm{T}},\theta_2^{*\mathrm{T}},\theta_3^*,c_0^*]^{\mathrm{T}};\omega=[\omega_1^{\mathrm{T}},\omega_2^{\mathrm{T}},y_{\mathrm{p}},r]^{\mathrm{T}};$$

$$F=\begin{bmatrix}-\lambda_{n-2} & \cdots & -\lambda_0\\ I_{n-2} & \cdots & 0_{n-2}\end{bmatrix};g^{\mathrm{T}}=[1,0_{n-2}^{\mathrm{T}}];$$

λ_i 是任给 Hurwitz 多项式 $\Lambda(s)=s^{n-1}+\lambda_{n-2}s^{n-2}+\cdots+\lambda_1 s+a_0=\det(sI-F)$ 的系数,$(sI-F)^{-1}g=a(s)/\Lambda(s)$, $a(s)=[s^{n-2},\cdots,s,1]^{\mathrm{T}}$, $c_0^*=K_{\mathrm{m}}/K_{\mathrm{p}}$.由式(2)(4)易得系统和控制器的状态空间表示为

$$\begin{cases}\dot{Y}_{\mathrm{c}}=A_0Y_{\mathrm{c}}+B_{\mathrm{c}}u_{\mathrm{p}}+B_1,\ Y_{\mathrm{c}}(0)=0,\\ y_{\mathrm{p}}=C_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}Y_{\mathrm{c}}+N,\ u_{\mathrm{p}}=\theta^{*\mathrm{T}}w.\end{cases} \tag{5}$$

其中

$$\begin{cases}Y_{\mathrm{c}}=\begin{bmatrix}x_{\mathrm{p}}\\ w_1\\ w_2\end{bmatrix},\ A_0=\begin{bmatrix}A_{\mathrm{p}}-aC_{\mathrm{p}}^{\mathrm{T}} & 0 & 0\\ 0 & F & 0\\ gC_{\mathrm{p}}^{\mathrm{T}} & 0 & F\end{bmatrix},\\ B_{\mathrm{c}}=\begin{bmatrix}B_{\mathrm{p}}\\ g\\ 0\end{bmatrix},\ B_1=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ gN\end{bmatrix},\\ C_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}=[C_{\mathrm{p}}^{\mathrm{T}},0_{n-1}^{\mathrm{T}},0_{n-1}^{\mathrm{T}}].\end{cases} \tag{6}$$

对式(5)的第一式的右边加减 $B_{\mathrm{c}}\theta^{*\mathrm{T}}w$ 得

$$\begin{cases}\dot{Y}_{\mathrm{c}}=A_{\mathrm{c}}Y_{\mathrm{c}}+B_{\mathrm{c}}c_0^*r+B_{\mathrm{c}}(u_{\mathrm{p}}-\theta^{*\mathrm{T}}w)+\\ \qquad B_1+B_2,Y_{\mathrm{c}}(0)=0,\\ y_{\mathrm{p}}=C_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}Y_{\mathrm{c}}+N.\end{cases} \tag{7}$$

其中

$$A_{\mathrm{c}}=\begin{bmatrix}A_{\mathrm{p}}+B_{\mathrm{p}}\theta_3^*C_{\mathrm{p}}^{\mathrm{T}}-aC_{\mathrm{p}}^{\mathrm{T}} & B_{\mathrm{p}}\theta_1^{*\mathrm{T}} & B_{\mathrm{p}}\theta_2^{*\mathrm{T}}\\ g\theta_3^*C_{\mathrm{p}}^{\mathrm{T}} & F+g\theta_1^{*\mathrm{T}} & g\theta_2^{*\mathrm{T}}\\ gC_{\mathrm{p}}^{\mathrm{T}} & 0 & F\end{bmatrix};$$

$$B_2=\begin{bmatrix}B_{\mathrm{p}}\\ g\\ 0\end{bmatrix}\theta_3^*N.$$

由于式(7)是闭环系统,如果将式(7)中的 r 作为输入,y_{p} 作为输出,根据文献[1]第6章的思想,显然 $C_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}(sI-A_{\mathrm{c}})^{-1}B_{\mathrm{c}}c_0^*=W_{\mathrm{m}}(s)$.通过文献[1]的引理6.3.1知方程的解 $\theta_i^*,c_0^*,i=1,2,3$ 总是存在的.显然 A_{c} 是稳定阵,且式(3)的非最小状态空间实现为

$$\begin{cases}\dot{Y}_{\mathrm{m}}=A_{\mathrm{c}}Y_{\mathrm{m}}+B_{\mathrm{c}}c_0^*r,Y_m(0)=0,\\ y_{\mathrm{m}}=C_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}Y_{\mathrm{m}}.\end{cases}$$

其中 Y_{m} 和 Y_{c} 的维数相同.定义 $e=Y_{\mathrm{c}}-Y_{\mathrm{m}},e_1=y_{\mathrm{p}}-y_{\mathrm{m}}$,由式(7)和上式得误差方程为

$$\begin{cases}\dot{e}=A_{\mathrm{c}}e+B_{\mathrm{c}}(u_{\mathrm{p}}-\theta^{*\mathrm{T}}w)+B_1+B_2,e(0)=0,\\ e_1=C_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}e+N.\end{cases} \tag{8}$$

定义

$$M=C_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}(sI-A_{\mathrm{c}})^{-1}\Psi N+N,\ \Psi=\begin{bmatrix}B_{\mathrm{P}}\theta_3^*\\ g\theta_3^*\\ g\end{bmatrix}. \tag{9}$$

由式(8)和(9)得 $e_1=W_{\mathrm{m}}(s)\rho^*(u_{\mathrm{p}}-\theta^{*\mathrm{T}}w)+M$,其中 $\rho^*=1/c_0^*$.不失一般性,选取 $W_{\mathrm{m}}(s)=1/(s+p_0)(s+p_1)(s+q_0)$,其中 $p_0,p_1,q_0>0$,注意到 ρ^* 和 θ^* 是常数,则

$$e_1=\frac{1}{s+q_0}\rho^*(u_{\mathrm{f}}-\theta^{*\mathrm{T}}\varphi)+M. \tag{10}$$

其中: $u_{\mathrm{f}}=u_{\mathrm{p}}/(s+p_0)(s+p_1)$; $\varphi=w/(s+p_0)(s+p_1)$.选取 e_1 的估计 $\hat{e}_1=(\rho(u_{\mathrm{f}}-\theta^{\mathrm{T}}\varphi))/(s+q_0)$.其中 θ,ρ 分别是 θ^* 和 ρ^* 的估计,故 $\varepsilon_1=e_1-\hat{e}_1=(\rho^*\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}\varphi)/(s+q_0)-(\tilde{\rho}r_0)/(s+q_0)+M$,其中 $\tilde{\theta}=\theta-\theta^*$, $\tilde{\rho}=\rho-\rho^*$, $r_0=u_{\mathrm{f}}-\theta^{\mathrm{T}}\varphi$.注意到 s 是微分算子,则

$$\dot{\varepsilon}_1=-q_0\varepsilon_1+\rho^*\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}\varphi-\tilde{\rho}r_0+(s+q_0)M,\varepsilon_1(0)=0. \tag{11}$$

由假设 P_3 知 $|\rho^*|=|K_p|/|K_m|\geqslant \bar{K}/|K_m|=\bar{\rho}$. 选取自适应律为

$$\dot{\theta}=-\Gamma\operatorname{sgn}(\rho^*)\varepsilon_1\varphi-\Gamma\sigma\theta,$$

$$\dot{\rho}=\begin{cases} r\varepsilon_1 r_0-r\sigma_1\rho, & |\rho|>\bar{\rho}\text{ 或 }\rho\operatorname{sgn}(\rho^*)=\bar{\rho}\text{ 且}(\varepsilon_1 r_0-\sigma_1\rho)\operatorname{sgn}(\rho^*)>0,\\ 0, & \rho\operatorname{sgn}(\rho^*)=\bar{\rho}\text{ 且 }(\varepsilon_1 r_0-\sigma_1\rho)\operatorname{sgn}(\rho^*)\leqslant 0.\end{cases}\tag{12}$$

其中: $\Gamma,r>0$ 是自适应增益; $\sigma,\sigma_1>0$ 是设计参数. 利用常规方法易证下面引理.

引理 1　选取 $V_1=\dfrac{\varepsilon_1^2}{2}+|\rho^*|\dfrac{\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}\Gamma^{-1}\tilde{\theta}}{2}+\dfrac{\tilde{\rho}^2}{2\gamma}$, 其中 $\tilde{\theta}=\theta-\theta^*$, $\tilde{\rho}=\rho-\rho^*$ 则

1) 若选取 ρ 的初值 $\rho(0)$ 满足 $\rho(0)\operatorname{sgn}(\rho^*)\geqslant\bar{\rho}$, 则 $|\rho|\geqslant\bar{\rho}$;

2) V_1 沿式(11)和(12)的导数 $\dot{V}\leqslant -q_0\varepsilon_1^2+\varepsilon_1(s+q_0)M-\sigma\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}\theta-\sigma_1\tilde{\rho}\rho$.

由 s 是微分算子, u_f,φ,r_0 的定义得 $r_0=u_f-\theta^{\mathrm{T}}\varphi=(u_1-\dot{\theta}^{\mathrm{T}}\varphi-\theta^{\mathrm{T}}\varphi_1)/(s+p_0)$, 其中 $u_1=u_p/(s+p_1)$, $\varphi_1=(s+p_0)\varphi=w/(s+p_1)$. 选取 $u_1=\theta^{\mathrm{T}}\varphi_1-\sigma\theta^{\mathrm{T}}\Gamma\varphi-\alpha_0(\varphi^{\mathrm{T}}\Gamma\varphi)^2r_0$, 其中 $\alpha_0>0$ 是一个设计参数. 将 u_1 代入 r_0 的方程, 由式(12)得

$$\dot{r}_0=-[p_0+\alpha_0(\varphi^{\mathrm{T}}\Gamma\varphi)^2]r_0+\operatorname{sgn}(\rho^*)\varphi^{\mathrm{T}}\Gamma\varphi\varepsilon_1.\tag{13}$$

由 $u_p=(s+p_1)u_1$, 式(12)(13), u_1 及 w 的定义得控制律为

$$\begin{aligned}u_p={}&\\ &\theta^{\mathrm{T}}w-\operatorname{sgn}(\rho^*)\varphi^{\mathrm{T}}\Gamma\varphi_1\varepsilon_1-\sigma\theta^{\mathrm{T}}\Gamma\varphi_1-\\ &4\alpha_0\varphi^{\mathrm{T}}\Gamma\varphi(\varphi^{\mathrm{T}}\Gamma\dot{\varphi})r_0-\alpha_0(p_1-p_0)(\varphi^{\mathrm{T}}\Gamma\varphi)^2r_0+\\ &\alpha_0^2(\varphi^{\mathrm{T}}\Gamma\varphi)^4r_0-\alpha_0(\varphi^{\mathrm{T}}\Gamma\varphi)^3\operatorname{sgn}(\rho^*)\varepsilon_1+\\ &\sigma\operatorname{sgn}(\rho^*)\varphi^{\mathrm{T}}\Gamma^2\varphi\varepsilon_1+\sigma^2\theta^{\mathrm{T}}\Gamma^2\varphi-\sigma\theta^{\mathrm{T}}\Gamma\dot{\varphi}-\sigma p_1\theta^{\mathrm{T}}\Gamma\varphi.\end{aligned}\tag{14}$$

4 主要结果(Main results)

首先给出一个有用的引理.

引理 2　若假设条件 A_1 成立, 则存在常数 $\mu_0>0$, 当 $\mu_1\in[0,\mu_0)$ 时

$$\Delta^*(s)=\frac{1-\mu_2\Delta_2(s)}{1+\mu_1\Delta_1(s)}\tag{15}$$

是正则且稳定的, 其中 $\mu_1,\mu_2,\Delta_1,\Delta_2$ 如式(1)的定义.

证　利用文献[3]的引理1的方法类证.

下面给出本文的主要结果.

定理 1　考虑由系统(1), 参考模型(3), 控制律(14), 自适应律(12)构成的 MRAC 方案. 若假设 P_1-P_3, M_1-M_3, A_1 成立, 且 $\rho(0)\operatorname{sgn}(\rho^*)\geqslant\bar{\rho}$, 则一定存在常数 $\mu^*>0$, 使得对 $\forall\mu\in[0,\mu^*)$,

i) 闭环系统的所有信号都有界;

ii) 若 $r\in L_2$, 则跟踪误差 $e_1\in S(\sigma+\sigma_1)$.

其中: $\mu=\sqrt{\mu_1^2+\mu_2^2}$; $S(\lambda)=\{x:[0,\infty)\mapsto\mathbb{R}^n\,\big|\int_t^{t+T}|x(\tau)|^2\mathrm{d}\tau\leqslant c\lambda T+c,\forall t,T\geqslant 0\}$, λ 和 c 表示常数; σ 和 σ_1 如式(12)的定义.

证　由假设 A_1 及 A_c 稳定可知 $(\rho r_0)/(s+q_0)$, $\Delta_1(x)x_{pl}$, $\Delta_2(s)y_p$, $C_c^{\mathrm{T}}(sI-A_c)^{-1}\Psi\Delta_1(s)x_{pl}$, $C_c^{\mathrm{T}}(sI-A_c)^{-1}\Psi\Delta_2(s)y_p$ 分别有如下的状态空间实现

$$\begin{cases}\dot{v}_1=-q_0v_1+\rho r_0,v_1(0)=0,\\ \dfrac{1}{s+q_0}\rho r_0=v_1;\end{cases}\tag{16}$$

$$\begin{cases}\dot{v}_2=A_2v_2+b_2x_{pl},v_2(0)=0,\\ \Delta_1(s)x_{pl}=(1,0,\cdots,0)v_2;\end{cases}\tag{17}$$

$$\begin{cases}\dot{v}_3=A_3v_3+b_3y_p,v_3(0)=0,\\ \Delta_2(s)y_p=(1,0,\cdots,0)v_3;\end{cases}\tag{18}$$

$$\begin{cases}\dot{v}_4=A_4v_4+b_4x_{pl},v_4(0)=0,\\ C_c^{\mathrm{T}}(sI-A_c)^{-1}\Psi\Delta_1(s)x_{pl}=(1,0,\cdots,0)v_4;\end{cases}\tag{19}$$

$$\begin{cases}\dot{v}_5=A_5v_5+b_5y_p,v_5(0)=0,\\ C_c^{\mathrm{T}}(sI-A_c)^{-1}\Psi\Delta_2(s)y_p=(1,0,\cdots,0)v_5.\end{cases}\tag{20}$$

其中 A_i 是稳定阵, 从而一定存在正定阵 P_i 满足

$$A_i^{\mathrm{T}}P_i+P_iA_i=-I,\ i=2,3,4,5.\tag{21}$$

定义 $\psi=[\varepsilon_1\ \ v_1\ \ v_2^{\mathrm{T}}\ \ v_3^{\mathrm{T}}\ \ v_4^{\mathrm{T}}\ \ v_5^{\mathrm{T}}\ \ r_0]^{\mathrm{T}}$, 由式(16)~(18)得

$$|(\rho r_0)/(s+q_0)|=|v_1|\leqslant|\psi|,$$
$$|\Delta_1(s)x_{pl}|\leqslant|v_2|\leqslant|\psi|,$$
$$|\Delta_2(s)y_p|\leqslant|v_3|\leqslant|\psi|.$$

由 N 的定义得

$$|N|^2\leqslant 2\mu^2|\psi|^2.\tag{22}$$

由假设 A_1 知存在常数 $k_1,k_2,k_3,k_4>0$ 使得

$$|(s+q_0)\Delta_1(s)x_{pl}|^2\leqslant k_1|x_{pl}|^2+k_2|\psi|^2,$$
$$|(s+q_0)\Delta_2(s)y_p|^2\leqslant k_3|\psi|^2+k_4|y_m|^2.$$

由(2), (10), r_0 及 ε_1 的定义得

$$x_{pl}=\varepsilon_1+y_m+(\rho r_0)/(s+q_0)-N,$$

则

$$|x_{\rm pl}|^2 \leqslant 8(1+\mu^2)|\psi|^2 + 4|y_{\rm m}|^2,$$

从而

$$|(s+q_0)N|^2 \leqslant 2[8k_1\mu^4+(8k_1+k_2+k_3)\mu^2]|\psi|^2+(8k_1+2k_4)\mu^2|y_{\rm m}|^2.$$

由式(19)和(20)得

$$|C_{\rm c}^{\rm T}(sI-A_{\rm c})^{-1}\Psi\Delta_1(s)x_{\rm pl}| \leqslant |v_4| \leqslant |\psi|,$$

$$|C_{\rm c}^{\rm T}(sI-A_{\rm c})^{-1}\Psi\Delta_2(s)y_{\rm p}| \leqslant |v_5| \leqslant |\psi|.$$

进一步由假设 A_1 知存在 $k_5, k_6 > 0$ 满足

$$|(s+q_0)C_{\rm c}^{\rm T}(sI-A_{\rm c})^{-1}\Psi\Delta_1(s)x_{\rm pl}|^2 \leqslant k_5|\psi|^2,$$

$$|(s+q_0)C_{\rm c}^{\rm T}(sI-A_{\rm c})^{-1}\Psi\Delta_2(s)y_{\rm p}|^2 \leqslant k_6|\psi|^2,$$

从而

$$|(s+q_0)C_{\rm c}^{\rm T}(sI-A_{\rm c})^{-1}\Psi N|^2 \leqslant 2\mu^2(k_5+k_6)|\psi|^2.$$

由式(9)得

$$|(s+q_0)M|^2 \leqslant 4[8k_1\mu^4+(8k_1+k_2+k_3+k_5+k_6)\mu^2]|\psi|^2+(16k_1+4k_4)\mu^2|y_{\rm m}|^2. \tag{23}$$

选取

$$V = \frac{1}{2}\varepsilon_1^2 + \frac{|\rho^*|}{2}\tilde\theta^{\rm T}\Gamma^{-1}\tilde\theta + \frac{\tilde\rho^2}{2\gamma} + \gamma_0\frac{r_0^2}{2} + \frac{1}{2}q_1v_1^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{5}q_iv_i^{\rm T}P_iv_i. \tag{24}$$

由式(24)知存在常数

$$c = \min\{1/2, \gamma_0/2, q_1/2, q_2\lambda_{\min}(P_2)/2, q_3\lambda_{\min}(P_3)/2, q_4\lambda_{\min}(P_4)/2, q_5\lambda_{\min}(P_5)/2\},$$

使得

$$|\psi(t)|^2 \leqslant V(t)/c. \tag{25}$$

选取 $0 < \gamma_0 \leqslant \alpha_0q_0/2$,由引理1选取 q_1 满足

$$0 < q_1 \leqslant \gamma_0p_0q_0/8\rho^2.$$

进一步选取

$$0 < q_2 \leqslant \min\{q_0/20|P_2b_2|^2, q_1q_0/40|P_2b_2|^2\},$$

$$0 < q_3 \leqslant \min\{q_0/16|P_3b_3|^2, q_1q_0/32|P_3b_3|^2\},$$

$$0 < q_4 \leqslant \min\{q_0/20|P_4b_4|^2, q_1q_0/40|P_4b_4|^2\},$$

$$0 < q_5 \leqslant \min\{q_0/16|P_5b_5|^2, q_1q_0/32|P_5b_5|^2\},$$

$$\alpha = \min\{q_0/2, p_0, 11q_0/8, 1/5\lambda_{\max}(P_2), 1/4\lambda_{\max}(P_3), 1/5\lambda_{\max}(P_4), 1/4\lambda_{\max}(P_5), \sigma/\lambda_{\max}(\Gamma^{-1}), \sigma_1\gamma\}.$$

由

$$x_{\rm pl} = \varepsilon_1 + y_{\rm m} + v_1 - N, y_{\rm p} = \varepsilon_1 + y_{\rm m} + v_1,$$

引理1,式(11)~(13),式(16)~(25),经过一些推导知存在

$$\bar\mu = \sqrt{-f+\sqrt{f^2+32k_1\alpha cq_0}}/8\sqrt{k_1},$$

$$f = 32k_1 + 4(k_2+k_3+k_4+k_5+k_6) + 5q_2q_0|P_2b_2|^2/2 + 5q_4q_0|P_4b_4|^2/2,$$

当 $\mu < \bar\mu$ 时,

$$\dot V \leqslant -\frac{\alpha}{2}V + k_7|y_{\rm m}|^2 + \frac{\sigma|\rho^*||\theta^*|^2}{2} + \frac{\sigma_1\rho^{*2}}{2}. \tag{26}$$

其中

$$k_7 = 32k_1\bar\mu^2/q_0 + 8k_4\bar\mu^2/q_0 + 5q_2|P_2b_2|^2/2 + 2q_3|P_3b_3|^2 + 5q_4|P_4b_4|^2/2 + 2q_5|P_5b_5|^2,$$

显然当 $V \geqslant 2(k_7|y_{\rm m}|^2 + (\sigma|\rho^*||\theta^*|^2 + \sigma_1\rho^{*2})/2)/\alpha$, $\dot V \leqslant 0$,即 $\varepsilon_1, r_0, \theta, \rho, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \in L_\infty$.由式(10)中 $\hat e_1$ 的定义知 $\hat e_1 \in L_\infty$,从而 $e_1, y_{\rm p} \in L_\infty$.注意到假设 P_1, A_1 及 F 稳定,利用引理2知存在 $\mu^* = \min\{\mu_0, \bar\mu\}$,对 $\forall \mu \in [0, \mu^*)$,由式(1),$\varphi$ 及 ω 的定义得

$$\varphi = \frac{1}{(s+p_0)(s+p_1)}\begin{bmatrix}(sI-F)^{-1}gG_{\rm p}^{-1}(s)\Delta^*(s)y_{\rm p}\\(sI-F)^{-1}gy_{\rm p}\\y_{\rm p}\\r\end{bmatrix} \in L_\infty.$$

利用常规方法易证 i)成立.

ii) 由 $V \in L_\infty, r \in L_2$ 由式(26)得 $\varepsilon_1, r_0 \in S(\sigma+\sigma_1)$.由式(11),利用文献[1]3.3.3得 $\hat e_1, e_1 \in S(\sigma+\sigma_1)$.

参考文献(References):

[1] IOANNOU P A, SUN J. *Robust Adaptive Control* [M]. New Jersey: Prentice-Hall, 1996.

[2] MIYASATO Y. A model reference adaptive controller for systems with uncertain relative degrees r, $r=1$ or $r+2$ and unknown signs of high-frequency gains [J]. *Automatica*, 2000, 36(6): 889 – 896.

[3] WU Z J, XIE X J, ZHANG S Y. Robust decentralized adaptive stabilization for a class of interconnected systems with unmodeled dynamics [J]. *Int J of Systems Science*, 2004, 35(7): 389 – 404.

作者简介:

解学军 (1968—),男,教授,1999年于中国科学院系统科学研究所获博士学位,主要研究方向是复杂系统的自适应控制理论及应用,E-mail: xiexuejun@eyou.com;

高丽君 (1977—),女,博士研究生,研究方向是复杂系统的自适应控制理论.