

部分信息下极大化终止时刻期望效用

杨招军

(湖南大学 数学与计量经济学院, 湖南 长沙 410082)

摘要: 研究部分信息下极大化终止时刻期望效用的最优投资策略问题. 综合运用随机动态规划原理、Itô 公式、非线性滤波技术以及鞅与对偶方法, 得到了计算最优投资策略和最优目标函数(间接效用函数)的新途径; 给出了相应双曲绝对风险回避 Arrow-Pratt 系数的效用函数类的最优解.

关键词: 风险投资; 随机最优控制; 非线性滤波; 鞅与对偶方法; HARA 效用函数

中图分类号: O231.4 **文献标识码:** A

Maximizing the expected utility from terminal wealth under the case of partial information

YANG Zhao-jun

(College of Mathematics and Econometrics, Hunan University, Changsha Hunan 410082, China)

Abstract: The problem of maximizing the expected utility from terminal wealth under the case of partial information is addressed. By utilizing stochastic dynamic programming, Itô's formula, nonlinear filtering and martingale duality methods, the paper has found a new approach to solve such problem for general utility. Finally, the paper obtains solutions to the utility functions of hyperbolic absolute risk aversion Arrow-Pratt coefficients(HARA).

Key words: investment in risk asset; stochastic optimal control; nonlinear filtering; martingale and duality; HARA Utility

1 引言(Introduction)

如何按不同的比例分配有限的财富, 投资于风险资产(如股票)与无风险资产(如储蓄), 是每个投资者经常面临的选择问题. 在完备信息假设下, 投资者极大化终止时刻期望效用问题已有较系统的探讨^[1,2]. 但是, 完备信息假定风险资产价格动态方程中的布朗运动 W 及漂移系统是可直接观测的, 这显然不合实际, 或者说, 投资者所掌握的信息流不可能是布朗运动 W 生成的 σ -域流 $\{F_t\}_{0 \leq t \leq T}$ (完备信息), 而是其中的一部分, 那就是过去观测到的价格生成的信息流(部分信息), 即 $\{G_t\}_{0 \leq t \leq T}$, 故只有 $\{G_t\}_{0 \leq t \leq T}$ -适应的过程才是可观测的, 投资者的决策依据是信息流 $\{G_t\}_{0 \leq t \leq T}$. Lakner^[3,4] 运用鞅方法, 在部分信息条件下取得了重要进展. 但文献[3]没有给出最优投资策略, 文献[4]的策略计算复杂, 又文献[5,6]分别得到了投资者极大化生命期望消费效用的最优策略, 及相应的信息价值测算公式. 与以上均不同, 本文综合运用随机动态规划原理、Itô 公

式、非线性滤波技术以及鞅与对偶方法, 得到了计算最优投资策略和最优目标函数(间接效用函数)的新途径; 给出了相应双曲绝对风险回避 Arrow-Pratt 系数的效用函数类的最优解.

2 部分信息下的投资模型(Investment model under partial information)

考虑投资者在时间段 $[0, T]$ 内的组合投资问题. 投资者面临的经济环境是不确定的, 它随着时间的变化而变化. 为刻画这种随机环境, 引入概率空间 (Ω, F, P) , 其中每个 $\omega \in \Omega$ 代数直到时刻 T 才最终确定的一个经济状态. 假设市场上有两种资产, 一种是风险资产(如股票), 其价格过程记为 S ; 另一种为无风险资产(如债券), 其价格过程记为 B . 价格动态方程为

$$\begin{cases} dB_t = r_t B_t dt, \\ dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dW_t^1, \\ d\mu_t = a\mu_t dt + b_1 dW_t^1 + b_2 dW_t^2, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1)$$

其中随机过程 $W^1 = \{W_t^1\}_{0 \leq t \leq T}$, $W^2 = \{W_t^2\}_{0 \leq t \leq T}$ 为相互独立的布朗运动. 记

$$\begin{aligned} F_t &\equiv \sigma(W_u^1, W_u^2; 0 \leq u \leq t), \\ G_t &\equiv \sigma(S_u; 0 \leq u \leq t). \end{aligned} \quad (2)$$

在价格动态方程(1)中, 假设随机过程 $\{\mu_t\}_{0 \leq t \leq T}$ 为 $\{F_t\}_{0 \leq t \leq T}$ -适应的, 而随机过程 $\{r_t\}_{0 \leq t \leq T}$, $\{\sigma_t\}_{0 \leq t \leq T}$ 是 $\{G_t\}_{0 \leq t \leq T}$ -适应的, a, b_1, b_2 为确定常数.

注 1 对应模型(1), 文献[4]中的 b_1 为零, 故本文研究的范围更广, 更贴近实际.

传统上, 假设投资者所掌握的信息流是 $\{F_t\}_{0 \leq t \leq T}$ (完备信息), 即投资者可观测到布朗运动及风险资产平均收益率在过去的所有取值, 这显然不合实际. 事实上, 投资者所观测到的只是过去的资产价格, 即他所掌握的信息流为 $\{G_t\}_{0 \leq t \leq T}$ (部分信息), 从而必须对平均收益率进行估计, 我们将在第3节运用非线性滤波技术, 给出这种平均收益率的最优滤波估计.

设投资者具有初始财富 X_0 , 他采用自融资 (Self-Financing) 交易策略—在整个时间段 $(0, T]$ 即不追加投资, 也不抽出资金作为他用. 假设在任意时刻 $t(0 \leq t \leq T)$, 他将比例为 π_t 的财富购买风险资产, 其余全部投资于无风险资产, 则他的财富过程 $X^\pi = \{X_t^\pi\}_{0 \leq t \leq T}$ 是如下随机微分方程的解:

$$dX_t^\pi = [r_t + \pi_t(\mu_t - r_t)]X_t^\pi dt + \sigma_t \pi_t X_t^\pi dW_t^1,$$

$$0 \leq t \leq T.$$

考虑到部分信息, 过程 $\{\pi_t\}_{0 \leq t \leq T}$ 必须是 $\{G_t\}_{0 \leq t \leq T}$ -适应的. 进一步, 假设投资者具有效用函数 $U(\cdot)$, 若相应 π 的终止财富 X_T^π 满足 $E[U^-(X_T^\pi)] < \infty$, 则称策略 π 是容许的, 所有容许策略组成的集合记为 $A(X_0)$. 投资者的投资选择问题可叙述为

$$\max_{\pi \in A(X_0)} E[U(X_T^\pi)], \quad (4)$$

$$\gamma_t = \begin{cases} \gamma_- + 2\sqrt{\Lambda^2 + b_2^2 \sigma^2} \left(1 - \frac{\gamma_0 + \gamma_+}{\gamma_0 - \gamma_-} \exp\left(-\frac{2\sqrt{\Lambda^2 + b_2^2 \sigma^2}}{\sigma^2} t\right) \right)^{-1}, & \text{如果 } \Lambda^2 + b_2^2 \neq 0, \\ \left(\frac{1}{\gamma_0} + \frac{t}{\sigma^2} \right)^{-1}, & \text{如果 } \Lambda = b_2 = 0. \end{cases} \quad (8)$$

其中

$$\Lambda = a\sigma^2 - b_1\sigma, \quad \gamma_{\pm} = \Lambda \pm \sqrt{\Lambda^2 + b_2^2 \sigma^2}.$$

定义新息过程, 其微分为

$$d\bar{W}_t \equiv \frac{1}{\sigma} \left(\frac{dS_t}{S_t} - m_t dt \right). \quad (9)$$

由滤波理论, 过程 $\bar{W} = \{\bar{W}_t\}_{0 \leq t \leq T}$ 关于概率 P 及 σ -

约束条件

$$\begin{cases} dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dW_t^1, \\ d\mu_t = a\mu_t dt + b_1 dW_t^1 + b_2 dW_t^2, 0 \leq t \leq T, \\ dX_t^\pi = [r_t + \pi_t(\mu_t - r_t)]X_t^\pi dt + \sigma_t \pi_t X_t^\pi dW_t^1. \end{cases} \quad (5)$$

其中 $\{S_t\}_{0 \leq t \leq T}$ 是观测过程, $\{\mu_t\}_{0 \leq t \leq T}$ 是不可观测的状态过程. 因此, 式(4)(5)是部分可观测的动态系统最优化问题.

3 非线性 Kalman 滤波估计 (Nonlinear Kalman filtering)

本节借助文献[7]的结论, 导出平均收益率 $\{\mu_t\}_{0 \leq t \leq T}$ 的非线性滤波估计. 记

$$m_t \equiv E[\mu_t | G_t], \quad \gamma_t \equiv E[(\mu_t - m_t)^2 | G_t]. \quad (6)$$

引理 1 若条件分布 $F_{G_0}(x) = P(\mu_0 \leq x | G_0)$ 是均值为 m_0 方差为 γ_0 的正态分布(a.s.), 则条件分布 $F_{G_t}(x) = P(\mu_t \leq x | G_t)$ 也是正态的(a.s.), 其均值与方差分别为 m_t, γ_t .

证 见文献[7]中的定理 11.1.

于是, m_t 是 μ_t 在获得观测信息 G_t 后的最优估计.

引理 2 假设由(1)定义的随机过程 $\{\mu_t, S_t\}_{0 \leq t \leq T}$ 的条件分布 $P(\mu_0 \leq x | G_0)$ 为正态分布 $N(m_0, \gamma_0)$, 且存在常数 c_1, c_2 , 使得 $0 < c_1 < \sigma_2 < c_2$ 几乎处处成立. 则有

$$\begin{cases} dm_t = am_t dt + \frac{b_1 \sigma_t + \gamma_t}{\sigma_t^2} \left(\frac{dS_t}{S_t} - m_t dt \right), \\ \dot{\gamma}_t = 2a\gamma_t + b_1^2 + b_2^2 - \left(\frac{b_1 \sigma_t + \gamma_t}{\sigma_t} \right)^2, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T. \quad (7)$$

证 见文献[7]中定理 12.1.

下设波动率为常数, 即 $\sigma_t \equiv \sigma$. 对文献(7)求解得

域流 $\{G_t\}_{0 \leq t \leq T}$ 为布朗运动. 因策略是自融资的, 故

$$\begin{aligned} dX_t^\pi &= \pi_t X_t^\pi \frac{dS_t}{S_t} + (1 - \pi_t) X_t^\pi r dt. \text{ 所以(3)可表示为} \\ dX_t^\pi &= [r_t X_t^\pi + (m_t - r_t) \pi_t X_t^\pi] dt + \sigma \pi_t X_t^\pi d\bar{W}_t. \end{aligned} \quad (10)$$

同样地, 结合式(9)(7)容易得到

$$\begin{cases} dS_t = m_t S_t dt + \sigma S_t d\bar{W}_t, \\ dm_t = am_t dt + \frac{b_1 \sigma + \gamma_t}{\sigma} d\bar{W}_t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T. \quad (11)$$

4 部分信息最优投资策略一阶条件(First order condition for optimal investment under partial information)

根据上一节,部分信息下的最优投资策略就是如下问题的解:

$$\max_{\pi \in \Lambda(X_0)} E[U(X_T^\pi)], \quad (12)$$

约束条件

$$\begin{cases} dm_t = am_t dt + \frac{b_1 \sigma + \gamma_t}{\sigma} d\bar{W}_t, \\ dX_t^\pi = [r_t + \pi_t(m_t - r_t)]X_t^\pi dt + \sigma \pi_t X_t^\pi d\bar{W}_t, \\ \gamma_t = \begin{cases} \frac{\gamma_0 \sigma^2}{\gamma_0 t + \sigma^2}, & \Lambda = 0, \\ 2\Lambda \left[1 - \left(1 + \frac{\gamma_0}{2\Lambda - \gamma_0} \exp\left(\frac{2\Lambda t}{\sigma^2}\right) \right)^{-1} \right], & \Lambda \neq 0, \end{cases} \\ 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (13)$$

其中初始财富 X_0 、初始估计值 m_0 及初始估计方差 γ_0 为已知常数.

下面假设利率 $\{r_t\}$ 为确定过程. 定义间接效用函数

$$J(t, m_t, X_t^\pi) = \max_{\{\pi_u\}_{t \leq u \leq T}} E[V(X_T^\pi) | G_t].$$

根据动态规划原理,有

$$J(t, m_t, X_t^\pi) = \max_{\{\pi_u\}_{t \leq u \leq t+\Delta}} \{E[J(t+\Delta, m_{t+\Delta}, X_{t+\Delta}^\pi) | G_t]\}. \quad (15)$$

由 Itô 公式得

$$\begin{aligned} J(t+\Delta, m_{t+\Delta}, X_{t+\Delta}^\pi) &= \\ J(t, m_t, X_t^\pi) &+ \int_t^{t+\Delta} J_u(u, m_u, X_u^\pi) du + \\ \int_t^{t+\Delta} J_{m_u}(u, m_u, X_u^\pi) dm_u &+ \\ \int_t^{t+\Delta} J_{X_u^\pi}(u, m_u, X_u^\pi) dX_u^\pi &+ \\ \frac{1}{2} \int_t^{t+\Delta} J_{m_u m_u}(u, m_u, X_u^\pi) d\langle m, m \rangle_u &+ \\ \int_t^{t+\Delta} J_{m_u X_u^\pi}(u, m_u, X_u^\pi) d\langle m, X^\pi \rangle_u &+ \\ \frac{1}{2} \int_t^{t+\Delta} J_{X_u^\pi X_u^\pi}(u, m_u, X_u^\pi) d\langle X^\pi, X^\pi \rangle_u. \end{aligned} \quad (16)$$

根据式(13),易知

$$\begin{cases} d\langle m, m \rangle_u = (b_1 + \frac{\gamma_u}{\sigma})^2 du, \\ d\langle m, X^\pi \rangle_u = \pi_u X_u^\pi (\sigma b_1 + \gamma_u) du, \\ d\langle X^\pi, X^\pi \rangle_u = \sigma^2 \pi_u^2 (X_u^\pi)^2 du, \end{cases} \quad (17)$$

利用 Itô 积分的性质,将式(13)(17)(16)代入式(15),两边除以 Δ ,并令 $\Delta \rightarrow 0$ 可得到 Hamilton-Jacobi-Bellman(HJB)方程

$$\begin{aligned} 0 &= \max_{\pi_t} \{J_t + am_t J_{m_t} + [r_t + (m_t - r_t)\pi_t] X_t^\pi J_{X_t^\pi} + \\ &\frac{1}{2} (b_1 + \frac{\gamma_t}{\sigma})^2 J_{m_t m_t} + \pi_t X_t^\pi (\sigma b_1 + \gamma_t) J_{m_t X_t^\pi} + \\ &\frac{1}{2} \sigma^2 \pi_t^2 (X_t^\pi)^2 J_{X_t^\pi X_t^\pi}\}, \end{aligned} \quad (18)$$

式中为紧凑起见,没有写出间接效用函数的自变量. 假设最优解存在, $J_{X_t^\pi} < 0$, 令式(18)的右边关于 π_t 的一阶导数为零,可得最优投资比例的一阶条件

$$\pi_t = - \frac{(m_t - r_t) J_{X_t^\pi} + (\sigma b_1 + \gamma_t) J_{m_t X_t^\pi}}{\sigma^2 X_t^\pi J_{X_t^\pi X_t^\pi}}. \quad (19)$$

将式(19)代入 HJB 方程(18),得间接效用函数满足偏微分方程

$$\begin{aligned} J_t + am_t J_{m_t} + r_t X_t^\pi J_{X_t^\pi} + \frac{1}{2} (b_1 + \frac{\gamma_t}{\sigma})^2 J_{m_t m_t} - \\ \frac{[(m_t - r_t) J_{X_t^\pi} + (\sigma b_1 + \gamma_t) J_{m_t X_t^\pi}]^2}{2\sigma^2 J_{X_t^\pi X_t^\pi}} = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

终值条件

$$J(T, m_T, X_T^\pi) = U(X_T^\pi). \quad (21)$$

综上所述,我们列出

定理 1 随机最优控制问题(12),(13)的最优解满足一阶条件(19)~(21). 特别地,最优目标函数值(12)等于 $J(0, m_0, X_0)$.

5 鞅与对偶方法(Martingale and duality)

假设 1 财富效用函数 $U:(0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 严格递增、严格凹、连续可微,满足

$$\begin{aligned} U'(0) &\equiv \lim_{x \downarrow 0} U'(x) = \infty, \\ U'(\infty) &\equiv \lim_{x \uparrow \infty} U'(x) = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

引理 3 设函数 $I:(0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ 为函数 $U'(\cdot)$ 的逆函数. 则对任意 $x, y > 0$, 有

$$U[I(y)] \geq U(x) - y[x - I(y)]. \quad (23)$$

证 根据严格凹性函数的几何特性有 $U[I(y)] + y[x - I(y)] \geq U(x)$, 引理由此得证^[2]. 证毕.

记 $\theta_t \equiv (m_t - r)/\sigma$, $Z_t \equiv \exp(-\int_0^t \theta_u d\bar{W}_u - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_u^2 du)$, $\beta_t \equiv \exp(-\int_0^t r_u du)$. 则由式(13)利用 Itô 公式得到

$$\beta_t Z_t X_t^\pi = X_0 + \int_0^t \beta_u Z_u X_u^\pi (\sigma \pi_u - \theta_u) d\bar{W}_u. \quad (24)$$

显然由式(24)可知:对于 $\forall \pi \in A(X_0)$, 过程 $\beta_T Z_T \pi$ 为上鞅. 从而有

$$E[\beta_T Z_T X_T^*] \leq X_0, \quad \forall \pi \in A(X_0). \quad (25)$$

假设 2 $E[\beta_T Z_T I(y\beta_T Z_T)] < \infty$, $y \in (0, \infty)$.

定义函数 $\chi: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ 为 $\chi(y) = E[\beta_T Z_T I(y\beta_T Z_T)]$. 显然, 函数 $\chi(\cdot)$ 为严格递减的连续函数, 其逆函数记为 $\gamma(\cdot)$.

定理 2 记 $X_T^* = I(\gamma(X_0)\beta_T Z_T)$. 则最优目标函数值 $J(0, m_0, X_0) = E[U(X_T^*)]$, 间接效用函数 $J(t, m_t, X_t)$ 关于 (P, G_t) 为正则鞅: $J(t, m_t, X_t) = E[U(X_T^*) | G_t]$.

证 利用引理 3 及(25), 以下不等式

$$\begin{aligned} E[U(X_T^*)] &\geq \\ E[U(X_T^*) + \gamma(X_0)\beta_T Z_T(X_T^* - X_T^*)] &\geq \\ E[U(X_T^*)]. \end{aligned}$$

对 $\forall \pi \in A(X_0)$ 成立. 另一方面由布朗泛函鞅表示定理, X_T^* 是可达的 (attainable), 即存在投资策略 $\pi \in A(X_0)$, 使其相应终止财富为 X_T^* . 因此, $E[U(X_T^*)]$ 为最优目标函数值. 最后由布朗泛函鞅表示的唯一性, 得到 $E[U(X_T^*) | G_t]$ 为对应的间接效用函数, 其鞅性显然. 证毕.

6 HARA 效用函数(HARA utility)

鞅与对偶方法虽然给出了最优终止财富的显式表达式, 但并未得到最优投资策略. 为此, 我们针对 HARA 效用函数类, 利用式(19)导出最优策略的计算途径. HARA 效用函数是一种常见的效用函数类, 其绝对风险回避 Arrow-Pratt 系数为财富水平的倒数, 体现了投资者财富越多, 风险厌恶程度越小的普遍心态, 因其简单实用而被诸多文献引用^[8]. 该类效用函数 $U(\cdot)$ 满足

$$-\frac{xU''(x)}{U'(x)} = \alpha, \quad \alpha \text{ 为常数}. \quad (26)$$

定理 3 设效用函数满足式(26), 且求导与求期望可交换次序, 即

$$\begin{aligned} \frac{\partial E[U(X_T^*) | G_t]}{\partial X_t^*} &= E\left[\frac{\partial U(X_T^*)}{\partial X_t^*} | G_t\right], \\ \frac{\partial^2 E[U(X_T^*) | G_t]}{\partial (X_t^*)^2} &= E\left[\frac{\partial^2 U(X_T^*)}{\partial (X_t^*)^2} | G_t\right]. \end{aligned}$$

则最优投资策略 π^* 可计算为

$$\pi_t^* = \frac{m_t - r_t}{\sigma^2 \alpha} + \frac{\sigma b_1 + \gamma_t}{\sigma^2 \alpha} \times \frac{\partial \ln E[U'(X_T^*) X_T^* | G_t]}{\partial m_t}. \quad (27)$$

证 对任意容许策略 π , 由式(13)可以解出

$$X_T^* = X_t^* \exp\left(\int_t^T \left[r_u + \pi_u(m_u - r_u) - \frac{1}{2}\sigma^2 \pi_u^2\right] du + \int_t^T \sigma \pi_u d\bar{W}_u\right).$$

X_T^*/X_t^* 与过程 X^* 无关, 于是有

$$J_{X_t^*} = \frac{\partial E[U(X_T^*) | G_t]}{\partial X_t^*} = \frac{\partial E[U(X_t^* X_T^*/X_t^*) | G_t]}{\partial X_t^*} =$$

$$E[U'(X_T^*) X_T^*/X_t^* | G_t],$$

同理

$$X_t^* J_{X_t^* X_t^*} = E[U''(X_T^*)(X_T^*)^2/X_t^* | G_t].$$

故利用式(26)得 $X_t^* J_{X_t^* X_t^*} = -\alpha J_{X_t^*}$. 最后注意到

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln E[U'(X_T^*) X_T^* | G_t]}{\partial m_t} &= \\ \frac{\partial \ln E[U'(X_T^*) X_T^*/X_t^* | G_t]}{\partial m_t} &= \\ \frac{J_{m X_t^*}}{J_{X_t^*}}, \end{aligned}$$

定理即可得证.

注 2 i) 证明中假设了求导与求期望可交换次序, 这些假设一般是成立的; ii) 定理 3 与定理 1 给出了计算 HARA 效用函数类的最优解, 其结论可以几乎不改变地推广到比模型(1)更广泛的范围内; iii) 式(27)已是最简形式, 可用 Monte Carlo 方法求解; iv) 从式(27)可以看出, 对于给定的随机经济系统, 最优投资策略完全决定于投资者的风险态度, 即效用函数, 特别地, 最优策略与刻画投资者风险态度的主要指标——相对风险回避系数 α 密切相关, 粗略来说: 超额收益率估计值 $m_t - r_t$ 越大, 风险资产购买比率越大; 投资者越是厌恶风险, 即 α 越大, 风险资产购买比率越小. 显然, 这些结论与直观是一致的.

推论 1 若效用函数 $U(x) = \ln x$, 则有

$$X_T^* = \frac{X_0}{\beta_T Z_T}, \quad \pi_t^* = \frac{m_t - r_t}{\sigma^2}. \quad (28)$$

最优目标函数值为

$$J(0, m_0, X_0) =$$

$$\ln X_0 + E\left[\int_0^T r_u du + \frac{1}{2} \int_0^T \left(\frac{m_u - r_u}{\sigma}\right)^2 du\right]. \quad (29)$$

若效用函数 $U(x) = (x^\rho - 1)/\rho$, 则有

$$\begin{cases} X_T^* = \frac{X_0(\beta_T Z_T)^{1/(\rho-1)}}{E[(\beta_T Z_T)^{\rho/(\rho-1)}]}, \\ \pi_t^* = \frac{m_t - r_t}{\sigma^2(1-\rho)} + \frac{\sigma b_1 + \gamma_t}{\sigma^2(1-\rho)} \times \\ \frac{\partial \ln E[(\beta_T Z_T)^{\rho/(\rho-1)} | G_t]}{\partial m_t}, \end{cases} \quad (30)$$

最优目标函数值为

$$J(0, m_0, X_0) = \frac{1}{\rho} [X_0^\rho (E(\beta_T Z_T)^{\rho/(\rho-1)})^{1-\rho} - 1]. \quad (31)$$

证 注意到 $U(x) = \ln(x)$ 及 $U(x) = (x^\rho - 1)/\rho$ 均为 HARA 效用函数, 利用定理 1 及定理 3 易证.

参考文献(References):

- [1] MERTON R C. *Continuous-Time Finance* [M]. Cambridge: Blackwell, 1990.
- [2] KARATZAS I, LEHOCZKY J P, SHREVE S E, XU G L. Martingale and duality methods for utility maximization in an incomplete market [J]. *SIAM J Control and Optimization*, 1991, 29(3): 702 - 730.
- [3] LAKNER P. Utility maximization with partial information [J]. *Stochastic Process and Their Applications*, 1995, 56(2): 247 - 273.
- [4] LAKNER P. Optimal trading strategy for an investor: the Case of partial information [J]. *Stochastic Process and Their Applications*, 1998,

76(1): 77 - 97.

- [5] 杨昭军, 李致中, 邹捷中. 部分信息下的最优投资消费策略显式解[J]. *应用概率统计*, 2001, 16(4): 390 - 398.
(YANG Zhaojun, LI Zhizhong, ZOU Jiezhong. An explicit solution to optimal investment and consumption with partial information [J]. *Chinese Journal of Applied Probability and Statistics*, 2001, 16(4): 390 - 398.
- [6] YANG Z J, MA C Q. Optimal trading strategy with partial information: the simplified and generalized models [J]. *Int J of Theoretical & Applied Finance*, 2001, 4(5): 759 - 772.
- [7] LIPTSER R S, SHIRYAYEV A N. *Statistics of Random Process* [M]. New York: Springer-Verlag, 1977.
- [8] FÖLLMER H, SCHIED A. *Stochastic Finance: An Introduction in Discrete Time* [M]. Berlin: Walter de Gruyter, 2002: 60 - 73.

作者简介:

杨招军 (1964—), 男, 博士, 教授, 研究领域为金融数学、金融工程, E-mail: zjyang@hnu.net.cn.