

凸锥型不确定线性切换系统的二次镇定

孙文安, 赵 军

(东北大学 教育部流程工业综合自动化重点实验室 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110004)

摘要: 研究具有凸锥型不确定性的线性切换系统的二次鲁棒稳定化问题. 这种不确定性是由若干已知常数矩阵所张成的凸锥构成的. 利用凸组合技术, 分别给出了连续和离散线性切换系统的鲁棒二次可稳定条件及切换律的设计方法. 按照这些条件, 只要判断张成凸锥的顶点矩阵的某个凸组合是否可稳即可. 最后给出仿真例子.

关键词: 切换系统; 二次镇定; 凸锥型不确定性

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Quadratic stabilization of switched linear systems with uncertainties of convex cone

SUN Wen-an, ZHAO Jun

(Key Laboratory of Process Industry Automation, Ministry of Education,

School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang Liaoning 110004, China)

Abstract: The problem of quadratic stabilization of switched linear systems with uncertainties of convex cone is studied. The uncertainties form a convex cone spanned by a number of known constant matrixes. By using convex combination technique, quadratic stabilization conditions are derived for continuous switched linear systems and discrete switched linear systems, respectively. The conditions involve only the matrixes of extreme points. The associated switching laws are also designed. An example is given to illustrate the method.

Key words: switched systems; quadratic stabilization; uncertainties with convex cone

1 引言 (Introduction)

切换系统是一类在实际中有广泛代表性, 同时又形式较为简单的混杂系统, 近些年来受到广泛重视^[1]. 切换系统的稳定性研究是一核心问题, 已得到了相当多的结果. 对于任意切换下的稳定性, 存在共同 Lyapunov 函数是充分必要条件^[1,2]. 已提出了不少方法来构造共同 Lyapunov 函数^[3,4], 但多数切换系统并不存在共同 Lyapunov 函数, 但仍可能通过适当设计切换策略来达到稳定性. 因而更多的注意力放在如何设计切换策略上来. 在这方面, 单 Lyapunov 函数方法, 特别是凸组合方法^[2]及多 Lyapunov 函数技术^[5]是有效的方法.

二次稳定性是一种理想的系统性能. 对于线性系统, 渐进稳定性和二次稳定性是等价的. 而对于线性切换系统, 渐进稳定性却不一定能保证是二次稳定性. 线性切换系统的这种特殊属性主要是由于切换信号的作用造成的. 对于线性切换系统, 二次稳定

性的研究成了一个单独的课题.

实际系统中的不确定性常常是难以避免的, 因而不确定系统的鲁棒控制就是一个十分重要的问题. 由于切换系统中连续动态和离散切换信号的交互作用, 其鲁棒控制的研究较为困难. 特别是鲁棒二次稳定化问题, 结果尚相当少, 人们不得不对于不确定的特殊形式进行研究. 最近文献[6]对于由 2 个子系统组成的线性切换系统, 当不确定性是由若干个已知矩阵所张成的凸锥时, 提出了二次可稳的条件和切换律设计方法. 但这种不确定性要求是有界的且之和为 1, 这在实际中十分特殊.

本文对于由任意有限个子系统组成的线性切换系统, 研究不确定性由已知矩阵张成的凸锥时的鲁棒二次稳定化问题. 这种不确定性可以是无界的. 利用凸组合技术给出了可鲁棒二次稳定化的条件, 并构造了切换律. 所得结果是用张成凸锥的顶点矩阵来表出的, 易于检验和计算.

2 连续切换系统的鲁棒二次稳定化(Robustly quadratic stabilization of continuous switched systems)

本节考虑如下的不确定连续切换系统

$$\dot{x} = A_{\sigma}x. \quad (1)$$

其中: $x \in \mathbb{R}^n$ 为状态, $\sigma \in \{1, 2, \dots, m\}$ 为切换信

号, $A_i = \sum_{j=1}^{N_i} \mu_{ij} A_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, m$, μ_{ij} 为不确定参量,

满足 $\mu_{ij} \geq 0$, $\sum_{j=1}^{N_i} \mu_{ij} > 0$, A_{ij} 是已知常数 $n \times n$ 矩阵.

显然所有可能的不确定矩阵 A_i 构成了以 A_{ij} 为顶点但不含零点的凸锥.

定义 1 系统(1)称为是鲁棒二次可稳的, 若存在正定矩阵 P 和具有状态反馈形式的切换律 $\sigma = \sigma(x)$, 使得对任意的不确定参量 μ_{ij} , Lyapunov 函数 $V = x^T P x$ 沿着系统(1)的轨线的导数均满足 $\frac{d}{dt} V(x(t)) < 0$.

我们的目的是要找出系统(1)鲁棒二次可稳的条件并设计切换律. 显然, 如果存在某个 i 和正定矩阵 P 使得

$$A_{ij}^T P + P A_{ij} < 0, \quad j = 1, 2, \dots, N_i, \quad (2)$$

则不确定矩阵 A_i 对于任意的不确定参量 μ_{ij} 均是稳定的. 此时若令 $\sigma \equiv i$, 则鲁棒二次稳定化问题即可解决, 这是一种平凡的情况. 因而我们假设对任意 i , 式(2)均不成立. 我们需要下面的引理, 证明易见.

引理 1 设 a_{ij_i} ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j_i \leq N_i$) 是一组实数. 若 $\sum_{i=1}^m a_{ij_i} < 0$ 对 $\forall 1 \leq j_i \leq N_i$ 均成立, 则一定存在某个 i 使 $a_{ij_i} < 0, 1 \leq j_i \leq N_i$.

下面利用凸组合方法给出系统(1)鲁棒二次可稳的一个条件和切换律的设计方法.

定理 1 如果存在正定矩阵 P 和常数 $\lambda_{ik_i} \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, m, k_i = 1, 2, \dots, N_i$) 使得

$$\sum_{i=1}^{N_i} \lambda_{ik_i} (A_{ik_i}^T P + P A_{ik_i}) < 0, \quad k_i = 1, 2, \dots, N_i, \quad (3)$$

则系统(1)是鲁棒二次可稳的, 其切换律由下式决定:

$$\sigma(x) = \arg \min \{V_i(x) \triangleq \max_{k_i} \{x^T (A_{ik_i}^T P + P A_{ik_i}) x < 0, \\ k_i = 1, 2, \dots, N_i\}\}.$$

证 由式(3)知对任意 $x \neq 0$ 有

$$\sum_{i=1}^{N_i} \lambda_{ik_i} x^T (A_{ik_i}^T P + P A_{ik_i}) x < 0, \quad k_i = 1, 2, \dots, N_i. \quad (5)$$

注意到式(5)对任意的 $k_i \in \{1, 2, \dots, N_i\}$ 均成立及 $\lambda_{ik_i} \geq 0$, 由引理 1 知必存在某个 i 使对 $\forall k_i$ 有

$$x^T (A_{ik_i}^T P + P A_{ik_i}) x < 0, \quad (6)$$

因而切换律(4)定义有效.

下面计算 Lyapunov 函数 $V = x^T P x$ 沿着系统(1)的轨线的导数

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x(t)) &= \\ x^T [(\sum_{j=1}^{N_i} \mu_{ij} A_{ij})^T P + P (\sum_{j=1}^{N_i} \mu_{ij} A_{ij})] x &= \\ \sum_{j=1}^{N_i} \mu_{ij} x^T (A_{ij}^T P + P A_{ij}) x. \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $i = \sigma(x)$ 由式(4)定义. 注意到 $\mu_{ij} \geq 0$ 及 $\sum_{j=1}^{N_i} \mu_{ij} > 0$ 知 $\frac{d}{dt} V(x(t)) < 0$, 即系统(1)是鲁棒二次稳定的.

注 当 $m = 2$ 和 $\sum_{j=1}^{N_i} \mu_{ij} = 1$ 时, 不确定性具有凸胞形式, 定理 1 退化为[6]中的结果. 当不确定性消失时, 即 $N_i = 1, \mu_{i1} = 1$, 定理 1 便成为著名的凸组合条件. 如果不确定性满足 $\sum_{j=1}^{N_i} \mu_{ij} \geq \epsilon > 0$, 则可得到更强的结果: 即 $\frac{d}{dt} V(x(t)) < -\delta \|x\|^2$. 其中 $\delta > 0$ 是某一常数.

3 离散切换系统的鲁棒二次稳定化(Robustly quadratic stabilization of discrete switched systems)

本节讨论离散切换系统

$$x(k+1) = A_{\sigma} x(k). \quad (8)$$

其中: $x(k) \in \mathbb{R}^n$ 为状态, $\sigma \in \{1, 2, \dots, m\}$ 为切换

信号, $A_i = \sum_{j=1}^{N_i} \mu_{ij} A_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, m$, μ_{ij} 为不确定参

量, 满足 $\mu_{ij} \geq 0$, $\sum_{j=1}^{N_i} \mu_{ij} < \frac{1}{\epsilon}$, $\epsilon > 0$ 为已知常数, A_{ij} 是已知常数 $n \times n$ 矩阵.

定义 2 系统(8)称为是鲁棒二次可稳的, 若存在正定矩阵 P 和具有状态反馈形式的切换律 $\sigma = \sigma(x(k))$, 使 Lyapunov 函数 $V(x(k)) = x^T(k) P x(k)$ 沿着系统(8)的轨线的差分满足

$$V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0.$$

定理 2 如果存在常数 $\lambda_{ik_i} \geq 0$ 和正定矩阵 P 使得

$$\sum_{i=1}^{N_i} \lambda_{ik_i} (A_{ik_i}^T P A_{ik_i} - \varepsilon^2 P) < 0, \quad k_i = 1, 2, \dots, N_i, \quad (9)$$

$$A_{ij}^T P A_{iq} + A_{iq}^T P A_{ij} - 2\varepsilon^2 P \leq 0, \quad (10)$$

$$j, q = 1, 2, \dots, N_i, \quad j \neq q,$$

则系统(8)是鲁棒二次可稳的,其切换律由下式决定:

$$\sigma = \sigma(x(k)) = \arg \min \{V_i(x(k)) \triangleq \max_{k_i} \{x^T(k)(A_{ik_i}^T P A_{ik_i} - \varepsilon^2 P)x(k) < 0, \quad k_i = 1, 2, \dots, N_i\}\}. \quad (11)$$

证 由式(9)知对 $\forall x(k) \neq 0$ 有

$$\sum_{i=1}^{N_i} \lambda_{ik_i} x^T(k)(A_{ik_i}^T P A_{ik_i} - \varepsilon^2 P)x(k) < 0, \quad k_i = 1, 2, \dots, N_i. \quad (12)$$

注意到 $\lambda_{ik_i} \geq 0$, 由引理1知必存在某个 i 使对 $\forall k_i = 1, 2, \dots, N_i$ 有

$$x^T(k)(A_{ik_i}^T P A_{ik_i} - \varepsilon^2 P)x(k) < 0, \quad (13)$$

因而式(11)定义的切换律有效.

Lyapunov 函数 $V(x(k)) = x^T(k)Px(k)$ 沿着系统(8)的轨线满足

$$V(x(k+1)) - V(x(k)) = x^T(k) \left(\sum_{j,q=1}^{N_i} \mu_{ij} \mu_{iq} A_{ij}^T P A_{iq} - P \right) x(k). \quad (14)$$

由于

$$\begin{aligned} x^T(k) \left(\sum_{j,q=1}^{N_i} \mu_{ij} \mu_{iq} A_{ij}^T P A_{iq} \right) x(k) = \\ \sum_{j=1}^{N_i} \mu_{ij}^2 x^T(k) A_{ij}^T P A_{ij} x(k) + \\ \sum_{1 \leq j < q \leq N_i} \mu_{ij} \mu_{iq} x^T(k) (A_{ij}^T P A_{iq} + A_{iq}^T P A_{ij}) x(k). \end{aligned} \quad (15)$$

将式(15)代入式(14)并注意到 $(\sum_{j=1}^{N_i} \mu_{ij})^2 = \sum_{j=1}^{N_i} \mu_{ij}^2 +$

$\sum_{1 \leq j < q \leq N_i} 2\mu_{ij} \mu_{iq}$, 得到

$$\begin{aligned} V(x(k+1)) - V(x(k)) = \\ \sum_{j=1}^{N_i} \mu_{ij}^2 x^T(k) (A_{ij}^T P A_{ij} - \varepsilon^2 P) x(k) + \\ \sum_{1 \leq j < q \leq N_i} \mu_{ij} \mu_{iq} x^T(k) (A_{ij}^T P A_{iq} + A_{iq}^T P A_{ij} - 2\varepsilon^2 P) x(k) + \\ x^T(k) [(\sum_{j=1}^{N_i} \mu_{ij})^2 \varepsilon^2 - 1] P x(k). \end{aligned} \quad (16)$$

由切换律(11)和(10)分别保证了上式右端第1项小

于0和第2项小于等于0.又注意到 $\sum_{j=1}^{N_i} \mu_{ij} < \frac{1}{\varepsilon}$ 知第3项也小于0,故得 $V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0$.

4 仿真例子(Simulation example)

考虑如下具有凸锥不确定性的线性切换系统

$$\dot{x} = \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} A_{ij} x, \quad i = 1, 2. \quad (17)$$

其中

$$A_{11} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mu_{11} = 0.3, \quad \mu_{12} = 0.9,$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mu_{21} = 0.5, \quad \mu_{22} = 0.7,$$

显而易见,凸锥顶点 A_{11} 和 A_{12} 都不稳定, A_{21} 和 A_{22} 也是不稳定的.矩阵

$$A_1 = 0.3A_{11} + 0.9A_{12} = \begin{bmatrix} -1.2 & 1.5 \\ 1.5 & -1.2 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = 0.5A_{21} + 0.7A_{22} = \begin{bmatrix} -1.2 & -1.7 \\ -1.7 & -1.2 \end{bmatrix}$$

也是不稳定的.初始状态为 $x_0 = [-0.5 \quad 1]^T$, 取 $\lambda_{11} = \lambda_{22} = \frac{1}{2}$, $\lambda_{12} = \frac{1}{3}$, $\lambda_{21} = \frac{2}{3}$, $P = I_2$, 按定理1所设计的切换律进行切换.图1是切换系统的状态曲线图,说明定理中的结论是完全正确的.

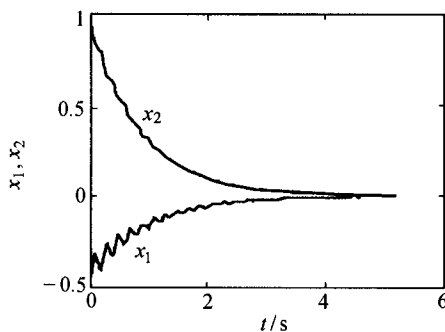


图1 切换系统(17)在切换律(4)下的状态曲线
Fig. 1 The state curves of switched system (17) under switching law (4)

5 结束语(Conclusions)

本文分别针对连续切换系统和离散切换系统,利用凸组合方法提出了具有凸锥型的不确定的鲁棒二次稳定化的条件和切换律的设计方法.这种凸锥型不确定性比文献中讨论的凸多胞型的不确定性更加广泛,因为是无界的不确定性.在连续情形,不确定性的界不需知道.而对于离散情形,不确定性的上界需要知道,这是由于离散系统的 Lyapunov 方程的

特殊性决定的。

参考文献(References):

- [1] LIBERZON D, MORSE A S. Basic problems in stability and design of switched systems [J]. *IEEE Control System Magazine*, 1999, 19(1): 59–70.
- [2] DECARLO R A, BRANICKY M S, PETTERSSON S, et al. Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid system [J]. *Proceedings of the IEEE*, 2000, 88(7): 1069–1082.
- [3] SHORTER R, NARENDRA K S, MASON O. A result on common quadratic Lyapunov functions [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2003, 48(1): 110–113.
- [4] HU B, ZHAI G, MICHE A N. Common quadratic Lyapunov-like functions with associated switching regions for two unstable second-order LTI systems [J]. *Int J Control*, 2002, 75(14): 1127–1135.

- [5] BRANICKY M S. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1998, 43(4): 475–482.
- [6] ZHAI G, LIN H, ANTSAKLIS P. Quadratic stabilizability of switched linear systems with polytopic uncertainties [J]. *Int J Control*, 2003, 76(7): 747–753.
- [7] SKAFIDAS E, EVANS R J, SAVKIN A V, et al. Stability results for switched controller systems [J]. *Automatica*, 1999, 35(4): 553–564.

作者简介:

孙文安 (1956—), 男, 东北大学博士研究生, 大连大学教授, 主要研究方向为混合系统、切换系统的稳定性研究, E-mail: sunwenan@tom.com;

赵军 (1957—), 男, 教授, 博士生导师, 中国自动化学会控制理论委员会委员, 主要研究方向为混杂系统、非线性控制和鲁棒控制。

(上接第 782 页)

- [7] GONG Dunwei, Sun Xiaoyan. Research on a novel adaptive genetic algorithm [C]// *Proc of the 7th IEEE International Symposium on Industrial Electronics*. Piscataway, NJ: IEEE Press, 2002: 357–360.
- [8] 周明, 孙树栋. 遗传算法原理及应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 1999.
(ZHOU Ming, SUN Shudong. *Theory and Application of Genetic Algorithm* [M]. Beijing: The National Defence Industry Press, 1999.)

作者简介:

巩敦卫 (1970—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为进化计算和智能控制, E-mail: dwgong@vip.163.com;

孙晓燕 (1978—), 女, 中国矿业大学博士研究生, 主要研究领域为进化计算和网络计算, E-mail: xysun78@188.com.

(上接第 789 页)

- [2] HALE J K. *Theory of Functional Differential Equations* [M]. New York: Springer-Verlag, 1977: 131–132.
- [3] CLARKSON I, GOODALL D. On the stabilizability of imperfectly known nonlinear delay systems of neutral type [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2000, 45(12): 2326–2332.
- [4] FIAGBEDZI Y. A Feedback stabilization of neutral systems via the transformation technique [J]. *Int J of Control*, 1994, 59(6): 1579–1589.
- [5] XIE L. Output feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainty [J]. *Int J of Control*, 1996, 63(4): 741–750.
- [6] PARK J H, WON R. Stability analysis for neutral delay-differential systems [J]. *J of Franklin Institute*, 2000, 337(1): 1–9.
- [7] HAN Q L. Robust stability of uncertain delay-differential systems of neutral type [J]. *Automatica*, 2002, 38(4): 719–723.
- [8] XU S Y, LAM J, YANG C W. H_∞ and positive-real control for linear neutral delay systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2001, 46(8): 1321–1326.
- [9] MAHMOUD M S. Robust H_∞ control of linear neutral systems [J]. *Automatica*, 2000, 36(5): 757–764.
- [10] WANG Z, LAM J, BURNHAM K J. Stability analysis and observer

design for neutral delay systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2001, 47(3): 478–483.

- [11] KOLMANOVSKII V, MYSHKIS A. *Applied Theory of Functional Differential Equations* [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992: 129–130.
- [12] BOYD S, GHAOUI L, FERON E, et al. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory* [M]. Philadelphia, PA: SIAM, 1994: 28–32.

作者简介:

张友 (1971—), 男, 现在东北大学信息学院做博士后研究, 主要研究领域为时滞系统的稳定性分析与综合及随机控制, E-mail: zhangyo97@nenu.edu.cn;

翟丁 (1970—), 男, 讲师, 现在东北大学博士后研究, 主要研究领域为大系统的分散控制与鲁棒控制, E-mail: zhalding@etang.com;

刘满 (1964—), 男, 博士, 副教授, 主要研究方向为复杂系统的控制理论、模糊控制;

张嗣瀛 (1925—), 男, 中国科学院院士, 教授, 博士生导师, 从事复杂控制系统、微分对策等研究。