

文章编号: 1000-8152(2005)05-0829-05

基于 Lyapunov 方法的一类非线性系统分段线性化自适应控制

刘小河¹, 殷杰², 张奇志¹

(1. 北京机械工业学院 计算机及自动化系, 北京 100085; 2. 清华大学 自动化系, 北京 100084)

摘要: 非仿射非线性系统非线性系统领域的研究中还不够成熟. 本文针对一类非仿射单输入单输出的非线性系统, 采用分段线性化方法来处理对象的非线性, 基于 Lyapunov 第二方法对分段线性化后的系统进行了自适应律的设计, 并且证明了其渐近稳定性, 这为使用分段线性化方法来处理一类非线性系统提供了理论支持, 基于所设计的自适应律, 以电弧炉电极调节系统的自适应控制为例, 进行了数字仿真. 仿真结果表明了该设计方法的有效性, 为处理一类非线性系统提供有益的思路.

关键词: 非线性系统; 分段线性化; Lyapunov 方法; 自适应控制

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Adaptive control of a class of nonlinear system using piecewise linearization based on Lyapunov's law

LIU Xiao-he, YIN Jie, ZHANG Qi-zhi

(1. Department of Computer Science and Automation, Beijing Institution of Machinery, Beijing, 100085 China;

2. Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: The piecewise linearization method is used to approach the nonlinearity of the plant when a class of non affine SISO nonlinear system is under consideration. The adaptive control law is induced on the base of the Lyapunov's second law to ensure the global stability of the system and verified by the plant of the electrode regulator system of arc furnace. The simulation result shows the effectiveness of the design, which is of significant importance in dealing with a class of nonlinear system and can provide meaningful idea for the solving of some nonlinear system problem.

Key words: nonlinear system; piecewise-linear; Lyapunov design; adaptive control

1 引言 (Introduction)

非线性系统的自适应控制日益受到人们的广泛关注, 但是由于非线性系统的多样性和复杂性, 至今尚未提出普遍而有效的设计方法. 近年来, 对于仿射非线性系统的稳定自适应控制已经取得了一些成果^[1~6]. 而对于非仿射的非线性系统, 研究结果则很少.

但是, 对具有非线性特征的工业过程进行模型参考自适应控制时, 常常要求一旦自适应回路失效时, 系统仍能闭环运行. 这样, 系统的模型将不能表示为非线性仿射系统. 因此, 研究对这一类系统进行自适应控制的方法, 是一个具有实际意义的课题, 具有较强的学术价值.

对于非仿射的非线性系统, 难于通过选择输入的形式得到稳定的自适应控制. 笔者曾提出采用分段线性化的方法来处理一类非仿射的非线性控制系统控制对象的本质非线性, 在此基础上提出了一种

自适应控制方法^[7]. 但是, 对该方法的稳定性问题没有进行理论分析. 本文在文献^[6]的基础上, 基于 Lyapunov 第二方法^[8~10], 得到了可以确保系统全局渐近稳定的自适应律, 以电弧炉电极调节系统的自适应控制为例进行了数字仿真, 仿真实验表明此方法有满意的控制效果. 研究结果对一类非仿射的非线性系统的自适应控制有较大的参考价值.

2 系统的描述 (Description of the system)

由非线性系统的分解定理, 大多数描述控制对象模型的非线性动态系统在很弱的条件下可以分解为一个非线性静态系统和一个线性动态系统的串联组合. 因此, 不失一般性, 我们考虑如图 1(a) 所示非线性控制系统. 该系统的前向通道由一个线性系统 (A, B) 和一个静态非线性环节 $f(\cdot)$ 串接而成. 反馈回路 F_p 是增益矩阵或者动态补偿器. 由于 u' 与 x_p 相关, 故这是一类非仿射的非线性控制系统. 现将该系统的静态非线性环节 $f(\cdot)$ 分段线性化, 采用 N 条

斜率与截距不同的线段来逼近原非线性函数,即

$$\hat{f}(x) = K_i x + \gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1)$$

显然,对于 N 足够大时,总可以做到,对于任意给定的 ξ ,有 $\sup_{x \in I} \|f(x) - \hat{f}(x)\| < \xi$. 于是,经过分段线性化后的第 i 分段区对应的非线性系统如图 1(b) 所示. 经过这样的处理以后, K_i, γ_i 分别为第 i 个分区的斜率和截距,是输入变量的阶梯函数.

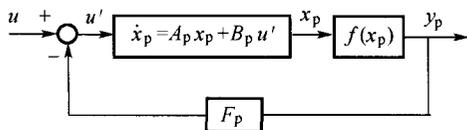


图 1(a) 分段线性化前的非线性系统
Fig. 1(a) Origin nonlinear system

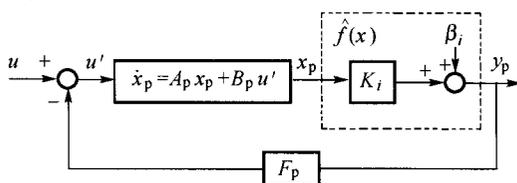


图 1(b) 分段线性化后的非线性系统

Fig. 1(b) Nonlinear system after piecewise nonlinearization

我们给出被控对象用分段线性化进行处理后的系统描述,并且假设被控对象的非线性环节处于第 j 个分区.

$$\begin{cases} \dot{x}_p = A_p x_p + B_p u', \\ y_p = f(x_p) = K_j x_p + \gamma_j, \quad j = 1, 2, \dots, N, \\ u' = u - F_p y_p, \end{cases} \quad (2)$$

其中: $A_p \in \mathbb{R}^{n \times n}, B_p \in \mathbb{R}^{n \times 1}, x_p \in \mathbb{R}^n, K_j \in \mathbb{R}^{1 \times n}, \gamma_j \in \mathbb{R}^1, F_p \in \mathbb{R}^1$.

3 自适应系统设计(Design of adaptive control)

下面,我们采用模型参考自适应方法来设计控制系统,并且找出 Lyapunov 函数,设计出使系统全局渐近稳定性的自适应律.

设参考模型的非线性环节 $f(\cdot)$ 与控制对象完全相同,将参考模型的非线性环节 $f(\cdot)$ 分段线性化,并设参考模型的非线性环节 $f(\cdot)$ 处于线性分区的第 i 段,则可以得到参考模型第 i 段的描述为

$$\begin{cases} \dot{x}_M = A_M x_M + B_M u', \\ y_M = f(x_M) = K_i x_M + \gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ u' = u - F_M y_M, \end{cases} \quad (3)$$

其中: $A_M \in \mathbb{R}^{n \times n}, B_M \in \mathbb{R}^{n \times 1}, x_M \in \mathbb{R}^n, K_i \in \mathbb{R}^{1 \times n}, \gamma_i \in \mathbb{R}^1, F_M \in \mathbb{R}^1$ 分别为与 $A_p, B_p, x_p, K_j, \gamma_j, F_p$ 的阶数相对应.

对式(2)(3)加以整理,即有

$$\begin{aligned} \dot{x}_M &= (A_M - B_M F_M K_i) x_M + \\ & B_M (u - F_M \gamma_i), \quad i = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= (A_p - B_p F_p K_j) x_p + \\ & B_p (u - F_p \gamma_j), \quad j = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (5)$$

我们采用参数自适应的控制方式,自适应控制系统框图如图 2 所示.图中, $W(t) \in \mathbb{R}^{1 \times n}, R(t) \in \mathbb{R}^1$.

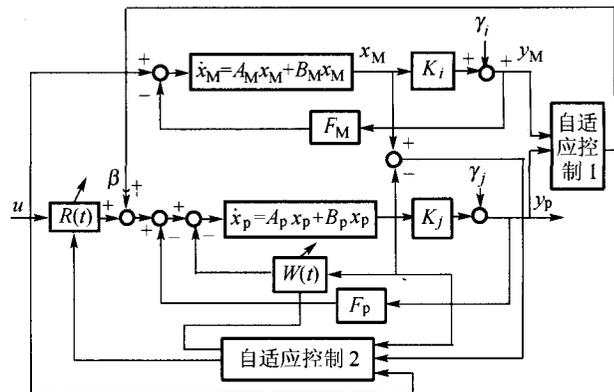


图 2 自适应控制系统框图

Fig. 2 Block diagram of adaptive control

自适应控制 1 是为了确保系统满足 Lyapunov 方程成立而给定的一个补偿信号 β , 自适应控制 2 用于调节前馈矩阵 $R(t)$ 和状态反馈矩阵 $W(t)$, 以使误差 $e \rightarrow 0$.

对于图 2 所示的非线性系统的模型参考自适应系统,采用分段线性化方法,在下列条件下,可以保证系统的全局渐近稳定.

定理 对于图 2 所示的非线性自适应控制系统,在下列条件下,可以保证系统的全局渐近稳定.

1) 存在 P_i 使 Lyapunov 方程

$$(A_M - B_M F_M K_i)^T P_i + P_i (A_M - B_M F_M K_i) = -Q_i$$

有唯一解;

2) $\beta, W(t), R(t)$ 满足

$$\begin{cases} \beta = F_p \gamma_j - B_p^+ B_M F_M \gamma_i, \\ W(t) = -B_p^+ \left[\int_0^t P_i e^{x_p^T \Gamma_1} \Gamma_1 dt + \tilde{F}_0 - \right. \\ \quad \left. (A_M - A_p - B_M F_M K_i + B_p F_p K_j) \right], \\ R(t) = B_p^+ \int_0^t P_i e^{u^T \Gamma_2} \Gamma_2 dt, \end{cases} \quad (6)$$

其中: B_p^+ 为 B_p 的左伪逆, $\Gamma_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}, \Gamma_2 \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ 的两个正定阵, $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为对称正定阵,对应于参考模型处于第 i 段分区.

证 系统中对象的状态方程为

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= A_p x_p + B_p [R(t)u - W(t)x_p - \\ & F_p (K_j x_p + \gamma_j) + \beta]. \end{aligned} \quad (7)$$

设各个状态变量均是可测的,所以可以取广义状态误差 $e = x_M - x_p$, 将方程(4)与(7)相减,并整理可得

$$\dot{e} = (A_M - B_M F_M K_i) e + [A_M - B_M F_M K_i - A_p + B_p F_p K_j + B_p W(t)] x_p + [B_M - B_p R(t)] u + B_p F_p \gamma_j - B_M F_M \gamma_i - B_p \beta. \quad (8)$$

取 β 满足

$$B_p \beta = [B_p F_p \gamma_j - B_M F_M \gamma_i]. \quad (9)$$

取 $B_p^+ = (B_p^H B_p)^{-1} B_p^H$, 在 B_p 列满秩时^[11], B_p^+ 有唯一解.

即
$$\beta = F_p \gamma_j - B_p^+ B_M F_M \gamma_i.$$

同时令

$$\begin{cases} \tilde{A} = A_M - B_M F_M K_i, \\ \tilde{F} = A_M - B_M F_M K_i - A_p + B_p F_p K_j + B_p W(t), \\ \tilde{K} = B_M - B_p R(t), \end{cases} \quad (10)$$

则有

$$\dot{e} = \tilde{A} e + \tilde{F} x_p + \tilde{K} u. \quad (11)$$

取 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2} [e^T P_i e + \text{tr}(\tilde{F} \Gamma_1^{-1} \tilde{F}^T) + \text{tr}(\tilde{K} \Gamma_2^{-1} \tilde{K}^T)]. \quad (12)$$

则有

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \frac{1}{2} [e^T P_i \dot{e} + e^T P_i \dot{e} + \text{tr}(\dot{\tilde{F}} \Gamma_1^{-1} \tilde{F}^T) + \\ & \text{tr}(\tilde{F} \Gamma_1^{-1} \dot{\tilde{F}}^T) + \text{tr}(\dot{\tilde{K}} \Gamma_2^{-1} \tilde{K}^T) + \text{tr}(\tilde{K} \Gamma_2^{-1} \dot{\tilde{K}}^T)]. \end{aligned} \quad (13)$$

将式(11)代入式(13),同时利用迹的性质^[9],可以把式(13)约化为

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \frac{1}{2} [e^T (\tilde{A}^T P_i + P_i \tilde{A}) e + \text{tr}(\tilde{F}^T P_i e x_p^T + \\ & \tilde{F}^T \dot{\tilde{F}} \Gamma_1^{-1}) + \text{tr}(\tilde{K}^T P_i e u^T + \tilde{K}^T \dot{\tilde{K}} \Gamma_2^{-1})]. \end{aligned} \quad (14)$$

因此令

$$\tilde{A}^T P_i + P_i \tilde{A} = -Q_i, \quad (15)$$

Q_i 为与参考模型处于第 i 段分区相对应的对称正定矩阵.同时令

$$\begin{cases} \tilde{F}^T P_i e x_p^T + \tilde{F}^T \dot{\tilde{F}} \Gamma_1^{-1} = 0, \\ \tilde{K}^T P_i e u^T + \tilde{K}^T \dot{\tilde{K}} \Gamma_2^{-1} = 0. \end{cases} \quad (16)$$

则可以保证 V 为正定,而 \dot{V} 为负定.

由式(16)可得

$$\begin{cases} \dot{\tilde{F}} = -P_i e x_p^T \Gamma_1, \\ \dot{\tilde{K}} = -P_i e u^T \Gamma_2. \end{cases} \quad (17)$$

即

$$\tilde{F} = -\int_0^t P_i e x_p^T \Gamma_1 dt + \tilde{F}_0. \quad (18)$$

将式(10)代入式(18),则

$$\begin{aligned} W(t) = & -B_p^+ [\int_0^t P_i e x_p^T \Gamma_1 dt + \tilde{F}_0 - \\ & (A_M - A_p - B_M F_M K_i + B_p F_p K_j)]. \end{aligned} \quad (19)$$

同理

$$B_M - B_p R(t) = -\int_0^t P_i e u^T \Gamma_2 dt + \tilde{K}_0. \quad (20)$$

取

$$\tilde{K}_0 = B_M, \text{ 则 } R(t) = B_p^+ \int_0^t P_i e u^T \Gamma_2 dt, \quad (21)$$

因此式(15)可以写为

$$(A_M - B_M F_M K_i)^T P_i + P_i (A_M - B_M F_M K_i) = -Q_i. \quad (22)$$

证毕.

从式(22)可以看出,该 Lyapunov 方程的解 P_i 只与参考模型所处的分区有关.与被控对象所处的分区无关.

由于 $K_i = [k_i, 0, 0, \dots, 0]$, k_i 是第 i 段分区的斜率,是人为划分的, A_M, B_M, F_M 是人为设计出来的确保某些性能指标的矩阵,我们只要保证对于任意的区间 i , $A_M - B_M F_M K_i$ 的特征根均为负数,那么,式(21)就可以满足.实际上,对于某些实际所遇到的系统,我们可以做到

$$P_i = P_j, i \neq j, 0 \leq i, j \leq N.$$

即对于不同的分区,可以选择同一个 P , 使得等式(21)左边为负定.

4 仿真实例 (Simulations)

为了验证以上自适应律的有效性,我们将其用于电弧炉电极调节系统的自适应控制.以下我们简单介绍一下电弧炉电极调节系统的物理组成.

图3(a)为电弧炉电极调节系统的示意图,图3(b)为电弧炉电极调节系统的方框图.电弧的电压和电流信号经过它们的测量回路,分别转换成直流电压信号与给定输入进行比较.它们的差值信号通过调节器进入触发回路来控制晶闸管整流电压,由这个电压控制的直流或交流电动机来带动机械传动机构,使电极上下移动来调节电弧长度,维持电弧电流和电压在某一个设定值上.

电弧炉电极调节系统是一个非常复杂的非线性系统,它具有非线性(电弧电阻)、随机性(弧长扰动)、时变性(炉底电阻)、三相耦合等多种特征.在这

里,电弧炉的主电路实质上是一个将弧长映射为电弧电流的非线性环节,从工程应用的角度,我们可以把电弧炉主电路视为将电弧弧长映射为电弧电流的非线性静态环节.即有

$$I = f(L), \tag{23}$$

其中: I 是电弧电流的有效值, L 是电弧弧长. 这样, 电弧炉电极调节系统的前向通道就可以简化为一个线性动态系统和一个非线性静态环节的串联组合. 从而采用前述的分段线性化自适应控制方法.

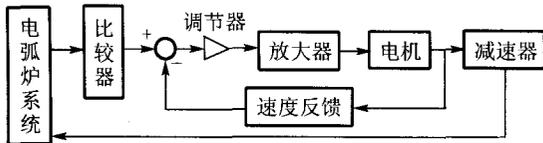


图 3(a) 电弧炉电极调节系统示意图

Fig. 3(a) Sketch map of regulator system of arc furnace

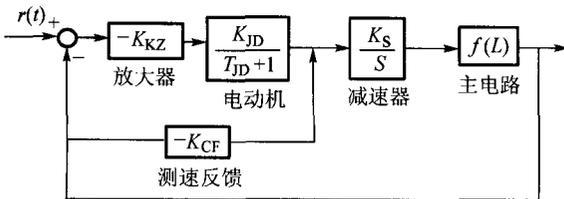


图 3(b) 电弧炉电极调节系统方框图

Fig. 3(b) System block diagram of regulator system of arc furnace

将电弧炉电极调节系统经分段线性化处理,采用式(6)描述的自适应率 Matlab6.5 对系统进行仿真,其中 PID 控制器的参数是在现场运行的参数的基础上,经过多次仿真控制效果较好的一组参数.

按照文献[6]的分段线性化的方法,对参考模型的矩阵,我们有

$$A_M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -20 \end{bmatrix}, B_M = [0], F_M = 1.$$

根据西安某钢厂 3 吨电弧炉电极调节器的实际参数,有

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -60.34 \end{bmatrix}, B_p = \begin{bmatrix} 0 \\ -39.16 \end{bmatrix}, F_p = 1,$$

$$B_p^+ = [0 \quad -0.0255], \Gamma_1 = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \Gamma_2 = 0.2.$$

从仿真的结果,如图 4(a),我们可以看出:分段线性化的模型参考自适应的调节速度要快于 PID 控制.当参考模型和可调对象都达到了工作点时,PID 控制还处于调节过程,并且还要经过较长时间的调节才能稳定在工作点.

同时,在系统达到稳定工作点后,存在着较小的白噪声弧长扰动的情况下,如图 4(b),PID 控制的输

出较之模型参考自适应控制的输出波动的幅度较大,而实际的生产过程中弧长扰动是不可避免的,故模型参考自适应的抗噪能力要优于 PID 控制.当系统发生较大幅度的干扰时,如图 4(c),可以看到,模型参考对于大幅度的干扰的抗干扰能力要明显优于 PID 控制.

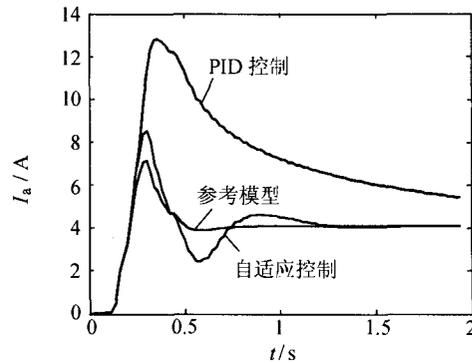


图 4(a) 不存在弧长扰动下结果对比

Fig. 4(a) Control result without interruption

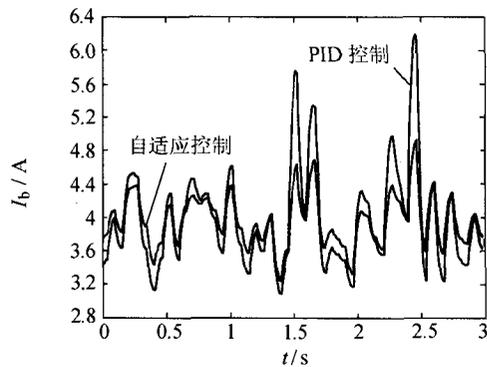


图 4(b) 存在较小的白噪声弧长扰动下 PID 控制与自适应控制的控制对比

Fig. 4(b) Control result between PID and adaptive control under the white noise interruption

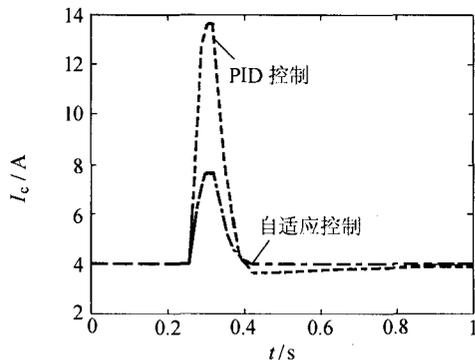


图 4(c) 当对象处于正常工作状态时,加上一个大的弧长扰动, PID 控制与自适应控制的控制对比

Fig. 4(c) Control result between PID and adaptive control under the large length fluctuation

从以上仿真结果来看,采用了分段线性化的模型参考自适应控制比 PID 控制好,减少了由于

扰动造成的系统输出的变化,提高了抗干扰能力,这在实际工程上是非常有意义的.值得注意的是: Γ_1 , Γ_2 的选择对于被控对象的响应速度影响较大.

5 结论(Conclusion)

本文分析了一类非仿射的非线性系统的分段线性化自适应控制问题.基于 Lyapunov 第二方法设计出来相应的自适应律,保证了系统的全局渐近稳定.以电弧炉系统自适应控制为例进行了仿真实验,仿真结果表明较之传统的 PID 控制,采用分段线性化的自适应控制有更强的跟踪性能,抗扰动能力增强.分段线性化方法对于单输入单输出的非仿射非线性系统的自适应控制,在理论上提供了一种思路,在实际上提供了一种简单易操作的处理方法.

参考文献(References):

- [1] 张仁忠.一类时变仿射非线性系统的完全线性化[J].工科数学,2000,16(1):39-45.
(ZHANG Renzhong. Totally linearization of time-varying affine nonlinear systems [J]. *Journal of Mathematics for Technology*, 2000, 16(1):39-45.)
- [2] 张怀宙,秦化淑.不确定仿射非线性系统的自适应控制—GRBF 网络学习方法[J].控制理论与应用,1999,16(1):11-15.
(ZHANG Huaizhou, QIN Huashu. Adaptive control of nonlinear systems with uncertainties - GRBF network learning method [J]. *Control Theory & Applications*, 1999, 16(1):11-15.)
- [3] 徐普水,施颂椒,袁向阳.基于神经网络的一类非线性系统的稳定自适应控制其设计方法[J].控制理论与应用,1999,16(5):751-753.
(XU Pushui, SHI Songjiao, YUAN Xiangyang. A design approach of neural network based stable adaptive controller for a class of nonlinear systems [J]. *Control Theory & Applications*, 1999, 16(5):751-753.)
- [4] 施阳,慕春棣.基于线性参数神经网络的非线性系统稳定自适应控制[J].控制与决策,2000,15(4):423-426.
(SHI Yang, MU Chundi. Stable Adaptive control for nonlinear systems based on linear-parameter-neural-networks [J]. *Control and Decision*, 2000, 15(4):423-426.)
- [5] AHMED M S. Neural-net-based direct adaptive control for a class of nonlinear plants [J]. *IEEE Trans on Neural Networks*, 2000, 45(1):671-677.
- [6] 刘小河,张军英.一类非线性系统模型参考自适应控制的分段线性化方法[J].西安电子科技大学学报,1998,25(4):500-505.
(LIU Xiaohe, ZHANG Junying. Model reference adaptive control of some nonlinear systems with the piecewise-linear method [J]. *Journal of Xidian University*, 1998, 25(4):500-505.)
- [7] 廖晓昕.稳定性的数学理论及应用[M].武汉:华中师范大学出版社,2001.
(LIAO Xiaoxin. *The Mathematics Theory of Stability and Application* [M]. Wuhan: HuaZhong Normal University Press, 2001.)
- [8] 朗道 I D,吴百凡译.自适应控制——模型参考方法[M].北京:国防工业出版社,1985.
(LAUDAU I D, Translated by WU Bai-fan. *Adaptive Control-Model Reference Method* [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1985.)
- [9] PATRICK C P. Lyapunov redesign of model reference adaptive control system [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1966, 11(3):362-367.
- [10] 周东华.非线性系统的自适应控制导论[M].北京:清华大学出版社,施普林格出版社,2002.
(ZHOU Donghua. *The Adaptive Control of Nonlinear System* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, Springer-Verlag, 2002.)
- [11] 陈祖明.矩阵论引论.北京:北京航空航天大学出版社,1998.
(CHEN Zuming. *Conspectus of Matrix* [M]. Beijing: BeiHang University Press, 1998.)

作者简介:

刘小河 (1955—),男,工学博士,教授.现为北京机械工业学院计算机及自动化系主任,北京交通大学兼职博士生导师,主要研究方向:非线性系统分析与控制,自适应控制;

殷杰 (1980—),男,博士研究生,2002年毕业于中国地质大学(武汉),2005年获北京机械工业学院计算机与自动化专业硕士学位,现在清华大学自动化系 CIMS 中心攻读博士学位,研究兴趣为非线性系统控制,智能控制, E-mail: super-jiyein@etang.com;

张奇志 (1963—),工学博士,教授,现为北京机械工业学院计算机及自动化系副主任,主要研究方向:有源噪声控制,智能控制.