第 22 卷第 5 期 2005 年 10 月
控制理论与应用 Control Theory & Applications
Vol.22 No.5 Oct. 2005

文章编号: 1000-8152(2005)05-0843-03

广义区间动力系统脉冲模存在性判据

何希勤[1], 柳 萍[1], 张大庆[1,2], 张庆灵[2]
(1.鞍山科技大学 应用数学研究所, 辽宁 鞍山 114044; 2.东北大学 理学院,辽宁 沈阳 110006)

摘要: 系统有无脉冲行为直接影响到系统性质,本文针对广义区间动力系统首先给出了区间矩阵奇异值变化范围的判定定理,然后得到判别区间矩阵秩的变化范围的充分条件,进而得到判别广义区间动力系统具有脉冲模的判据.

关键词: 区间动力系统; 广义区间系统; 区间矩阵; 区间矩阵奇异值; 脉冲模; 区间矩阵秩
中图分类号: O231.1 **文献标识码**: A

Criterion of descriptor interval systems with impulse behavior

HE Xi-qin[1], LIU Ping[1], ZHANG Da-qing[1,2], ZHANG Qing-ling[2]
(1. Research Institute of Applied Mathematics, Anshan University of Science and Technology, Anshan Liaoning 114044, China;
2. Faculty of Science, Northeasten University, Shenyang Liaoning 110006, China)

Abstract: The existence of impulse behavior directly affects the characteristics of a system. This paper proposes a criterion for determining the range of singular values of interval matrix of a descriptor interval system. A sufficient condition is then derived to determine the range of interval matrix's rank. Finally a criterion is obtained to determine if there is an impulse behavior in a descriptor interval system.

Key words: interval dynamic system; descriptor interval system; interval matrix; interval matrix' singular values; impulse behavior; interval matrix's rank

1 引言(Introduction)

在实际应用中,由于测量误差或计算时的舍入误差等原因,动力系统中系统矩阵有时并不能准确地知道,但是可以知道系统矩阵中元素的变化范围.在这种情况下将系统矩阵视为区间矩阵是一种处理扰动和不确定性的有效方法[1~8].对于广义系统 $E\dot{x}(t)=Ax(t)(x(t)\in\mathbb{R}^n, E, A\in\mathbb{R}^{n\times n})$, 由于系统矩阵 E 一般为奇异矩阵,有时会导致系统会有脉冲行为,而强脉冲行为会使系统停止工作甚至会破坏系统,因此判断系统是否存在脉冲行为变得十分重要,然而这种判断又十分困难.其主要原因是系统矩阵 E, A 元素的微小变化就可能会使矩阵的秩发生改变,从而可能使系统产生脉冲行为以及系统性质的改变.

本文首先讨论了判别区间矩阵秩的范围的充分条件.之后得到判别广义区间动力系统有脉冲行为的充分条件.

2 主要结论(Main results)

记

$$A^I=[\underline{A},\bar{A}]=\{(a_{ij})\mid \underline{a}_{ij}\leqslant a_{ij}\leqslant \bar{a}^{ij}, i=1,\cdots,m, j=1,\cdots,n\} \tag{1}$$

为区间矩阵,其中 $\underline{A}=(\underline{a}_{ij}), \bar{A}=(\bar{a}_{ij})\in\mathbb{R}^{m\times n}$. 令 $A_0=\dfrac{\underline{A}+\bar{A}}{2}, \Delta A=\dfrac{\bar{A}-\underline{A}}{2}$, 则其可等价地记为 $A^I=[A_0-\Delta A, A_0+\Delta A]=A_0+\Delta A[-1,1]$.

设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, 记 $\sigma(A)$ 为 A 的奇异值集合,即

$$\sigma(A)=\{\sigma\mid \det(\sigma I-A^{\mathrm{T}}A)=0\}, \tag{2}$$

其中 I 为 n 阶单位阵.则 $\forall\sigma\in\sigma(A), \sigma\geqslant 0$. 又,记

$$\sigma(A^I)=\{\sigma\mid\sigma\in\sigma(A), A\in A^I\} \tag{3}$$

为区间矩阵 A^I 的奇异值集合.

对于向量 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, 记 S^X 为其符号矩阵,即

$$S^X=\mathrm{diag}(\mathrm{sgn}(x_1),\mathrm{sgn}(x_2),\cdots,\mathrm{sgn}(x_n)). \tag{4}$$

引理 1 存在对角阵 S^U 与 S^V, 使 $\forall A\in A^I$ 有

$$\sigma_i(A)\in[\lambda_i(B_0-S^U\Delta BS^U), \lambda_i(B_0+S^V\Delta BS^V)],$$

其中, $\sigma_i(A)$ 为矩阵 $\forall A\in A^I$ 的第 i 个奇异值, $i=$

收稿日期:2004-03-17; 收修改稿日期:2005-01-10.

$1,2,\cdots,n$. $B^I = {A^I}^{\mathrm{T}} A^I = [\underline{B},\bar{B}]$, $B_0 = \dfrac{\underline{B}+\bar{B}}{2}$, $\Delta B = \dfrac{\bar{B}-\underline{B}}{2}$, S^U, S^V 分别是由式(4)定义的$\mathbb{R}^n$中某向量 U,V 的符号矩阵.

证 由 $B^I = {A^I}^{\mathrm{T}} A^I = [\underline{B},\bar{B}]$, 令 $B_0 = \dfrac{\underline{B}+\bar{B}}{2}$, $\Delta B = \dfrac{\bar{B}-\underline{B}}{2}$. 将区间矩阵 B^I 等价地记为

$$B^I = [B_0 - \Delta B, B_0 + \Delta B] = B_0 + \Delta B[-1,1]. \tag{6}$$

由区间矩阵的次分配律对于 $\forall X \in \mathbb{R}^n$ 可得到,

$$B^I X = (B_0 + \Delta B[-1,1])X \subseteq B_0 X + \Delta B|X|[-1,1] \tag{7}$$

以及

$$X^{\mathrm{T}} B^I X \subseteq X^{\mathrm{T}} B_0 X + |X|^{\mathrm{T}} \Delta B|X|[-1,1], \tag{8}$$

这里 $|X| = S^X X$, 其中 S^X 为由式(4)定义. 式(8)可等价地记为

$$X^{\mathrm{T}} B^I X \subseteq [X^{\mathrm{T}}(B_0 - S^X \Delta B S^X)X, X^{\mathrm{T}}(B_0 + S^X \Delta B S^X)X], \tag{9}$$

即 $\forall B \in B^I$,

$$X^{\mathrm{T}}(B_0 - S^X\Delta B S^X)X \leqslant X^{\mathrm{T}} B X \leqslant X^{\mathrm{T}}(B_0 + S^X \Delta B S^X)X. \tag{10}$$

设 $P \subset \mathbb{R}^n$, $\dim(P) = i$ 表示$\mathbb{R}^n$的子空间 P 的维数, $X \in P$, 由式(10)及 $X \in \mathbb{R}^n$ 的任意性显然有

$$\max_{\substack{x \in P\\ \|x\|_2 = 1}} X^{\mathrm{T}}(B_0 - S^X \Delta B S^X) \leqslant \max_{\substack{x \in P\\ \|x\|_2 = 1}} X^{\mathrm{T}} B^I X \leqslant \max_{\substack{x \in P\\ \|x\|_2 = 1}} X^{\mathrm{T}}(B_0 + S^X \Delta B S^X)X \tag{11}$$

和

$$\min_{\substack{P\subset\mathbb{R}^n\\ \dim(P)=i}} \max_{\substack{x \in P\\ \|x\|_2 = 1}} X^{\mathrm{T}}(B_0 - S^X \Delta B S^X)X \leqslant \min_{\substack{P\subset\mathbb{R}^n\\ \dim(P)=i}} \max_{\substack{x \in P\\ \|x\|_2 = 1}} X^{\mathrm{T}} B^I X \leqslant \min_{\substack{P\subset\mathbb{R}^n\\ \dim(P)=i}} \max_{\substack{x \in P\\ \|x\|_2 = 1}} X^{\mathrm{T}}(B_0 + S^X \Delta B S^X)X \tag{12}$$

成立. 注意到式(12)中矩阵 S^X 为$\mathbb{R}^n$中向量的符号矩阵, 其个数为 2^n 个. 因此必存在 S^U 及 S^V 使

$$\min_{\substack{S^Y\\ Y\in\mathbb{R}^n}}\Big\{\min_{\substack{P\subset\mathbb{R}^n\\ \dim(P)=i}} \max_{\substack{x \in P\\ \|x\|_2 = 1}} X^{\mathrm{T}}(B_0 - S^Y \Delta B S^Y)X\Big\} = \min_{\substack{P\subset\mathbb{R}^n\\ \dim(P)=i}} \max_{\substack{x \in P\\ \|x\|_2 = 1}} X^{\mathrm{T}}(B_0 - S^U \Delta B S^U)X \tag{13}$$

和

$$\max_{\substack{S^Y\\ Y\in\mathbb{R}^n}}\Big\{\min_{\substack{P\subset\mathbb{R}^n\\ \dim(P)=i}} \max_{\substack{x \in P\\ \|x\|_2 = 1}} X^{\mathrm{T}}(B_0 + S^Y \Delta B S^Y)X\Big\} = \min_{\substack{P\subset\mathbb{R}^n\\ \dim(P)=i}} \max_{\substack{x \in P\\ \|x\|_2 = 1}} X^{\mathrm{T}}(B_0 + S^V \Delta B S^V)X \tag{14}$$

成立. 再注意到 $B_0 - S^U \Delta B S^U$ 为对称矩阵, 由对称矩阵的最大值最小值原理可知, 当 S^U 给定时 $\min\limits_{\substack{P\subset\mathbb{R}^n\\ \dim(P)=i}} \max\limits_{\substack{x \in P\\ \|x\|_2 = 1}} X^{\mathrm{T}}(B_0 - S^U \Delta B S^U)X$ 为矩阵 $B_0 - S^U \Delta B S^U$ 特征值. 若将此矩阵的特征值由小到大排列, $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ 则有

$$\lambda_i(B_0 - S^U \Delta B S^U) = \min_{\substack{P\subset\mathbb{R}^n\\ \dim(P)=i}} \max_{\substack{x \in P\\ \|x\|_2 = 1}} X^{\mathrm{T}}(B_0 - S^U \Delta B S^U)X, \tag{15}$$

同理

$$\lambda_i(B_0 + S^V \Delta B S^V) = \min_{\substack{P\subset\mathbb{R}^n\\ \dim(P)=i}} \max_{\substack{x \in P\\ \|x\|_2 = 1}} X^{\mathrm{T}}(B_0 + S^V \Delta B S^V)X. \tag{16}$$

由于

$$\forall A \in A^I, B = A^{\mathrm{T}} A \in B^I,$$

$\min\limits_{\substack{P\subset\mathbb{R}^n\\ \dim(P)=i}} \max\limits_{\substack{x \in P\\ \|x\|_2 = 1}} X^{\mathrm{T}} B X$ 为 B 的第 i 个特征值, 即为 A 的第 i 个奇异值(由小到大排列), 因此

$$\sigma_i(A) \in \Big[\min_{\substack{P\subset\mathbb{R}^n\\ \dim(P)=i}} \max_{\substack{x \in P\\ \|x\|_2 = 1}} \{X^{\mathrm{T}}(B_0 - S^X \Delta B S^X)X\}, \min_{\substack{P\subset\mathbb{R}^n\\ \dim(P)=i}} \max_{\substack{x \in P\\ \|x\|_2 = 1}} \{X^{\mathrm{T}}(B_0 + S^X \Delta B S^X X\}\Big]. \tag{17}$$

再由式(13)～(16)有

$$\sigma_i(A) \in [\lambda_i(B_0 - S^U \Delta B S^U), \lambda_i(B_0 + S^V \Delta B S^V)],\ i = 1,2,\cdots,n. \tag{18}$$

定理 1 若存在对角阵 $S^U(S^V)$ 及 $i \in \{1,2,\cdots,n\}$ $(j \in \{1,2,\cdots,n\})$ 使 $0 < \lambda_i(B_0 - S^U \Delta B S^U)$ $(\lambda_j(B_0 + S^V \Delta B S^V) = 0)$ 则 $\forall A \in A^I$, $\operatorname{rank}(A) \geqslant i$ $(\operatorname{rank}(A) \leqslant n - j)$.

证 由引理 1 的证明中的式(13), 结论显然.

注 1 在文献[10]中讨论了区间矩阵为列满秩的充分必要条件. 但在本文定理 1 中如果对 $\forall i \in \{1,2,\cdots,n\}$, $0 < \lambda_i(B_0 - S^U \Delta B S^U)$ 成立, 则可判定所讨论的区间矩阵 A^I 为列满秩的.

引理 2[9] 若广义系统 $E\dot{x}(t) = Ax(t)$ 正则, 则其没有脉冲模的必要条件是

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} E & A \\ A & 0 \end{bmatrix} \geqslant 2n - q. \tag{19}$$

考虑广义区间动力系统

$$E^I \dot{x}(t) = A^I x(t), \tag{20}$$

其中: $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 为状态向量, $E^I = [\underline{E}, \bar{E}]$, $A^I = [\underline{A}, \bar{A}]$ 为 n 价区间矩阵. 记区间矩阵

$$P^I = \begin{bmatrix} E^I & A^I \\ A^I & 0 \end{bmatrix} = [\underline{P}, \bar{P}], \tag{21}$$

$$\begin{cases} p_{\max} = \max\limits_{p \in P^I} \{\mathrm{rank}(P)\}, p_{\min} = \min\limits_{p \in P^I} \{\mathrm{rank}(P)\}, \\ q_{\max} = \max\limits_{E \in E^I} \{\mathrm{rank}(E)\}, q_{\min} = \min\limits_{E \in E^I} \{\mathrm{rank}(E)\}, \end{cases} \tag{22}$$

在这里, 式(22)中区间矩阵 P^I 与 E^I 的秩的最大最小值, 可以通过定理 1 得到. 再由引理 2 可得广义区间动力系统(20)中脉冲模存在性的判据.

定理 2 广义区间动力系统(20)为正则, 若

$$p_{\max} < 2n - q_{\max}, \tag{23}$$

则系统(20)脉冲模存在. 即 $\forall E \in E^I, A \in A^I$, 系统 $E\dot{x}(t) = Ax(t)$ 具有固定脉冲模. 其中, $p_{\max}, q_{\max}$ 由式(21)(22)定义.

证 由 $p_{\max}, q_{\max}$ 的定义及引理 2, 定理结论显然.

注 2 在考虑一个广义系统时, 要保证系统是正则的, 否则系统的解不是唯一的. 文献[9]中给出了判别广义区间动力系统为正则的充分必要条件.

3 结语(Conclusions)

本文讨论了区间矩阵秩的判别方法. 文中的判别区间矩阵秩的判据不仅能判别区间矩阵为满秩, 还能判别区间矩阵由于矩阵元素的变化而产生的秩的变化的范围. 由于文中判据用到了区间数的运算, 而区间数的运算一般只具有包含单调性, 使得文中判据只能为充分的而不能是必要的. 在实际应用中如何判别一区间矩阵的秩, 以及如何判别区间矩阵中每一个矩阵都具有相同的秩, 这些问题可等价考虑为某奇异矩阵在扰动下其不为零的特征根或奇异值的个数是否发生改变. 它的研究在广义区间动力系统中具有十分重要的意义.

本文主要给出了判别广义区间动力系统具有脉冲行为的判据. 对于广义区间动力系统而言, 其能控性、能观测性的研究已经取得了很多的成果. 但如何判别一个广义区间动力系统有无脉冲行为的问题目前还没有得到很好的解决, 还需进一步的研究.

参考文献(References):

[1] POLIS M P, OLBROT A W, FU M. An overview of recent results on the parametric approach to robust stability [C] // *IEEE Proc of the 28th Conf on Decision and Control*. Tempa, Florida: IEEE Press, 1989: 23 - 29.

[2] 廖晓昕, 罗琦, 梅正杨, 等. 关于区间矩阵稳定性、可控性、可观性的充要条件的注记[J]. 自动化学报, 1998, 24(6): 829 - 833. (LIAO Xiaoxin, LUO Qi, MEI Zhengyang, et al. Notes on necessary and sufficient conditions of stability, observability and controllability for interval matrices [J]. *Acta Automatica Sinica*, 1998, 24(6): 829 - 833.)

[3] WANG K, MICHEL ANY N, LIU Derong. Necessary and sufficient conditions for the hurwitz and schur stability of interval matrices [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(6): 1251 - 1255.

[4] WU Q H. Robust stability analysis of control systems with interval plants [J]. *Int J of Control*, 2001, 74(9): 921 - 937.

[5] WANG Kaining, MICHEL A N. Necessary and sufficient conditions for the controllability and observability of a class of linear time-invarint systems with interval plants [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(9): 1443 - 1447.

[6] LIN C, WANG J, SOH C B. Necessary and sufficient conditions for the controllability of linear interval descritptor systems [J]. *Automatica*, 1998, 34(3): 363 - 367.

[7] LIN Chong, WANG Jianliang, SOH C B. Robust stability of linear interval descriptor systems [C] // *IEEE Proc of the th Conf on Decision and Control*. San Diego: IEEE Press, 1997, 3822 - 3823.

[8] HE Xiqin, ZHANG DaQing, ZHANG QingLing. Controllability of Interval systems and interval descriptor systems [J]. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Series B: Applications and Algorithms*, 2004, 11(2): 165 - 180.

[9] 赵植武. 脉冲固定模的代数特征[J]. 大连大学学报, 2001, 22(4): 101 - 104. (ZHAO Zhiwu. Algebraic characteristic of impulsive fixed modes [J]. *Journal of Dalian University*, 2001, 22(4): 101 - 104.)

[10] 何希勤, 张大庆, 张庆灵. 广义区间动力系统的能控性[J]. 自动化学报, 2004, 30(5): 764 - 771. (HE Xiqin, ZHANG Daqing, ZHANG Qingling. Controllability of descriptor interval systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2004, 30(5): 764 - 771.)

作者简介:

何希勤 (1965—), 男, 博士, 现任鞍山科技大学应用数学研究所所长、教授、硕士生导师, 研究领域为区间动力系统、非线性系统控制, E-mail: xiqinhe@hotmail.com;

柳　萍 (1981—), 女, 鞍山科技大学 2003 级硕士研究生, 研究方向为区间动力系统;

张大庆 (1974—), 男, 博士研究生, 鞍山科技大学讲师, 研究领域为区间数学与区间动力系统;

张庆灵 (1956—), 男, 博士, 东北大学理学院院长, 教授, 博士生导师, 研究领域为区间动力系统、广义系统、分散控制与鲁棒控制.