

切换循环组合系统的基本性能分析

李建华, 苏 瑞, 李彦平, 赵 军

(东北大学 信息科学与工程学院 教育部流程工业综合自动化重点实验室, 辽宁 沈阳 110044)

摘要: 切换循环组合系统具有广泛的实际背景, 生物学中的“超循环”是其中之一. 本文研究了这种切换系统在任意切换律下的二次稳定性, 循环矩阵的结构特征为解决这个问题提供了有效的方法. 此外, 拟循环组合系统, 一种扩展的循环组合系统, 也作为本文研究的对象, 给出这种组合系统的简化降阶方法. 最后, 针对切换循环组合系统的仿真算例验证了文中的主要结果.

关键词: 切换循环组合系统; 循环矩阵; 任意切换律; 公共二次李雅普诺夫函数; 块解耦

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Analysis of basic performances for switched circulant composite systems

LI Jian-hua, SU Rui, LI Yan-ping, ZHAO Jun

(Key Lab of Process Industry Automation of Ministry of Education, School of Information Science and Engineering,
Northeastern University, Shenyang Liaoning 110004, China)

Abstract: Switched circulant composite systems possess a wide background in practice, such as “hypercycles” in biology. The quadratic stability of this kind of switched systems is studied under arbitrary switching. In this process, the structural character of circulant matrices plays an important role. Besides, a method for simplifying and reducing the order of an extended circulant composite system is also given. Finally, the simulation of switched circulant composite system verifies main results.

Key words: switched circulant composite systems; circulant matrix; arbitrary switching laws; common quadric Lyapunov function; block decoupling

1 引言 (Introduction)

降阶是处理组合系统的常用方法, 根据组合系统的结构特性, 寻求降阶方法已被许多研究者^[1-5]所关注. 文献[6,7]详细地描述了循环组合系统的实际背景, 文献[8]研究了对称循环组合系统的几个控制问题.

本文将循环组合系统向两个方向扩展: 一是切换循环组合系统; 二是拟循环组合系统——具有类似于“循环”结构的组合系统. 事实上, 生物学中的“超循环”^[9]是切换循环组合系统的具体模型; 而以 r -分块循环矩阵^[10]为系统矩阵的组合系统就是拟循环组合系统中的一种. 循环矩阵的特殊性质, 为研究切换循环系统在任意切换律下的渐近稳定性以及公共李亚普诺夫函数的建立起着重要的作用. 此外, 由循环组合矩阵扩展到拟循环组合矩阵, 本文研究

这种组合矩阵的结构性质, 并利用得到的结果将拟循环组合系统简化降阶, 从而可方便地讨论拟循环组合系统的一些基本性能, 如系统的稳定性. 最后的仿真检验了文中研究成果.

2 系统描述 (System described)

定义 1^[5] 矩阵

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_N \\ A_N & A_1 & \cdots & A_{N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_2 & A_3 & \cdots & A_1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

称为循环组合矩阵. 简记 $\tilde{A} = cl(A_1, A_2, \dots, A_N)$. 这里 $A_m \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2} (m = 1, 2, \dots, N)$ 称为循环元素. 特殊地, 如果 $A_m = a_m \in \mathbb{R}$, 则矩阵(1)称为循环矩阵, 记 $A = cl(a_1, a_2, \dots, a_N)$.

令 $E = [e_{ij}]_{N \times N}$ ($e_{12} = e_{23} = \dots = e_{N-1N} = e_{N1} = 1$, 其余 $e_{ij} = 0$), 则循环组合矩阵(1)可表示成

$$\tilde{A} = \sum_{m=1}^N E^{m-1} \otimes A_m \text{ (这里 } E^0 = I \text{)}.$$

称 E 为循环结构矩阵^[11].

定义 2 矩阵

$$\tilde{F} = \sum_{m=1}^N H^{m-1} \otimes A_m \text{ (这里 } H^0 = I \text{)} \quad (2)$$

称为拟循环组合矩阵. 其中 $H \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 称为拟循环结构矩阵, $A_m \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$ ($m = 1, 2, \dots, N$) 称为循环元素.

定义 3 切换系统

$$\begin{cases} \dot{X} = \tilde{A}^{(j)} X + \tilde{B}^{(j)} u, \\ Y = \tilde{C}^{(j)} X, \end{cases} \quad j \in M = \{1, 2, \dots, k\} \quad (3)$$

称切换循环组合系统, 如果

系统矩阵

$$\tilde{A}^{(j)} = cl(A_1^{(j)}, \dots, A_N^{(j)}), \quad A_m^{(j)} \in \mathbb{R}^{n \times n};$$

控制矩阵

$$\tilde{B}^{(j)} = cl(B_1^{(j)}, \dots, B_N^{(j)}), \quad B_m^{(j)} \in \mathbb{R}^{n \times r};$$

输出矩阵

$$\tilde{C}^{(j)} = cl(C_1^{(j)}, \dots, C_N^{(j)}), \quad C_m^{(j)} \in \mathbb{R}^{p \times n}.$$

其中: 状态 $X = (x_1^T, x_2^T, \dots, x_N^T)^T$, $x_m \in \mathbb{R}^n$; 控制 $u = (u_1^T, u_2^T, \dots, u_N^T)^T$, $u_m \in \mathbb{R}^r$; 输出 $Y = (y_1^T, y_2^T, \dots, y_N^T)^T$, $y_m \in \mathbb{R}^p$.

定义 4 系统

$$\begin{cases} \dot{X} = \tilde{F}X + \tilde{W}u, \\ Y = \tilde{V}X \end{cases} \quad (4)$$

称为拟循环组合系统, 如果

系统矩阵

$$\tilde{F} = \sum_{m=1}^N H^{m-1} \otimes A_m, \quad A_m \in \mathbb{R}^{n \times n};$$

控制矩阵

$$\tilde{W} = \sum_{m=1}^N H^{m-1} \otimes B_m, \quad B_m \in \mathbb{R}^{n \times R};$$

输出矩阵

$$\tilde{V} = \sum_{m=1}^N H^{m-1} \otimes C_m, \quad C_m \in \mathbb{R}^{p \times n}.$$

其中 $H \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 状态、控制和输出同上.

显然, 在定义 4 中, 如果 $H = E$, 则系统(4)就是循环组合系统. 为讨论方便, 引进以下记号^[11]:

$$\omega_m = \cos \frac{2(m-1)\pi}{N} + i \sin \frac{2(m-1)\pi}{N}, \quad (5)$$

$$\xi_m = (\omega_m^0, \omega_m^1, \dots, \omega_m^{N-1})^T, \quad (6)$$

$$G = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)_{N \times N}, \quad (7)$$

$$\tilde{G}_n = G \otimes I_n. \quad (8)$$

注意: 式(8)中 I_n 是 n 阶单位阵, \tilde{G}_n 为可逆阵是因为 G 是可逆的, 并且 $\tilde{G}_n^{-1} = G^{-1} \otimes I_n$.

引理 1^[11] 对于循环矩阵 $A = cl(a_1, a_2, \dots, a_N)$, 有 $G^{-1}AG = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$. 其中: G 由式(7)给出, $\lambda_m = a_1\omega_m^0 + a_2\omega_m^1 + \dots + a_N\omega_m^{N-1}$ 为 A 的特征值. 同理, 对于循环组合矩阵 $\tilde{A} = cl(A_1, A_2, \dots, A_N)$ (注意 $A_m \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$), 取 $\tilde{G}_{n_2} = G \otimes I_{n_2}$ 及 $\tilde{G}_{n_1}^{-1} = G^{-1} \otimes I_{n_1}$, 有 $\tilde{G}_{n_1}^{-1}\tilde{A}\tilde{G}_{n_2} = \text{diag}(\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_N)$, 其中 $\bar{A}_m = \sum_{k=1}^N \omega_m^{k-1} A_m$ ($m = 1, 2, \dots, N$).

引理 2 拟循环组合矩阵 $\tilde{F} = \sum_{m=1}^N H^{m-1} \otimes A_m$ ($A_m \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$), 如果矩阵 H 相似于对角阵, 即存在可逆阵 T 使得 $T^{-1}HT = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)$. 取 $\tilde{T}_{n_2} = T \otimes I_{n_2}$ 及 $\tilde{T}_{n_1}^{-1} = T^{-1} \otimes I_{n_1}$, 则有 $\tilde{T}_{n_1}^{-1}\tilde{F}\tilde{T}_{n_2} = \text{diag}(\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_N)$, 其中 $\bar{A}_m = \sum_{k=1}^N \mu_m^{k-1} A_m$.

证 直接代入即可验证.

3 主要结果(Main results)

引理 1 中的 $\tilde{G}_{n_2}, \tilde{G}_{n_1}^{-1}$ 与循环元素 A_1, A_2, \dots, A_N 无关, 这是循环组合矩阵一个重要结构特征, 它为切换循环组合系统的简化降阶提供一个方法.

定理 1 对于切换循环组合系统(3), 取共同的状态变换 $X = \tilde{G}_n \bar{X}$, 这里 $\tilde{G}_n = G \otimes I_n$. 则切换系统(3)可变换成

$$\begin{cases} \dot{\bar{X}} = \tilde{\bar{A}}^{(j)} \bar{X} + \tilde{\bar{B}}^{(j)} \bar{u}, \\ \bar{Y} = \tilde{\bar{C}}^{(j)} \bar{X}, \end{cases} \quad j \in M = \{1, 2, \dots, k\}. \quad (9)$$

其中: $\bar{X} = (G^{-1} \otimes I_n)X$, $\bar{u} = (G^{-1} \otimes I_r)u$, $\bar{Y} = (G^{-1} \otimes I_p)Y$; 对 $\forall j \in M$, 有

$$\tilde{\bar{A}}^{(j)} = \text{diag}(\bar{A}_1^{(j)}, \dots, \bar{A}_N^{(j)}), \quad \bar{A}^{(j)}_m = \sum_{k=1}^N \omega_m^{k-1} A_k^{(j)};$$

$$\tilde{\bar{B}}^{(j)} = \text{diag}(\bar{B}_1^{(j)}, \dots, \bar{B}_N^{(j)}), \quad \bar{B}_m^{(j)} = \sum_{k=1}^N \omega_m^{k-1} B_k^{(j)};$$

$$\tilde{\bar{C}}^{(j)} = \text{diag}(\bar{C}_1^{(j)}, \dots, \bar{C}_N^{(j)}), \quad \bar{C}_m^{(j)} = \sum_{k=1}^N \omega_m^{k-1} C_k^{(j)}.$$

证 将状态变换 $X = \tilde{G}_n \bar{X}$ 带入切换循环组合系统(3)中, 再利用引理 1 整理即可得式(9).

由于 $\tilde{\bar{A}}^{(j)}, \tilde{\bar{B}}^{(j)}$ 和 $\tilde{\bar{C}}^{(j)}$ ($\forall j \in M$) 都是分块对

角阵,如再记 $\bar{X} = (\bar{x}_1^T, \bar{x}_2^T, \dots, \bar{x}_N^T)^T$, $\bar{u} = (\bar{u}_1^T, \bar{u}_2^T, \dots, \bar{u}_N^T)^T$, $\bar{Y} = (\bar{y}_1^T, \bar{y}_2^T, \dots, \bar{y}_N^T)^T$, 则系统(9)可分解成 N 个彼此独立切换系统如下:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = \bar{A}_1^{(j)} \bar{x}_1 + \bar{B}_1^{(j)} \bar{u}_1, \bar{y}_1 = \bar{C}_1^{(j)} \bar{x}_1, \\ \dot{\bar{x}}_2 = \bar{A}_2^{(j)} \bar{x}_2 + \bar{B}_2^{(j)} \bar{u}_2, \bar{y}_2 = \bar{C}_2^{(j)} \bar{x}_2, \\ \vdots \\ \dot{\bar{x}}_N = \bar{A}_N^{(j)} \bar{x}_N + \bar{B}_N^{(j)} \bar{u}_N, \bar{y}_N = \bar{C}_N^{(j)} \bar{x}_N, \\ j \in M. \end{cases} \quad (10)$$

从结构上看,系统(10)比系统(3)要简化的多.显然,这种简化是有利于系统的某些性能指标的研究和设计.例如,考虑切换循环组合系统(3)对应的切换自治系统在任意切换律下二次稳定性,经状态变换 $X = \tilde{G}_n \bar{X}$ 后,对应的式(10)就是

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = \bar{A}_1^{(j)} \bar{x}_1, \\ \dot{\bar{x}}_2 = \bar{A}_2^{(j)} \bar{x}_2, \\ \vdots \\ \dot{\bar{x}}_N = \bar{A}_N^{(j)} \bar{x}_N, \\ j \in M. \end{cases} \quad (11)$$

有下面的定理:

定理 2 如果每个 n 维切换系统: $\dot{\bar{x}}_m = \bar{A}_m^{(j)} \bar{x}_m (j \in M)$ 在任意的切换律下是二次稳定 ($m = 1, 2, \dots, N$), 则切换循环组合系统(3)对应的自治系统在任意切换律下是二次稳定.

证 由已知,对每个矩阵组 $\{\bar{A}_m^{(j)}\}$, 存在公共 n 阶 Hermite 正定阵 P_m , 使得一切 $j \in M$ 有 $(\bar{A}_m^{(j)})^H P_m + P_m \bar{A}_m^{(j)} < 0 (m = 1, 2, \dots, N)$. 取

$$V(X) = X^H (\tilde{G}_n^{-1})^H P \tilde{G}_n^{-1} X. \quad (12)$$

其中: \tilde{G}_n 由式(8)给出, $P = \text{diag}(P_1, P_2, \dots, P_N)$. 下面说明 $V(X)$ 是切换系统(3)的公共二次李雅普诺夫函数.事实上,这只需说明对任意的 $j \in M$,

$$(\tilde{A}^{(j)})^H (\tilde{G}_n^{-1})^H P \tilde{G}_n^{-1} + (\tilde{G}_n^{-1})^H P \tilde{G}_n^{-1} (\tilde{A}^{(j)}) < 0.$$

对上述矩阵做合同变换,取 $(\tilde{G}_n)^H$ 和 \tilde{G}_n 分别左乘和右乘上述矩阵,可得

$$\tilde{G}_n^H [(\tilde{A}^{(j)})^H (\tilde{G}_n^{-1})^H P \tilde{G}_n^{-1} + (\tilde{G}_n^{-1})^H P \tilde{G}_n^{-1} (\tilde{A}^{(j)})] \tilde{G}_n =$$

$$(\tilde{G}_n)^H (\tilde{A}^{(j)})^H (\tilde{G}_n^{-1})^H P + P \tilde{G}_n^{-1} \tilde{A}^{(j)} \tilde{G}_n =$$

$$(\tilde{G}_n^{-1} \tilde{A}^{(j)} \tilde{G}_n)^H P + P \tilde{G}_n^{-1} \tilde{A}^{(j)} \tilde{G}_n =$$

$$(\tilde{A}^{(j)})^H P + P \tilde{A}^{(j)} =$$

$$\text{diag}((\bar{A}_1^{(j)})^H P_1 + P_1 \bar{A}_1^{(j)}, (\bar{A}_2^{(j)})^H P_2 + P_2 \bar{A}_2^{(j)}, \dots,$$

$$(\bar{A}_N^{(j)})^H P_N + P_N \bar{A}_N^{(j)}) < 0.$$

定理 2 的意义在于,研究一个 $N \cdot n$ 维的切换组

合系统(3)的二次稳定性问题,可转化为研究 N 个 n 维切换系统的二次稳定性问题.显然,这是对原问题的一个较大的简化.下面继续讨论拟循环组合系统(4)的简化降阶方法.

定理 3 对于拟循环组合系统(4),如果循环结构矩阵 H 相似于对角阵,即存在可逆阵 T , 使得 $T^{-1}HT = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)$. 取状态变换 $X = \tilde{T}_n \bar{X}$, 这里 $\tilde{T}_n = T \otimes I_n$. 则式(4)变换成

$$\begin{cases} \dot{\bar{X}} = \tilde{F} \bar{X} + \tilde{W} \bar{u}, \\ \bar{Y} = \tilde{V} \bar{X}. \end{cases} \quad (13)$$

其中

$$\bar{X} = \tilde{T}_n^{-1} X, \bar{u} = \tilde{T}_n^{-1} u, \bar{Y} = \tilde{T}_n^{-1} Y,$$

$$\tilde{F} = \text{diag}(\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_N), \bar{A}_m = \sum_{k=1}^N \mu_m^{k-1} A_k,$$

$$\tilde{W} = \text{diag}(\bar{B}_1, \bar{B}_2, \dots, \bar{B}_N), \bar{B}_m = \sum_{k=1}^N \mu_m^{k-1} B_k,$$

$$\tilde{V} = \text{diag}(\bar{C}_1, \bar{C}_2, \dots, \bar{C}_N), \bar{C}_m = \sum_{k=1}^N \mu_m^{k-1} C_k.$$

证 仿定理 1 的证明,详细从略.

由于式(13)中的矩阵 \tilde{F} , \tilde{W} 和 \tilde{V} 均是分块对角阵,所以系统(13)与系统(10)除切换概念外具有相同的形式.显然,这对于研究原系统(4)的某些性能或控制器的设计有较大的改善.

4 仿真(Simulation)

考虑切换循环系统

$$\dot{X} = \tilde{A}^{(j)} X (j = 1, 2),$$

其中

$$\tilde{A}^{(1)} = \text{cl}(-3, 2, -1), \tilde{A}^{(2)} = \text{cl}(-4, -3, 5),$$

在任意切换律下的二次稳定性并构造公共的二次李雅普诺夫函数.这里 $n = 1$ 和 $N = 3$, 由式(5)得

$$\omega_1 = 1, \omega_2 = -0.5 + 0.866i,$$

$$\omega_3 = -0.5 - 0.866i.$$

取共同的状态变换 $X = \tilde{G}_1 \bar{X}$, 这里 $\tilde{G}_1 = G \otimes I_1$ 及 G 由式(7)给出.则原切换系统变换成如下形式:

$$\dot{\bar{X}} = \tilde{A}^{(j)} \bar{X} (j = 1, 2).$$

其中

$$\tilde{A}^{(1)} = \text{diag}(-2, -3.5 + 2.6i, -3.5 - 2.6i),$$

$$\tilde{A}^{(2)} = \text{diag}(-2, -5 + 2.31i, -5 - 2.31i).$$

这意味着

$$\bar{A}_1^{(1)} = -2, \bar{A}_2^{(1)} = -3.5 + 2.6i,$$

$$\bar{A}_3^{(1)} = -3.5 - 2.6i, \bar{A}_1^{(2)} = -2,$$

$$\bar{A}_2^{(2)} = -5 + 2.31i, \bar{A}_3^{(2)} = -5 - 2.31i.$$

由定理2,如取 $P_1 = 1, P_2 = 1, P_3 = 1$, 就有

$$(\bar{A}_m^{(j)})^H P_m + P_m \bar{A}_m^{(j)} < 0 (j = 1, 2, m = 1, 2, 3).$$

这样

$$P = \text{diag}(P_1, P_2, P_3) = I,$$

$$\tilde{G}_1^{-1} = G^{-1} \otimes I_1 = G^{-1} =$$

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -0.5 - 0.866i & -0.5 + 0.866i \\ 1 & -0.5 + 0.866i & -0.5 - 0.866i \end{bmatrix},$$

$$(\tilde{G}_1^{-1})^H \tilde{G}_1^{-1} = \frac{1}{3} I,$$

从而公共的二次李雅普诺夫函数为 $V(X) = X^H (\tilde{G}_1^{-1})^H P \tilde{G}_1^{-1} X = \frac{1}{3} X^H X$. 随机取初值为 $X(0) = (0.3, -5.1, 2.1)^T$, 仿真结果如图1所示.

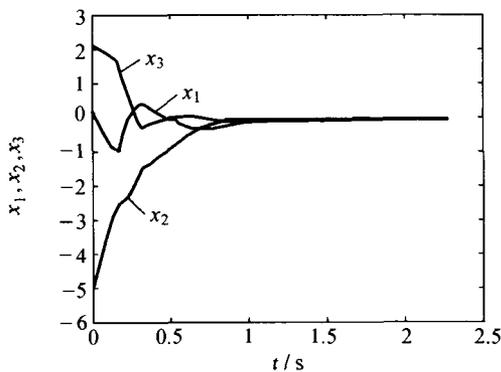


图1 切换循环系统的状态响应

Fig. 1 State response of the switched circulant system

5 结束语 (Conclusion)

循环矩阵的结构属性,可将切换循环组合系统的各个子系统同时按块解耦.这样,切换循环组合系统的许多性能指标等价于若干个低维切换系统的对应的性能指标.显然,这对于一般的切换组合系统是做不到的.拟循环组合系统是循环组合系统的扩展,本文同时也给出这种系统的简化降阶的方法.

参考文献 (References):

- [1] LUNZE J. Dynamics of strongly coupled symmetric composite systems [J]. *Int J Control*, 1986, 44(6): 1617 - 1640.
- [2] UNDARESHAN M K, ELBANNA R M. Qualitative analysis and decentralized controller synthesis for a class of large-scale system with symmetrically interconnected subsystems [J]. *Automatica*, 1991, 27(1):

383 - 388.

- [3] 李建华,李浚圣,李彦平.拟对称组合大系统的稳定性分析[J].控制理论与应用,2002,19(5):801 - 803.
(LI Jianhua, LI Junsheng, LI Yanping. Stability analysis for similar symmetry large-scale combined systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2002, 19(5): 801 - 803.)
- [4] 张颖伟,王剑,张嗣瀛.一类相似组合大系统的线性反馈镇定[J].控制与决策,2000,15(4):455 - 457.
(ZHANG Yingwei, WANG Jian, ZHANG Siying. Linear state feedback stabilization for a class of large-scale systems with similar composite structure [J]. *Control and Decision*, 2000, 15(4): 455 - 457.)
- [5] 孙洪飞,赵军.切换对称组合系统的稳定性[J].控制理论与应用,2003,20(3):441 - 444.
(SUN Hongfei, ZHAO Jun. Stability of a class of switched symmetric composite systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2003, 20(3): 441 - 444.)
- [6] BROCKETT R W, WILLEMS J L. Discretized partial differential equations: examples on control systems defined on modules [J]. *Automatica*, 1974, 10(4): 507 - 515.
- [7] HOVD M, SKOGESTSD S. Control of symmetrically interconnected plants [J]. *Automatica*, 1994, 30(6): 957 - 973.
- [8] 黄守东,张嗣瀛.对称循环组合系统的几个控制问题[J].控制理论与应用,1999,16(4):478 - 482.
(HUANG Shodong, ZHANG Siying. Some control problems for symmetric circulant composite systems [J]. *Control Theory & Applications*, 1999, 16(4): 478 - 482.)
- [9] BOERLLIST M. C, HOGEWEG P. Spatial gradients enhance persistence of hypercycles [J]. *Physica D*, 1995, 88(1): 29 - 39.
- [10] 江兆林,周章鑫.关于r-循环矩阵的非奇异性[J].高校应用数学学报,1995,10(2):222 - 226.
(JIANG Zhaolin, ZHOU Zhangxin. Non-singularity of r-circulant Matrices [J]. *Applied Mathematics—A Journal of Chinese Universities*, 1995, 10(2): 222 - 226.)
- [11] DAVIS P J. *Circulant Matrices* [M]. New York: John Wiley & Sons, 1979.

作者简介:

李建华 (1957—),男,东北大学博士生,沈阳大学教授,研究方向为组合系统的结构分析、切换系统和切换组合系统的稳定性, E-mail: ljhsr@163.com; sr2000@163.com;

苏瑞 (1960—),女,沈阳大学副教授,研究方向为计算机控制与仿真, E-mail: surui5000@163.com;

李彦平 (1957—),男,沈阳大学教授,研究方向为复杂系统理论及应用、计算机控制与仿真, E-mail: liypq88@sina.com;

赵军 (1957—),男,东北大学教授,博士生导师,现为中国自动化学会控制论委员会委员,研究方向为复杂非线性系统的结构、混杂系统、切换系统稳定性, E-mail: zdongbo@pub.ln.cninfo.net.