

时延神经元的 Hopf 分岔控制

张洪¹, 陈天麒²

(1. 中央民族大学 物理与电子工程学院, 北京 100081; 2. 成都电子科技大学 电子工程学院, 四川 成都, 610054)

摘要: 通过对时延神经元的分析得到相应的控制器, 使时间延迟作为分岔参数得到有效的控制; 由线性化理论确定出 Hopf 分岔点的位置, 得到相应的控制条件, 并从理论上证明了控制器的可行性. 实例分析表明该理论与仿真结果相一致.

关键词: Hopf 分岔; Routh-Hurwitz 判别法; 稳定性

中图分类号: O175 **文献标识码:** A

Control of Hopf bifurcation for neuron with time-delay

ZHANG Hong, CHEN Tian-qi

(1. Academy of Physics and Electronic Engineering, Central University for Nationalities, Beijing 100081, China;

2. School of Electronic Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu Sichuan 610054, China)

Abstract: In this paper, a Hopf bifurcation controller is derived from the analysis of time-delay neuron. The controller uses time-delay as active factor that is able to control the bifurcation efficiently. From linear theory, we get the point of Hopf bifurcation and corresponding criteria of stabilization, and the controller is theoretically proved to be viable. Examples are given and numerical simulations are performed to illustrate the results.

Key words: Hopf bifurcation; Routh-Hurwitz method; stability

1 引言 (Introduction)

对于神经网络而言, 时间延迟相对于其他系统参数, 对神经网络有着重要影响. 不同的时间延迟会导致神经网络出现收敛、周期以及混沌等不同的状态. Hopf 分岔, 即是由稳定的平衡点到周期的一种失稳现象. 能否通过控制器的作用, 使时延神经网络在不同的时间延迟条件下保持收敛, 使系统处于稳定或不同幅值的极限环, 这对语音识别、机械控制, 图像处理等领域中, 由于时延造成的 Hopf 现象的控制有着重要的意义^[1-3]. 然而现有文献[4~7], 对于时延神经元系统的 Hopf 分岔控制, 主要集中于由非时延参数来控制的研究. 对于用时延参数来控制的研究却未见说明.

就此, 本文针对一类时延神经元系统的 Hopf 分岔控制进行研究. 提出了由时间延迟作为分岔稳定因子的控制器, 对时延神经元系统进行控制. 文中第2节分别对单时延神经元系统和二时延神经元系统进行分析, 提出不同的控制项作为控制器, 得到时间

延迟作为分岔因子的控制项. 第3节在系统不改变特征的情况下, 通过理论证明得到系统渐进稳定的控制条件. 最后通过实例的数值仿真结果验证了结论的正确性.

2 时延神经元系统控制器分析 (Controller analysis of time delayed neural systems)

2.1 单时延神经元系统控制器分析 (Controller analysis of one time delayed neural system)

由文献[8]可知, 单个时延神经元系统

$$\frac{dy}{dt} = -y(t) + af(y(t)) - bf(y(t-\tau)). \quad (1)$$

在一定条件下能产生 Hopf 分岔, 其中参数 a, b 为系统参数, f 为激发函数, τ 为时间延迟.

为了讨论控制的稳定性和有效性条件, 本文中设 $f(0) = 0$ (当 $f(0) \neq 0$ 时, 可以通过对系统平衡点的坐标变换得以实现). 令控制项为 $u(t)$, 则控制系统可以设计为

$$\frac{dy}{dt} = -y(t) + af(y(t)) - bf(y(t-\tau)) + u(t). \quad (2)$$

由 $f(0) = 0$ 可知, 式(1) 有平衡点 $y^* = 0$. 为了使系统在施加控制后平衡点不发生变化, $y^* = 0$ 也应是函数 $u(t)$ 的零点, 即 $u(t, y^*) = 0$. 式(2) 在原点的邻域内, 采用 Taylor 级数将 $f(\cdot)$ 展开, 取一阶近似可得微分方程

$$\frac{dy}{dt} = -y(t) + af'(0)y(t) - bf'(0)y(t-\tau) + u(t). \quad (3)$$

其中 $f'(0)$ 为函数 f 在原点的一阶导数值.

为了得到控制器的有效形式, 本文分别对不同形式的控制项 $u(t)$ 进行了分析, 具体如下:

1) 选取控制项 $u(t) = ky(t)$.

当 $\tau = 0$ 时, 如果有

$$\lambda = -1 + af'(0) - bf'(0) + k < 0, \quad (4)$$

微分方程(3) 的特征根为负实数, 原点是渐进稳定的平衡点. 从时延微分方程理论可知, 系统(1) 的解亦是原点局部渐进稳定的.

当 $\tau \neq 0$ 时, 令 λ 为微分方程(3) 的特征根, 则有 $y(t) = ce^{\lambda t}$ 为该方程的解, 这样我们得到该特征根表达式

$$\lambda + 1 - af'(0) + bf'(0)e^{-\lambda\tau} - k = 0. \quad (5)$$

为了分析超越方程(5) 解的特性, 对 $e^{-\lambda\tau}$ 采用幂级数展开, 取二阶近似得

$$\lambda = -1 + a' - b'(1 - \lambda\tau + (\lambda\tau)^2/2) + k, \quad (6)$$

其中: $a' = af'(0)$, $b' = bf'(0)$. 整理式(6) 得

$$\lambda^2 + \lambda \frac{2(1 - b'\tau)}{b'\tau^2} + \frac{2(1 + b' - a' - k)}{b'\tau^2} = 0. \quad (7)$$

由 Routh-Hurwitz 判据可知, 当满足式(8) 条件时

$$\frac{2(1 - b'\tau)}{b'\tau^2} > 0, \quad \frac{2(1 + b' - a' - k)}{b'\tau^2} > 0. \quad (8)$$

采用控制项 $u(t) = ky(t)$ 单时延神经元系统, 含有负实部的特征方程根.

取 $1 - b'\tau = 0$, 可以求得特征方程(7) 有一对虚根 $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, 此时

$$\tau^* = 1/b'. \quad (9)$$

由文献[9] 知, 在满足式(8) 条件下, 原点是系统是局部稳定的平衡点, 当 τ 通过临界值 $\tau^* = 1/b'$ 时, 在平衡点有 Hopf 分岔.

2) 选取控制项为 $u(t) = ky(t - \tau)$.

同理, 当 $\tau = 0$ 时, 如果

$$\lambda = -1 + a' - b' + k < 0. \quad (10)$$

微分方程(3) 的特征根为负实数, 原点是渐进稳定的平衡点. 此时, 系统(1) 的解亦是原点局部渐进稳定的.

当 $\tau \neq 0$ 时, 用上述同样方法可以求得

$$\lambda = -1 + a' - (b' - k)(1 - \lambda\tau + (\lambda\tau)^2/2). \quad (11)$$

对式(11) 进行整理得

$$\lambda^2 + \lambda \frac{2(1 - (b' - k)\tau)}{b'\tau^2} + \frac{2(1 + b' - a' - k)}{b'\tau^2} = 0. \quad (12)$$

由 Routh-Hurwitz 判据可知, 当上式二次方程的系数满足式(13) 条件时

$$\frac{1 - (b' - k)\tau}{b'\tau^2} > 0, \quad \frac{1 + b' - a' - k}{b'\tau^2} > 0. \quad (13)$$

采用 $u(t) = ky(t - \tau)$ 为控制项的时延系统含有负实部的特征根. 从时延微分方程理论可知, 系统(1) 的解亦是原点局部渐进稳定的.

取 $1 - (b' - k)\tau = 0$, 可求得特征方程(12) 有一对虚根 $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, 此时

$$\tau^* = 1/(b' - k). \quad (14)$$

由文献[9] 知, 在满足式(13) 条件下, 原点是系统是局部稳定的平衡点, 当 τ 通过临界值 $\tau^* = 1/(b' - k)$ 时, 在平衡点有 Hopf 分岔.

比较控制项 $u(t) = ky(t)$ 与 $u(t) = ky(t - \tau)$ 的分岔条件可以看出, 在其它参数给定情况下, 单时延神经元系统, 采用 $u(t) = ky(t)$ 作为控制项, 控制项的参数 k 并不影响分岔点的 τ^* 的值, 用时间延迟 τ 的控制不起作用; 而采用 $u(t) = ky(t - \tau)$ 作为控制项, 通过反馈参数 k 的大小可以调节时间延迟 τ 作为控制 Hopf 分岔的参数, 能起控制作用. 因此应选择 $u(t) = ky(t - \tau)$ 作为单时延神经元系统控制项.

2.2 二时延神经元系统 (Two time delayed neural system)

考虑如下具有时延的二神经元连续神经元系统^[10]

$$\begin{cases} \frac{dy_1(t)}{dt} = -y_1(t) + a_1 f(y_2(t)) - b_1 f(y_2(t - \tau_1)), \\ \frac{dy_2(t)}{dt} = -y_2(t) + a_2 f(y_1(t)) - b_2 f(y_1(t - \tau_2)). \end{cases} \quad (15)$$

若控制项加在第二个方程上得

$$\begin{cases} \frac{dy_1(t)}{dt} = -y_1(t) + a_1 f(y_2(t)) - \\ \quad b_1 f(y_2(t - \tau_1)), \\ \frac{dy_2(t)}{dt} = -y_2(t) + a_2 f(y_1(t)) - \\ \quad b_2 f(y_1(t - \tau)) + u(t). \end{cases} \quad (16)$$

为了叙述的简便,本文设 $\tau_1 = \tau_2 = \tau$, 当 $\tau_1 \neq \tau_2$ 下面的分析方法同样适用,本文就不再单独讨论. 这里同样设 $f(0) = 0$, 由式(15)可知, $y^* = 0$ 是该微分方程平衡点,为了使系统施加控制后平衡点不发生变化,那么 $y^* = 0$ 也应是函数 $u(t)$ 的零点,即 $u(t, y^*) = 0$. 将式(16)中 $f(\cdot)$ 在原点的邻域内采用 Taylor 级数展开,取一阶近似可得微分方程

$$\begin{cases} \frac{dy_1(t)}{dt} = -y_1(t) + a_1 f'(0)y_2(t) - \\ \quad b_1 f'(0)y_2(t - \tau), \\ \frac{dy_2(t)}{dt} = -y_2(t) + a_2 f'(0)y_1(t) - \\ \quad b_2 f'(0)y_1(t - \tau) + u(t). \end{cases} \quad (17)$$

对于控制项 $u(t)$ 的选取,采用以下两种形式:

1) 选取控制项 $u(t) = ky_1(t)$.

与单时延神经元系统分析相一致,当 $\tau = 0$ 时,参数的选择要保证原点为局部渐进稳定性. 即对特征方程(18)求解,使方程的根有负实部,原点是渐进稳定的平衡点

$$(\lambda + 1)^2 - (a_2 f'(0) - b_2 f'(0) + k)(a_1 f'(0) - b_1 f'(0)) = 0. \quad (18)$$

由 Routh-Hurwitz 判据可知,满足式(19)条件时,

$$1 - (a'_1 - b'_1)(a'_2 - b'_2) - k(a'_1 - b'_1) > 0. \quad (19)$$

微分方程(17)特征根有负实部,原点是渐进稳定的平衡点. 从时延微分方程理论可知,系统(16)的解亦是原点局部渐进稳定的.

当 $\tau \neq 0$ 时,令 λ 为微分方程(17)的特征根,可以得到特征方程表达式

$$\det \begin{pmatrix} \lambda + 1 & -a'_1 + b'_1 e^{-\lambda\tau} \\ -a'_2 + b'_2 e^{-\lambda\tau} - k & \lambda + 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (20)$$

为了分析超越特征方程的解,对式(20)中的 $e^{-\lambda\tau}$ 采用幂级数展开,取二阶近似得

$$\begin{aligned} &(\lambda + 1)^2 - a'_1 a'_2 - a'_1 k + \\ &(a'_1 b'_2 + a'_2 b'_1 + b'_1 k)(1 - \lambda\tau + (\lambda\tau)^2/2) - \\ &b'_1 b'_2(1 - 2\lambda\tau + (2\lambda\tau)^2/2) = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

将式(21)整理后,得式(22). 其中: $p = a'_1 b'_2 + a'_2 b'_1$,

$$q = b'_1 b'_2, r = a'_1 a'_2, k_1 = b'_1 k, k_2 = a'_1 k - b'_1 k.$$

$$\begin{aligned} &\lambda^2 + \lambda \frac{2 - (p + k_1 - 2q)\tau}{1 + ((p + k_1)/2 - 2q)\tau^2} + \\ &\frac{1 - r - q + p - k_2}{1 + ((p + k_1)/2 - 2q)\tau^2} = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

由 Routh-Hurwitz 判据可知,当满足条件(23)时

$$\begin{cases} \frac{2 - (p + k_1 - 2q)\tau}{1 + ((p + k_1)/2 - 2q)\tau^2} > 0, \\ \frac{1 - r - q + p - k_2}{1 + ((p + k_1)/2 - 2q)\tau^2} > 0. \end{cases} \quad (23)$$

采用 $u(t) = ky_1(t)$ 为控制项的二时延系统含有负实部的特征方程根.

当 $2 - (p + k_1 - 2q)\tau = 0$ 时,可以求得特征方程有一对虚根 $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, 此时

$$\tau^* = 2/(p + k_1 - 2q). \quad (24)$$

由文献[9]知,如果原点在满足条件(23)时,原点是系统是局部稳定的平衡点,同时 τ^* 使式(24)成立,那么当 τ 通过临界值时,在平衡点有 Hopf 分岔.

2) 选取控制项 $u(t) = ky_2(t)$.

当 $\tau = 0$ 时,有特征方程

$$(\lambda + 1)(\lambda + 1 - k) - (a'_1 - b'_1)(a'_2 - b'_2) = 0. \quad (25)$$

如微分方程(17)的根有负实部,原点是渐进稳定的平衡点,则由 Routh-Hurwitz 判据可知

$$\begin{cases} 2 - k > 0, \\ 1 - k + a'_1 b'_2 + a'_1 b'_2 - a'_1 a'_2 - b'_1 b'_2 > 0. \end{cases} \quad (26)$$

当式(26)满足时,原点是渐进稳定的平衡点,系统(16)的解亦是原点局部渐进稳定的.

当 $\tau \neq 0$ 时,令 λ 为微分方程(17)的特征根,可以得到该特征方程的表达式

$$\det \begin{pmatrix} \lambda + 1 & -a'_1 + b'_1 e^{-\lambda\tau} \\ -a'_2 + b'_2 e^{-\lambda\tau} & \lambda + 1 - k \end{pmatrix} = 0. \quad (27)$$

为了分析超越特征方程的解,对式(27)中的 $e^{-\lambda\tau}$ 采用幂级数展开,取二阶近似得

$$\begin{aligned} &(\lambda + 1)(\lambda + 1 - k) - \\ &a'_1 a'_2 + (a'_1 b'_2 + a'_2 b'_1)(1 - \lambda\tau + (\lambda\tau)^2/2) - \\ &b'_1 b'_2(1 - 2\lambda\tau + (2\lambda\tau)^2/2) = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

将式(28)整理后得

$$\lambda^2 + \lambda \frac{2 - k - (p - 2q)\tau}{1 + (p/2 - 2q)\tau^2} + \frac{1 - k - r - q + p}{1 + (p/2 - 2q)\tau^2} = 0. \quad (29)$$

由 Routh-Hurwitz 判据可知,当满足式(30)条件时

$$\frac{2-k-(p-2q)\tau}{1+(p/2-2q)\tau^2} > 0, \frac{1-k-r-q+p}{1+(p/2-2q)\tau^2} > 0, \quad (30)$$

采用 $u(t) = ky_2(t)$ 为控制项的二时延系统含有负实部的特征方程根.

若取 $2-k-(p-2q)\tau = 0$, 可以求得该特征方程有一对虚根 $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, 此时

$$\tau^* = (2-k)/(p-2q). \quad (31)$$

由文献[9]知, 如果原点在满足条件(30)时, 原点是系统是局部稳定的平衡点, 同时 τ^* 使式(31)成立, 那么当 τ 通过临界值时, 在平衡点有 Hopf 分岔.

比较控制项 $u(t) = ky_1(t)$ 与 $u(t) = ky_2(t)$ 的分岔条件可以看出, 与单时延神经元系统不同, 在其它参数给定情况下, 二时延神经元系统, 两种控制项的参数 k 都可以调节时间延迟 τ 作为控制 Hopf 分岔的参数, 起到控制作用. 但控制项 $u(t) = ky_2(t)$ 比 $u(t) = ky_1(t)$ 的调节更为便捷, k 的取值范围也较后者更为广泛.

3 时延神经元系统控制的稳定性 (Control stability of neural system)

为了能够清晰的说明控制器对神经网络的时延参数 Hopf 分岔的控制, 在对时延神经元系统进行控制稳定性分析之前, 我们首先给出以下引理.

引理 1 具有时延的线性动力系统

$$\frac{dy_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n [a_{ij}y_j(t) + b_{ij}y_j(t-\tau)], \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (32)$$

如果

1) 存在 τ_0 , 当 $\tau = \tau_0$ 时, 式(32)的特征方程 $\Delta(\lambda, \tau_0) = 0$ 的根有严格的负实部;

2) 对于任意实数 ξ 和 $\tau \in [\tau_0, \tau']$ ($\tau_0 < \tau'$) 或 $\tau \in [\tau', \tau_0]$ ($\tau_0 \geq \tau'$), 有 $\Delta(i\xi, \tau) \neq 0$, 则系统的平衡点是渐进稳定的.

证 时延动力系统(32)有平衡点 $y_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 则系统的特征方程为

$$\Delta(\lambda, \tau) = \det(A + Be^{-\tau\lambda} - \lambda I) = 0. \quad (33)$$

其中: $A = (a_{ij})_{n \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times n}$. 显见 $\Delta(\lambda, \tau) = 0$ 关于 λ, τ 是连续的. 不妨设 $\tau_0 < \tau'$, 由条件1), 2) 可知, 当 $\tau \in [\tau_0, \tau']$, $\Delta(\lambda, \tau) = 0$ 无纯虚根或零根, 从而系统(32)无周期解.

由条件1) 及 $\Delta(\lambda, \tau), \tau \in [\tau_0, \tau']$ 的连续性, $\Delta(\lambda, \tau) = 0$ 不含有正实部的解, 否则利用反证法, 根据中值定理可知, 必然存在 ξ_k 和 $\tau_k \in [\tau_0, \tau']$, 使

得 $\Delta(i\xi_k, \tau_k) = 0$, 这与条件2) 相矛盾.

综上所述, $\Delta(\lambda, \tau) = 0, \tau \in [\tau_0, \tau']$ 有负实部的根, 故系统(32)的平衡点是渐进稳定的.

证毕.

对于单时延神经元系统, 控制项为 $u(t) = ky(t-\tau)$, 如果满足式(14)条件, 可得

$$-\xi^2 + i\xi \frac{2(1-(b'-k)\tau)}{b'\tau^2} + \frac{2(1+b'-a'-k)}{b'\tau^2} \neq 0. \quad (34)$$

由式(10)(34)以及引理1, 有

定理 1 如果参数满足下列条件:

- 1) $-1 + a' - b' + k < 0$;
- 2) $\frac{2(1-(b'-k)\tau)}{b'\tau^2} > 0, \frac{2(1+b'-a'-k)}{b'\tau^2} > 0$,

则具有单时延神经元系统(1)在加入控制项 $u(t) = ky(t-\tau)$ 后, 仍然是关于平衡点局部渐进稳定的, 即通过控制后, 系统的平衡点位置及其特性不改变.

对于二时延神经元系统, 控制项为 $u(t) = ky_1(t)$, 如果满足式(23)条件时, 对于任意纯虚数 $i\xi$ 可得

$$-\xi^2 + i\xi \frac{2-(p-k_1-2q)\tau}{1+((p-k_1)/2-2q)\tau^2} + \frac{1-r-q+p+k_2}{1+((p+k_1)/2-2q)\tau^2} \neq 0. \quad (35)$$

由式(19)(35)以及引理1, 有

定理 2 如果参数满足下列条件:

- 1) $1 - (a'_1 - b'_1)(a'_2 - b'_2) - k(a'_1 - b'_1) > 0$;
- 2) $\frac{2-(p+k_1-2q)\tau}{1+((p+k_1)/2-2q)\tau^2} > 0$, $\frac{1-r-q+p-k_2}{1+((p+k_1)/2-2q)\tau^2} > 0$,

则具有时延二神经元系统(15)在加入控制项 $u(t) = ky_1(t)$ 后, 仍然是关于平衡点局部渐进稳定的, 即通过控制后, 系统的平衡点位置及其特性不改变.

对于二时延神经元系统, 控制项为 $u(t) = ky_2(t)$, 如果满足条件(29)时, 可得

$$-\xi^2 + i\xi \frac{2-k-(p-2q)\tau}{1+((p-k_1)/2-2q)\tau^2} + \frac{1-k-r-q+p}{1+((p+k_1)/2-2q)\tau^2} \neq 0. \quad (36)$$

由式(26)(36)以及引理1, 有

定理 3 如果参数满足下列条件:

- 1) $2-k > 0, 1-k-r-q+p > 0$;

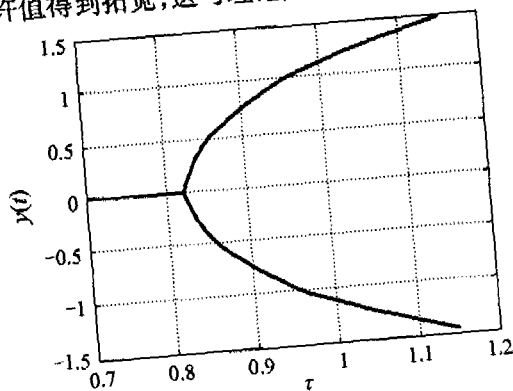
$$2) \quad \frac{2-k-(p-2q)\tau}{1+(p/2-2q)\tau^2} > 0,$$

$$\frac{1-k-r-q+p}{1+(p/2-2q)\tau^2} > 0,$$

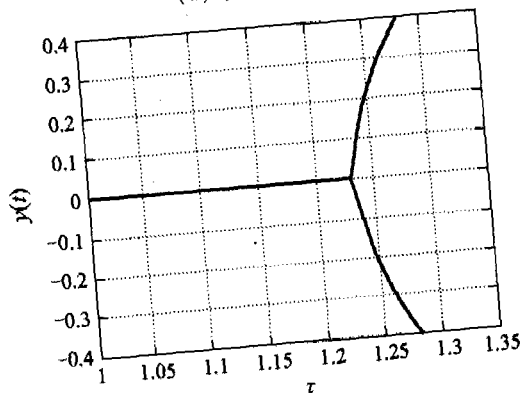
则具有时延二神经元系统(15)在加入控制项 $u(t) = ky_2(t)$ 后,仍然是关于平衡点局部渐进稳定的,即通过控制后,系统的平衡点位置及其特性不改变。

4 实例分析 (Example analysis)

本文仿真中取 $f(x) = \sin x$ 作为时延神经元系统中的函数。对于单时延神经元系统(1),考虑 $a = 1.63, b = 1.3$ 的实例情况。在满足定理1条件下,给出控制项为0和控制项 $u(t) = 0.4y(t-\tau)$ 两种控制条件,分别绘出二者的 Hopf 分岔图,具体如图1(a)(b)所示。对于二时延神经元系统(15),考虑 $a_1 = a_2 = 1.4, b_1 = b_2 = 0.6$ 的实例情况,在满足定理2与定理3条件下,分别给出控制项为0, $u(t) = -0.4y_1(t), u(t) = -0.4y_2(t)$ 以及 $u(t) = -0.7y_2(t)$ 的 Hopf 分岔图,如图2(a)~(d)所示。从图上可以明显看到由于控制项的引入,不论单时延神经元系统,还是二时延神经元系统,都使 τ 作为分岔控制参数的容许值得到拓宽,这与理论分析结果相互一致。

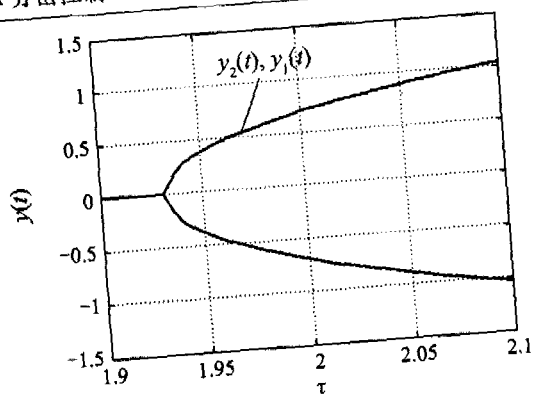


(a) 控制项为0

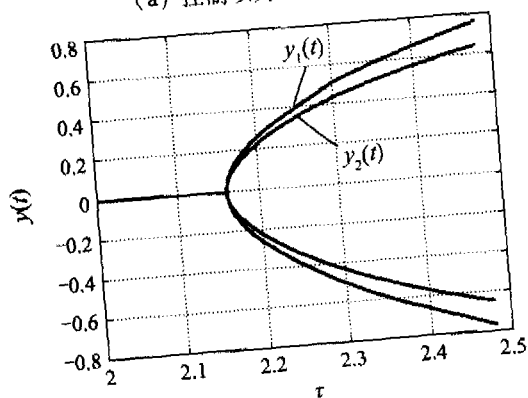


(b) 控制项为 $u(t) = -0.4y(t - \tau)$

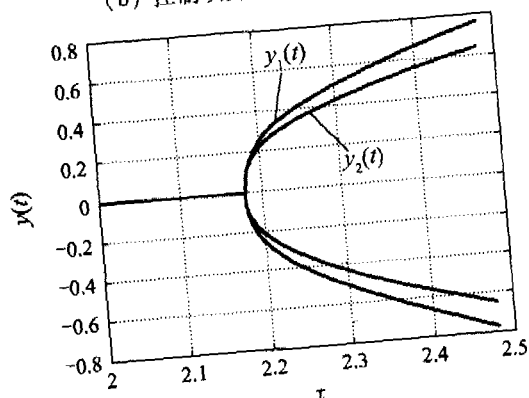
图1 单时延神经元系统 Hopf 分岔图
Fig. 1 Bifurcation figure of neural network with one time-delay



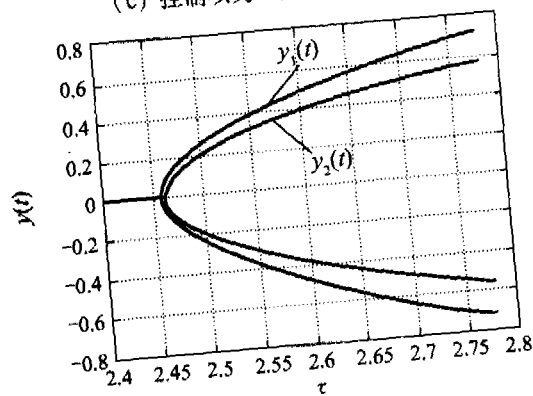
(a) 控制项为 $u(t) = 0$



(b) 控制项为 $u(t) = -0.4y_1(t)$



(c) 控制项为 $u(t) = -0.4y_2(t)$



(d) 控制项为 $u(t) = -0.7y_2(t)$

图2 二时延神经元系统 Hopf 分岔图
Fig. 2 Bifurcation figure of neural network with double time-delay

5 结论(Conclusion)

本文针对一类时延神经元系统的复杂动力学行为进行了分析,对线性化后含有指数的超越方程进行幂级数展开,求解方程的特征根,得到控制系统 Hopf 分岔条件.由线性的时延神经元系统稳定性引理判定,给出分岔稳定因子 τ 的参数范围,使系统具有负实部特征根;得到系统稳定条件,指出了如何控制时间延迟作为分岔的控制参数.

参考文献(References):

- [1] 刘镇清,李成林,刘江韦,等. 超声探伤信号的时延神经网络处理[J]. 声学学报,1997,22(4):297-302.
(LIU Zhenqing, LI Chenling, LIU Jiangwei, et al. Time delay neural network for ultrasonic flaw detection[J]. *Acta Acustica*, 1997,22(4):297-302.)
- [2] 江铭虎,林碧琴,袁保宗. 音素识别中时延神经网络的一种快速学习算法[J]. 信号处理,1998,14(4):331-336.
(JIANG Minghu, LIN Biqin, YUAN Baozong. Fast learning algorithms for time-delay neural networks in phoneme recognition[J]. *Signal Processing*, 1998,14(4):331-336.)
- [3] 曾庆军,宋爱国,黄惟一. 基于主动时延神经网络的从机械手碰撞研究[J]. 东南大学学报,1999,29(1):25-29.
(ZENG Qingjun, SONG Aiguo, HUANG Weiwei. Research on slave manipulator collision based on active time delay neural networks[J]. *J of Southeast University*, 1999,29(1):25-29.)
- [4] CAO Y J, WU Q H. A note on stability of analog neural networks with time delays[J]. *IEEE Trans on Neural Networks*, 1996,7(4):1533-1535.
- [5] WEI Junjie, RUAN Shigui. Stability and bifurcation in a neural network model with two delays[J]. *Physica D*, 1999,130(3):255-273.
- [6] 李绍容,廖晓峰. 连续时延神经网络的 Hopf 分岔现象研究[J]. 电子科技大学学报,2002,31(2):163-167.
(LI Shaorong, LIAO Xiaofeng. Study of bifurcation phenomenon for neural network with continuously time delay[J]. *J of University of Electronic Science and Technology of China*, 2002,31(2):163-167.)
- [7] 陈从颜,宋文忠. 一类二阶时延神经网络的分岔分析和控制[J]. 控制理论与应用,2003,20(1):45-48.
(CHEN Congyan, SONG Wenzhong. Bifurcation analysis and control of delayed neural network model with two-neurons[J]. *Control Theory & Applications*, 2003,20(1):45-48.)
- [8] 廖晓峰,吴中福,虞厥邦. 一个带时延神经网络的分岔现象研究[J]. 电子科学学报,2000,22(6):972-977.
(LIAO Xiaofeng, WU Zhongfu, YU Juebang. Study of bifurcation phenomenon for a neural network with time delay[J]. *J of Electronics and Information Technology*, 2000,22(6):972-977.)
- [9] HASSARD B D, KAZARINOFF W D, WAN Y H. *Theory and Application of Hopf Bifurcation* [M]//London Math Soc. England: Cambridge University Press,1982, Note Series 41.
- [10] 廖晓峰,吴中福,秦拯. 带两个不同时延神经网络的稳定性研究[J]. 计算机学报,2001,24(8):872-875.
(LIAO Xiaofeng, WU Zhongfu, QIN Zheng. Asymptotic stability for neural networks with two time delays[J]. *Chinese J of Computers*, 2001,24(8):872-875.)

作者简介:

张洪 (1975—),男,中央民族大学讲师,主要研究方向为非线性控制系统,以及混沌同步的分析与研究, E-mail: zhang_hong_@163.com;

陈天麒 (1939—),男,电子科技大学教授,博士生导师,主要从事自适应信号处理,信号多参量估计与跟踪及电子工程系统等方面的研究工作, E-mail: ecm702@uestc.edu.cn.