

## 最小方差观测器逆设计实现方法

郭雪梅

(中山大学信息科学与技术学院, 广东广州 510275)

**摘要:** 针对最小方差观测器正向设计存在的局限性, 提出了一种允许部分极点配置的逆设计方法. 该方法由观测器部分极点配置和观测器最小方差化两个环节组成. 该文重点研究了逆设计方法提出的理论依据和最小方差化实现的技术细节, 并讨论了对噪声协方差矩阵的设定估计问题. 数值仿真结果印证了该方法的有效性.

**关键词:** 最小方差; 观测器; 逆向设计; 极点配置

**中图分类号:** TP271 **文献标识码:** A

## Inverse design approach for minimum variance observers

GUO Xue-mei

(School of Information Science & Technology, Sun Yat-Sen University, Guangzhou Guangdong 510275, China)

**Abstract:** This paper presents an inverse design approach for minimum variance observers to cope with the drawbacks of its implementation in direct design. The proposed approach comprises two steps: the partial pole-placement and the variance minimization. The theoretic basis of the proposed approach and the implementation of the variance minimization are emphatically studied. The estimation of the co-variance matrix is also addressed. Finally, numerical simulation is performed to validate the proposed approach.

**Key words:** minimum variance; observers; inverse design; pole-placement

### 1 引言 (Introduction)

考虑系统

$$\dot{x} = Ax + Bu + w, y = Cx + v. \quad (1)$$

其中: 状态  $x$  和传感器输出  $y$  分别为  $n$  和  $m$  维向量,  $u$  为标量输入,  $w$  和  $v$  分别为零均值的控制过程干扰和传感器测量噪声, 协方差矩阵分别为  $W$  和  $V$ . 假设  $(C, A)$  是能观测的, 且  $C$  是行满秩的. 状态观测器的一般形式为

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + G(y - C\hat{x}). \quad (2)$$

$\hat{x}$  是  $x$  的观测估计,  $G$  为观测器增益矩阵. 状态估计误差记为  $e = x - \hat{x}$ , 相应的状态观测误差方程为

$$\dot{e} = (A - GC)e + w - Gv. \quad (3)$$

最小方差化是观测器最为普遍的设计目标, 最小方差观测器的观测增益矩阵为<sup>[1]</sup>

$$G = PC^T V^{-1}. \quad (4)$$

其中  $P$  为稳态估计误差的协方差矩阵, 是以下 Riccati 方程的解:

$$AP + PA^T + W - PC^T V^{-1} CP = 0. \quad (5)$$

在实际应用中, 最小方差观测器的正向设计实

现存在许多困难, 这主要表现在

i) 实际噪声协方差矩阵  $W$  和  $V$  很难获得, 需要作为设计参数利用试凑法确定<sup>[1]</sup>;

ii) 观测器设计既要保证状态误差快速衰减, 又要避免观测增益过大发生噪声激励导致系统不稳定, 这就需要对状态观测误差系统(3)的极点进行合理的配置. 由于最小方差化设计目标与上述要求无直接显式的联系, 因而难以通过选择协方差矩阵  $W$  和  $V$  在两者之间取得合理的平衡<sup>[2]</sup>;

iii) 观测器设计是基于传感器输出信息实现的, 即依赖于传感器的个数及传感信息的类型, 而最小方差化设计目标难以提供传感器个数和传感信息类型选择的先验指导.

受 Kalman 提出的 LQR 逆设计问题启发<sup>[3]</sup>, 该文提出最小方差观测器的逆设计方法, 以克服正向设计存在的上述局限性, 使最小方差观测器能够得到更为有效的应用.

### 2 问题的提出 (Problem statement)

最小方差观测器逆设计目标可以描述为: 确定

观测增益矩阵  $G$ , 实现对  $A - GC$  的  $n - m$  个极点进行配置, 同时确保生成的观测器(2) 是最小方差型观测器, 即存在  $W \geq 0$  和  $V \geq 0$ , 使得观测增益阵  $G$  满足式(4)(5).

方便起见, 不失一般性, 假定系统(1) 中的矩阵为如下分块标准型:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}, C = [0, I]. \quad (6a)$$

$W, P$  和  $G$  具有相应的分块形式

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_3 & W_4 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}. \quad (6b)$$

令  $K$  为矩阵  $C$  的右广义逆矩阵, 即  $CK = I$ , 不难看出,  $K$  应具有分块形式  $K = [K_1^T, I]^T$ , 其中  $K_1$  为待定矩阵. 定义矩阵

$$T = \begin{bmatrix} I & -K_1 \\ 0 & I \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} I & -K_1 \\ 0 & I \end{bmatrix}. \quad (7)$$

注意到  $T = S^{-1}$ , 且

$$T(A - GC)S = TAS - TGCS = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 & \bar{A}_2 \\ \bar{A}_3 & \bar{A}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & G_1 - K_1 G_2 \\ 0 & G_2 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

其中子矩阵  $\bar{A}_i$  分别为

$$\bar{A}_1 = A_1 - K_1 A_3, \bar{A}_2 = \bar{A}_1 K_1 + A_2 - K_1 A_4, \quad (9a)$$

$$\bar{A}_3 = A_3, \bar{A}_4 = A_3 K_1 + A_4. \quad (9b)$$

观察式(8), 为了实现下块三角化, 令

$$G_1 = \bar{A}_2 + K_1 G_2, \quad (10a)$$

$$G_2 = \bar{A}_4 + \Delta. \quad (10b)$$

其中  $\Delta$  为  $m \times m$  维的待定矩阵, 式(8) 成为

$$T(A - GC)S = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 & 0 \\ \bar{A}_3 & -\Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 - K_1 A_3 & 0 \\ A_3 & -\Delta \end{bmatrix}. \quad (11)$$

由式(11) 知道状态观测误差系统(3) 的极点由矩阵  $A_1 - K_1 A_3$  和  $-\Delta$  的特征根组成, 依赖于待定矩阵  $\Delta$  和  $K_1$ . 按最小方差观测器逆设计目标的要求,  $\Delta$  和  $K_1$  的选择应遵循以下原则:

C1) 选择矩阵  $K_1$  使得矩阵  $A_1 - K_1 A_3$  的极点配置在指定的位置, 作为  $A - GC$  的前  $n - m$  个主导极点;

C2) 选择矩阵  $\Delta$  使得由式(10) 确定的  $G$  为一最小方差观测器的增益矩阵.

这里需要指出的是, 最小方差观测器的逆设计目标直接给出了传感器个数和传感信息选择的先验指导原则, 即

C3) 传感器的个数  $m$  与预配置主导极点的个数

是互补的(两者和为  $n$ ),  $m$  的选择能够平衡极点配置设计目标和方差最小化设计目标;

C4) 传感信息类型的选择应确保  $m$  个传感器所提供的传感信息是不冗余的, 以保证矩阵  $C$  是行满秩的.

因此,  $m$  是逆向设计实现的重要设计参数. 由  $(C, A)$  的能观测性假设知道,  $(A_3, A_1)$  也是能观测的, 基于现有的极点配置算法<sup>[1]</sup>, C1) 是可操作的, 在此不再赘述. 对于最小方差化过程 C2), 已有的观测器设计研究工作尚未有涉及, 下文将重点讨论其实现方法.

### 3 最小方差化实现 (Variance minimization)

考虑理想状态下系统(1) 的对偶状态方程

$$\dot{z} = A^T z + C^T \mu. \quad (12)$$

一方面, 式(4)(5) 产生的对偶状态反馈控制  $\mu = -G^T z$  极小化如下二次性能指标

$$J(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} (z^T W z + \mu^T V \mu) dt. \quad (13)$$

另一方面, 对应式(13) 的 LQR 反馈增益矩阵为观测器(2) 的最小方差观测器的观测增益矩阵. 因此, 判定增益矩阵  $G$  生成的观测器是否为最小方差型观测器等价于判定  $G$  生成的反馈控制律是否为 LQR 型控制器. 为便于讨论, 不失一般性, 置  $V = I$ . 对偶系统(12) 在反馈控制  $\mu = -G^T z$  作用下的反差矩阵记为  $\Phi(s) = I + G^T (sI - A^T) C^T$ . 利用 LQR 逆设计的判定准则<sup>[4]</sup> 知道, 若

$$\Phi^T(-j\omega)\Phi(j\omega) > I, \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (14)$$

则存在  $W \geq 0$  使得式(4)(5) 产生的对偶状态反馈控制  $\mu = -G^T z$  极小化二次性能指标(13), 进一步可以断定增益矩阵  $G$  对应的观测器为最小方差型观测器. 以下将利用上述对偶关系讨论观测器最小方差化的具体实现算法.

直接计算得到

$$\Phi^T(-j\omega) = (-j\omega I - \bar{\Phi}(-j\omega))^{-1}(-j\omega I + \Delta). \quad (15)$$

其中  $\bar{\Phi}(j\omega) = \bar{A}_4 + \bar{A}_3(j\omega I - \bar{A}_1)^{-1}\bar{A}_2$ . 将式(15) 代入到式(14) 中得到

$$(-j\omega I + \Delta)(j\omega I + \Delta^T) > (-j\omega I - \bar{\Phi}(-j\omega))(j\omega I - \bar{\Phi}^T(j\omega)). \quad (16)$$

令  $\tilde{\Phi}(j\omega) = \bar{A}_3 \bar{A}_2 + \bar{A}_1(j\omega I - \bar{A}_1)^{-1}\bar{A}_2$ , 可将式(16) 化简为

$$j\omega(\Delta - \Delta^T) + \Delta\Delta^T > -j\omega(\bar{A}_4 - \bar{A}_4^T) + \Theta(j\omega). \quad (17)$$

其中

$$\Theta(j\omega) = \tilde{\Phi}(-j\omega) + \tilde{\Phi}^T(j\omega) + \bar{\Phi}(-j\omega)\bar{\Phi}^T(j\omega). \quad (18)$$

结合式(6)和(4)推得  $G_2 = P_4$ , 由此知道子矩阵  $G_2$  是对称的. 由式(10b)直接推得

$$\Delta - \Delta^T = \bar{A}_4^T - \bar{A}_4,$$

再将其代入到式(17)中, 得到

$$\Delta \Delta^T > \Theta(j\omega), \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (19)$$

综合上述讨论, 得到如下事实:

**定理** 式(10a)(10b)确定的观测增益矩阵  $G$  生成最小方差型观测器的充要条件是矩阵  $\Delta$  满足条件(19).

对于按原则 C1) 选择好  $K_1$ , 子矩阵  $\bar{A}_1$  是 Hurwitz 的. 注意到  $\Theta(j\omega)$  为有理分式矩阵, 故有

$$\|\Theta\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_{\max}(\Theta(j\omega)) < \infty.$$

这里:  $\sigma_{\max}(\cdot)$  表示矩阵的最大奇异值,  $\|\cdot\|_\infty$  为传递函数的  $H_\infty$  范数<sup>[1]</sup>. 选定  $\alpha = \|\Theta\|_\infty$ , 则有

$$\Theta(j\omega) \leq \alpha I, \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (20)$$

对于任意的正定矩阵  $\Sigma > 0$ , 只要选择矩阵  $\Delta$  满足

$$\Delta \Delta^T = \alpha I + \Sigma, \quad (21)$$

条件(19)成立. 进一步将式(10b)代入到式(21)中得到

$$G_2 \bar{A}_4^T + \bar{A}_4 G_2 - G_2 G_2 + \bar{W}_4 = 0. \quad (22)$$

其中  $\bar{W}_4 = \alpha I + \Sigma - \bar{A}_4 A_4^T$ . 容易看出, 对任意选定的矩阵  $\Sigma > 0$  有

$$\bar{W}_4 > 0. \quad (23)$$

因而, Riccati 方程(22)一定存在正定对称解  $G_2$ <sup>[1]</sup>. 一旦求得观测增益矩阵的第2个子矩阵  $G_2$ , 便可进一步利用式(10a)确定出子矩阵  $G_1$ , 即

$$G_1 = A_1 K_1 + A_2 + K_1 (G_2 - A_3 K_1 - A_4). \quad (24)$$

综合上述讨论, 可将原则 C2) 的实现算法归纳如下:

- 步骤1 计算  $\|\Theta\|_\infty$ , 确定参数  $\alpha$ ;
- 步骤2 选择正定矩阵  $\Sigma > 0$ ;
- 步骤3 求解 Riccati 方程(22)得到矩阵  $G_2$ ;
- 步骤4 将  $G_2$  代入到式(24)得到矩阵  $G_1$ .

#### 4 讨论 (Discussions)

在式(5)两端分别左乘和右乘矩阵  $C$  和  $C^T$  得到

$$P_4 A_4^T + P_3 A_3^T + A_4 P_4 + A_3 P_3^T - P_4 P_4 + W_4 = 0. \quad (25)$$

由矩阵  $P$  的对称性知道  $P_3^T = P_2$ . 又由式(4)得到  $P_2 = G_1, P_4 = G_2$ . 进一步结合式(10a), 可将式(25)重新写成

$$G_2 \bar{A}_4^T + \bar{A}_4 G_2 - G_2 G_2 + \bar{A}_2^T \bar{A}_3^T + \bar{A}_3 \bar{A}_2 + W_4 = 0. \quad (26)$$

对比式(22)和式(26)得到

$$W_4 = \bar{W}_4 - \bar{A}_3 \bar{A}_2 - \bar{A}_2^T \bar{A}_3^T. \quad (27)$$

至此, 式(27)揭示了最小方差观测器逆设计过程对应噪声协方差矩阵的部分设定值. 综合(20)和(27)知道

$$W_4 = \Sigma + \alpha I - \bar{A}_4 \bar{A}_4^T - \bar{A}_3 \bar{A}_2 - \bar{A}_2^T \bar{A}_3^T \leq \Sigma + \alpha I. \quad (28)$$

在最小方差观测器正向设计方法中, 为了避免生成观测器的增益过高, 需要对噪声协方差矩阵的上界作限制<sup>[1]</sup>. 式(28)表明, 若对矩阵  $\Sigma$  的选取进行限制, 使得

$$\Sigma \leq (\beta - \alpha) I, \quad (29)$$

则最小方差观测器逆设计过程设定的  $W_4$  满足  $W_4 \leq \beta I$ . 这一事实表明, 矩阵  $\Sigma$  可作为设定方差最小化目标的另一重要设计参数.

#### 5 数值算例 (Numeric example)

本节将通过数值算例验证最小方差逆设计实现方法的有效性. 考虑文献[2]中用于描述最小方差观测器正向设计方法的阻尼谐波振荡器, 其状态方程为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\delta \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} w, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$y = [0, 1]x + v.$$

其中: 状态为  $x = [x_1, x_2]^T$ ,  $x_1(t)$  和  $x_2(t)$  分别为位置和速度变量,  $w$  和  $v$  分别为独立的白噪声. 在仿真中采用的参数分别为:  $\omega_n = 0.8$ ,  $\delta = 0.16$ ,  $V = 0.05$ . 过程噪声协方差矩阵为  $W = \beta I, \beta > 0$  由逆设计过程确定. 表1中列出了5种逆设计实现结果.

表1 逆设计实现结果\*

Table 1 Implementation results of inverse design approach

| 方案 | 极点1**   | $K_1$   | $-\Delta$ | $G_1$                     | $G_2$  | $\alpha$ | $\beta$ |
|----|---------|---------|-----------|---------------------------|--------|----------|---------|
| 1  | -0.3592 | -0.5612 | -1.7817   | $-4.4409 \times 10^{-16}$ | 1.8209 | 3.1746   | 0.2241  |
| 2  | -0.2740 | -0.4281 | -2.3358   | $2.2204 \times 10^{-16}$  | 2.2898 | 5.4558   | 0.3354  |
| 3  | -0.1876 | -0.2931 | -3.4115   | 0                         | 3.2791 | 11.6384  | 0.6426  |
| 4  | -0.1423 | -0.2223 | -4.4975   | 0                         | 4.3198 | 20.2279  | 1.0713  |
| 5  | -0.1027 | -0.1605 | -6.2317   | 0                         | 6.0144 | 38.8346  | 2.0011  |

注: “\*” 为  $\Sigma = 0$ ; “\*\*” 为定制配置极点.

为了印证逆设计实现结果生成的观测器为最小方差型观测器,利用最小方差正向设计方法,依据逆设计实现确定的过程协方差矩阵进行相应的最小方差观测器设计.正向设计结果在表2中列出.对比上述两表中相应栏目的结果不难看出,利用逆向设计实现的观测器可以等同对应一个最小方差正向设计的实现结果.

表2 正向设计实现结果

Table 2 Implementation results of forward design approach

| 方案 | $\beta^*$ | $G_1$                     | $G_2$  | 极点1      | 极点2     |
|----|-----------|---------------------------|--------|----------|---------|
| 1  | 0.2241    | $2.0209 \times 10^{-15}$  | 1.8211 | -0.35915 | -1.7820 |
| 2  | 0.3354    | $1.8278 \times 10^{-15}$  | 2.2897 | -0.27401 | -2.3357 |
| 3  | 0.6426    | $4.5561 \times 10^{-15}$  | 3.2792 | -0.18759 | -3.4116 |
| 4  | 1.0713    | $-3.4413 \times 10^{-16}$ | 4.3199 | -0.14230 | -4.4976 |
| 5  | 2.0011    | $1.7557 \times 10^{-15}$  | 6.0144 | -0.10270 | -6.2317 |

\*为逆设计实现设定.

假定被观测系统理想过程噪声方差为 $\beta = 1.0$ .图1给出了状态轨迹和传感器测量输出曲线,图2和图3分别比较了逆设计方案1,3和5的位置及速度的观测结果,仿真中观测状态初值均设定为 $[0,0]$ .不难看出,逆设计实现方式通过定制观测器主导极点可以更为方便地平衡观测器收敛速度和瞬态响应性能.

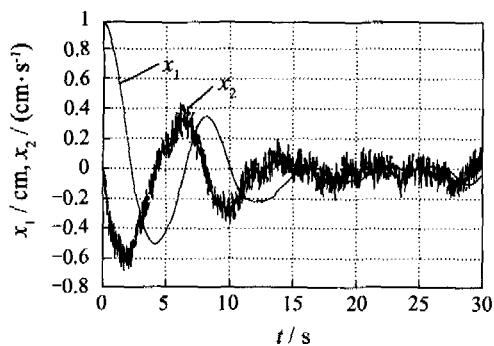


图1 实际状态轨迹及测量输出曲线

Fig. 1 Profiles of real states and measured output

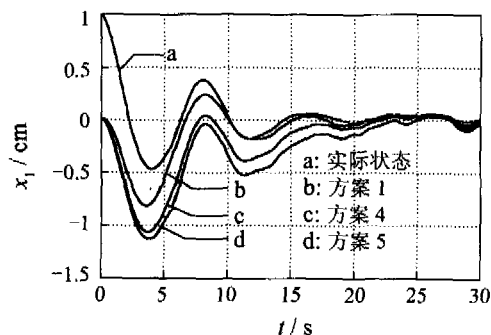


图2 位置的估计曲线

Fig. 2 Profiles of position estimations

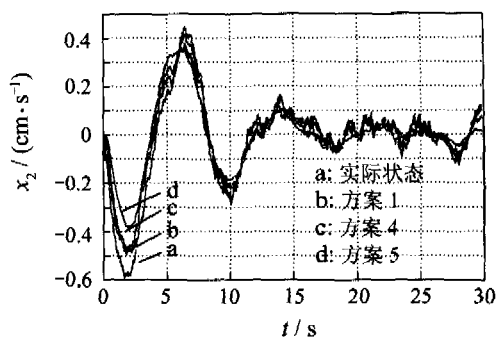


图3 速度的估计曲线

Fig. 3 Profiles of velocity estimations

## 6 结论(Conclusion)

本文给出了嵌入部分极点配置的最小方差观测器逆设计实现方法.该方法的主要特点是:1)实现观测器部分极点显式配置的同时保证其仍为最小方差型观测器;2)该方法实现过程不直接依赖于噪声协方差矩阵信息,只与系统模型有关,较正向设计实现更为自然和方便;3)对传感器数目及类型的选择具有显式的先验指导含义,便于将传感系统设计与观测器设计一体化,实现状态观测的整体优化<sup>[5]</sup>,在柔性机械臂逆动力学奇异行为的检测<sup>[6]</sup>中有重要的应用.

## 参考文献(References):

- [1] OBSERVERS F B. *The Control Handbook* [M]//LEVINE W S. Florida: CRC Press, 1996:607-638.
- [2] LEWIS F L. *Applied Optimal Control & Estimation* [M]. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1992:513-523.
- [3] KALMAN R E. When is a linear control system optimal? [J]. *Trans of the ASME, Series D, J of Basic Engineering*, 1964, 86:51-60.
- [4] FUJII T, NARAZIKI M. A complete optimality condition in inverse problem of optimal control [J]. *SIAM J of Control and Optimization*, 1984, 22(2):327-341.
- [5] 王国利,郭雪梅,张宪民. 柔性机械臂模态估计:多传感器组合策略个例研究 [J]. *应用基础与工程科学学报*, 1999, 7(4):423-429.  
(WANG Guoli, GUO Xuemei, ZHANG Xianmin. Modal estimations of flexible manipulators: case study for multi-sensor combinations [J]. *J of Basic Science & Engineering*, 1999, 7(4):423-429.)
- [6] 郭雪梅,王国利,张宪民. 柔性机械臂动力学奇异性渐近行为的比较研究 [J]. *自动化学报*, 2000, 26(3):324-331.  
(GUO Xuemei, WANG Guoli, ZHANG Xianmin. Asymptotic behavior of dynamic singularity of flexible manipulators: a comparative study [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2000, 26(3):324-331.)

## 作者简介:

郭雪梅 (1964—),女,中山大学信息科学与技术院副教授,1987年获清华大学工学学士学位,1990年获天津大学工学硕士学位,2002年获德国鲁尔大学计算工程硕士学位,主要研究领域为信息自动化,E-mail:guoxuemei@mail.sysu.edu.cn.