

不确定线性时滞系统的一种混杂状态反馈 保成本控制及优化设计方法

孙希明, 刘建昌, 赵 军

(东北大学 信息科学与工程学院 教育部流程工业综合自动化重点实验室, 辽宁 沈阳 110004)

摘要: 本文研究一类不确定线性时滞系统的混杂状态反馈保成本控制及优化设计问题. 假设存在有限个备选的控制增益已知的控制器, 并且其中任何单一的状态反馈控制器都不能镇定系统, 基于单 Lyapunov 函数的方法, 给出了混杂状态反馈保成本控制的充分条件及优化设计方案. 当备选的控制增益未知时, 利用多 Lyapunov 函数法, 同样给出混杂状态反馈保成本控制的充分条件及相应的优化设计方法. 最后用仿真验证了文中方法的有效性.

关键词: 混杂状态反馈; 保成本控制; 切换律

中图分类号: TP13

文献标识码: A

A Method of hybrid state-feedback guaranteed cost control and optimization design for uncertain linear time-delay system

SUN Xi-ming, LIU Jian-chang, ZHAO Jun

(Key Lab of Process Industry Automation of Ministry of Education, School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang Liaoning 110004, China)

Abstract: This paper focuses on the hybrid state-feedback guaranteed cost control and optimization design problem for a class of uncertain linear time-delay systems. Suppose that there exist finite candidate controllers with known controller gain matrices and none of the controllers can make the system satisfy guaranteed cost control, based on single-Lyapunov function method we obtained the sufficient conditions and optimization scheme for the hybrid state-feedback guaranteed cost control. When the controller gain matrices are unknown, by means of multiple function technique, a sufficient condition and optimization scheme are also presented for hybrid state-feedback guaranteed cost control. The simulation demonstrates the effectiveness of the method proposed in this paper.

Key words: hybrid state-feedback; guaranteed cost control; switching law

1 引言 (Introduction)

实际工程应用中, 由于多种因素的影响, 单一连续的控制往往不能实现控制目标^[1]. 但该问题有时可通过有限个备选的控制之间的切换而达到目的, 此种切换的方法具有很强的理论价值和实际意义^[1~5]. 文[5]中提出了通过控制器切换实现混杂状态反馈保成本控制的理论及方法. 该文中混杂状态反馈保成本控制的理论是对一般意义下的状态反馈保成本控制概念的一种推广. 但该文没有考虑状态中含有时滞的情形, 主要原因在于对含有状态时滞系统的研究更为复杂. 然而时滞现象在工程实践中几乎是不可避免的. 因而通过控制器切换实现时滞系统的保成本控制问题的研究更有实际意义. 同

时^[5]对混杂状态反馈控制律及成本上界未作优化处理, 这在实际应用中是一不足之处.

本文研究一类不确定线性时滞系统的混杂状态反馈保成本控制及优化设计问题. 假设存在有限个被选的控制, 这些控制的控制增益矩阵是已知的, 并假设任何单一连续的控制均不能实现保成本控制, 利用单 Lyapunov 函数法, 设计混杂状态反馈控制, 实现不确定线性时滞系统保成本控制的目标. 当控制增益未知时, 利用多 Lyapunov 函数法, 给出系统满足保成本控制的充分条件以及控制增益的具体设计方案. 并且相应的混杂状态反馈控制律及成本上界都做了优化处理. 最后, 以仿真验证结果的有效性.

本文中, $C_{n,\tau} = C([- \tau, 0], \mathbb{R}^n)$ 表示从 $[- \tau, 0]$ 映射到 $\mathbb{R}^n$ 具有拓扑一致收敛结构的 Banach 空间. $x_t \in C_{n,\tau}$, $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $-\tau \leq \theta \leq 0$. 并用“*”表示分块矩阵中相应子块的转置. 用“ I ”表示适当维数的单位矩阵.

2 系统描述和问题提出 (System description and problem fomulation)

考虑如下—类具有控制器切换的线性不确定时滞系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (A_h + \Delta A_h)x(t - h) + Bu_{\sigma(t)}, \\ x_0(\theta) = \varphi(\theta), \theta \in [-h, 0]. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 为状态, A, A_h, B 为适当维数的常数矩阵. $\Delta A, \Delta A_h$ 反映系统模型中的不确定性, 并具有下面的结构 $[\Delta A, \Delta A_h] = DF(t)[E_1, E_2]$, 其中 D, E_1, E_2 是具有适当维数的常数矩阵, 而 $F(t)$ 是未知函数矩阵, 且满足 $F(t)^T F(t) \leq I$. 系统初值: $x_0(\theta) = \varphi(\theta) \in C_{n,\tau}$, h 为时滞常数. $\sigma(t): [0, \infty) \rightarrow M = \{1, 2, \dots, m\}$ 是一个依赖于时间 t 或状态 x 的分段常值函数. $u_{\sigma(t)}$ 由指定的控制器集合中 $\{u_1, \dots, u_m\}$ 有限个状态控制器 u_i , ($i \in M$) 之间的切换产生, 并具有形式 $u_{\sigma(t)} = K_{\sigma(t)}x(t)$, 其中 $K_{\sigma(t)} \in \{K_1, \dots, K_m\}$, K_i ($i \in M$) 为常数矩阵.

对系统(1)定义二次型性能指标

$$J = \int_0^{+\infty} [x(t)^T Q x(t) + u_{\sigma(t)}^T R u_{\sigma(t)}] dt, \quad (2)$$

其中 $Q > 0, R > 0$.

下面给出系统(1)混杂状态反馈保成本控制的

$$\begin{pmatrix} Q + H + P(A + B\bar{K}) + (A + B\bar{K})^T P + \varepsilon E_1^T E_1 & PA_h + \varepsilon E_1^T E_2 & PD \\ * & -S + \varepsilon E_2^T E_2 & 0 \\ * & 0 & -\varepsilon I \end{pmatrix} < 0 \quad (4)$$

成立, 则存在一个控制律 $u_{\sigma(t)} = K_{\sigma(t)}x(t)$ 使系统(1)满足混杂状态反馈保成本控制, 且系统的一个性能上界为

$$J^* = \varphi(0)^T P \varphi(0) + \int_{-h}^0 \varphi(\theta)^T S \varphi(\theta) d\theta. \quad (5)$$

证 设任意 $\xi \in \mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}$, 令

$$\Pi_i = \begin{pmatrix} Q + H + P(A + BK_i) + (A + BK_i)^T P + \varepsilon^{-1} P D D^T P + \varepsilon E_1^T E_1 & PA_h + \varepsilon E_1^T E_2 \\ * & -S + \varepsilon E_2^T E_2 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

并令 $\Omega_i = \{\xi \mid \xi^T \Pi_i \xi < 0\}$, 不难证明 $\bigcup_{i=1}^m \Omega_i = \mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}$. 构造集合 $\bar{\Omega}_1 = \Omega_1, \dots, \bar{\Omega}_i = \Omega_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} \bar{\Omega}_j, \dots, \bar{\Omega}_m = \Omega_m - \bigcup_{j=1}^{m-1} \bar{\Omega}_j$, 构造切换律 $\sigma(t) = i$, 当 $\xi \in \bar{\Omega}_i, i \in M$.

设计相应的混杂状态反馈控制律为 $u_{\sigma(t)} =$

概念.

定义 对系统(1), 若存在一个混杂状态反馈控制律 $u_{\sigma(t)}$, 使得对于所有不确定性及任意时滞 h , 闭环系统是渐近稳定的, 并且其性能值满足 $J \leq J^*$, 则 J^* 称为系统(1)的性能上界, $u_{\sigma(t)}$ 称为系统(1)的一个混杂状态反馈保性能控制律. 并称 $u_{\sigma(t)}$ 能使系统(1)满足混杂状态反馈保成本控制.

本文需做如下假设.

假设 1 指定集合 $\{u_1, \dots, u_m\}$ 中任意单一的控制均不能使系统渐近稳定, 也不能使其满足性能上界.

问题提出: 在假设 1 的条件下, 寻找 $u_{\sigma(t)}$ 使系统(1)满足混杂状态反馈保成本控制, 并使 J^* 最小.

3 主要结果 (Main result)

3.1 单 Lyapunov 函数法 (Single-Lyapunov function method)

本节假设控制增益 K_i 已知. 则对于这些已知的控制增益 K_i , $K_i^T P K_i$ 为已知的半正定矩阵, 因而存在矩阵 H , 使

$$H - K_i^T P K_i \geq 0, i \in M. \quad (3)$$

令 $\gamma_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}(A_1, A_2, \dots, A_m)$ 表示由参数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 所确定 $A_1, A_2, \dots, A_m$ 的凸组合构成的矩阵束.

下面给出使系统(1)满足混杂状态反馈保成本控制的一个充分条件.

定理 1 对于不确定系统(1)和性能指标(2), 给定满足(3)的矩阵 H , 若存在正常数 ε , 矩阵 $P > 0, S > 0$ 和矩阵 $\bar{K} = \gamma_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}(K_1, K_2, \dots, K_m)$ 使如下 LMI

$K_{\sigma(t)}x(t), K_{\sigma(t)} \in [K_1, \dots, K_m]$. 然后取候选 Lyapunov 函数 $V(x_t) = x(t)^T P x(t) + \int_{-h}^0 x(t + \theta)^T S x(t + \theta) d\theta$.

类似于[5]中定理 1 的证明, 容易得到本文定理 1 的证明, 限于篇幅, 从略.

式(5)给出的系统的成本上界依赖 LMI(4)的

可行解. 而(4)的不同可行解将导致不同的系统成本上界. 对于刻画系统鲁棒性能上界的一个有意义的指标是寻找最小成本上界. 该问题可以通过以下优化问题得到解决.

定理 2 对系统(1)和性能指标(5), 如果以下优化问题

$$\begin{aligned} \min_{\varepsilon, P, S} & \operatorname{tr}(WS) + \varphi(0)^T P \varphi(0), \\ \text{s. t.} & (4) \end{aligned} \quad (7)$$

有一个可行解 $\hat{\varepsilon}, \hat{P}, \hat{S}$, 则存在使系统(1)的性能指标(5)最小化的最优混杂状态反馈保成本控制律 $u_{\sigma(t)}^* = K_{\sigma(t)} x(t)$, 且最小系统成本上界是

$$J^* = \varphi(0)^T \hat{P} \varphi(0) + \int_{-h}^0 \varphi(\theta)^T \hat{S} \varphi(\theta) d\theta,$$

其中 $\int_{-h}^0 \varphi(\theta) \varphi(\theta)^T d\theta = W$.

$$\left(P_i A + A^T P_i + Q + S + \varepsilon^{-1} P_i D D^T P_i + \varepsilon_i^2 P_i B R B^T P_i - 2\varepsilon_i P_i B B^T P_i \varepsilon E_1^T E_1 + \beta_i (P_i - P_{i+1}) P_i A_h + \varepsilon E_1^T E_2 - S + \varepsilon E_2^T E_2 \right) < 0$$

对 $i = 1, 2$ 都成立, 则存在混杂状态反馈控制律 $u_{\sigma(t)} = \hat{K}_{\sigma(t)} x(t)$ 使系统(8) 满足混杂状态反馈控制, 且一个性能上界是

$$J^* = \max \{ \varphi(0)^T P_i \varphi(0) + \int_{-h}^0 \varphi(\theta)^T S \varphi(\theta) d\theta \}, \quad (9)$$

其中 $\sigma(t) = \arg \max \{ x^T P_i x, i \in M \}, P_3 = p_1$.

证 选取

$$V_{\sigma(t)}(x_t) = x(t)^T P_{\sigma(t)} x(t) + \int_{-h}^0 x(t+\theta)^T S x(t+\theta) d\theta,$$

按文[5]中定理2所提供的方法, 并结合条件多 Lyapunov 含书法及时滞系统的稳定性定理, 可以容易的得到定理3的证明. 限于篇幅, 从略.

注 1 利用不等式 $-2P_i B B^T P_i \leq 2N B B^T N^T - 2N B B^T P_i - 2P_i B B^T N^T$ 可将定理3的判断条件转化为如下含有参数 $\beta_i, \varepsilon_i (i = 1, 2)$, 关于变量 $\varepsilon, P_i (i = 1, 2), S$ 的 LMIs 的形式

$$\begin{pmatrix} \Xi_i & P_i A_h + \varepsilon E_1^T E_2 & \varepsilon_i P_i B & P_i D \\ * & -S + \varepsilon E_2^T E_2 & 0 & 0 \\ * & * & -R^{-1} & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon \end{pmatrix} < 0, i = 1, 2,$$

$$\begin{aligned} \Xi_i &= Q + P_i A + A^T P_i + S + 2\varepsilon_i N B B^T N^T - \\ & 2\varepsilon_i N B B^T P_i - 2\varepsilon_i N B B^T N^T + \\ & E_1^T + \beta_i (P_i - P_{i+1}). \end{aligned} \quad (10)$$

由于 LMIs(10) 是一个含参数的 LMIs, 故利用 (10) 求取系统(8) 关于性能指标(9) 的最优解比较

证 由 $\int_{-h}^0 \varphi^T(\theta) S \varphi(\theta) d\theta = \int_{-h}^0 \operatorname{tr}(\varphi^T(\theta) S \varphi(\theta)) d\theta = \operatorname{tr}(WS)$, 可以保证由式(5) 给出的性能指标的上界的最小化. 由于问题(7) 中的目标函数和约束条件都是变量的凸函数, 因此问题(7) 是一个凸优化问题, 从而可以达到全局的最小值.

证毕.

3.2 多 Lyapunov 函数法 (Multiple-Lyapunov function method)

本部分考虑系统(1) 的一种特殊情况, 其中 $\sigma: [0, \infty) \rightarrow M = \{1, 2\}$, 即只在两个被选的控制器的切换, 并且 $u_{\sigma(t)} = \hat{K}_{\sigma(t)} x(t)$, $\hat{K}_i (i \in M)$ 是待设计的控制增益. 设此系统为系统(8).

定理 3 如果存在非负常数 β_i 及正常数 $\varepsilon_i (i = 1, 2)$, ε 以及对称正定矩阵 $P_i > 0 (i = 1, 2)$, $S > 0$ 使如下矩阵不等式

困难. 但可以给出求取混杂状态反馈控制律及成本上界的次优设计方案.

定理 4 给定非负常数 β_i 及正常数 $\varepsilon_i (i = 1, 2)$, 对系统(8)和性能指标(9), 如果以下2个优化问题

$$\min_{\varepsilon, P, S} \operatorname{tr}(WS) + \varphi(0)^T P_i \varphi(0),$$

s. t. (10),

$$\varphi(0)^T (P_{i+1} - P_i) \varphi(0) < 0, \quad (11)$$

以及当 $P_1 = P_2 = \bar{P}$ 时, 优化问题

$$\min_{\varepsilon, P, S} \operatorname{tr}(WS) + (\varphi(0)^T \bar{P} \varphi(0)),$$

s. t. (10) (12)

至少有一个有可行解, 则存在使系统(8) 的性能指标(9) 最小化的次优混杂状态反馈保成本控制律 $u_{\sigma(t)}^* = \hat{K}_{\sigma(t)} x(t)$, 次优系统成本上界 J^* 为3个优化问题中的最小值. 控制增益 $\hat{K}_i = -\varepsilon_i B^T \bar{P}_i$, $\bar{P}_i$ 是相应于 J^* 的优化问题中的可行解 P_i .

证 限于篇幅, 从略.

注 2 当 $A_h + \Delta A_h = 0$ 时, 即系统不含状态时滞项时, 系统(1)退化为文[5]中的系统, 相应的本文中的定理1, 3变为文[5]中的定理1, 2. 因此本文中的定理1, 3可以看作文[5]中的有关结果的推广. 另外文[5]中未涉及优化处理, 未给出最小成本上界的具体设计方法, 这在实际应用中显然是个缺陷. 显然本文定理2, 4中的优化问题可以方便的利用 Matlab 中的 LMI 工具箱求解器 mincx 来求解.

注 3 对于被选的控制器个数 m 大于2的情况, 利用定理3的方法, 相应的保成本控制的设计问题不难得到, 但

此种情形对于优化问题的设计比较困难. 另外需要指出的是定理3,4中我们仅给出了 β_i 为非负常数的情形,对于同时为非正常数的情形结论可类似的给出.

4 仿真(Simulation)

考虑系统(1),其中

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A_h = \begin{pmatrix} 1 & 0.2 \\ -0.1 & 0.6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$h = 2, D = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}, F(t) = \sin t,$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.11 \\ 0.8 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M = \{1, 2\}, x_0(\theta) = (1 \ 2)^T, \theta \in [-2, 0].$$

正定加权矩阵 $Q = R = I$, I 为单位矩阵.

下面分别用本文提出的两种方法设计切换律.

4.1 单 Lyapunov 函数方法 (Single-Lyapunov function method)

设系统有两个备选的控制器

$$u_1 = K_1 x = \begin{pmatrix} -2.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{pmatrix} x,$$

$$u_2 = K_2 x = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -2.5 \end{pmatrix} x.$$

易见在单独的控制 u_1, u_2 下系统不稳定. 取 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$, 则

$$\bar{K} = 0.5K_1 + 0.5K_2 = \begin{pmatrix} -1 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{pmatrix},$$

首先可用优化方法求解(3), 得

$$H = \begin{pmatrix} 6.5000 & 1.0000 \\ 1.0000 & 6.5000 \end{pmatrix}.$$

可进一步求解优化问题(7)得

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 10.6695 & -5.9895 \\ * & 7.3288 \end{pmatrix},$$

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} 14.0379 & -2.6745 \\ * & 1.6868 \end{pmatrix}, \varepsilon = 2.4927,$$

最优成本上界为

$$J^* = \varphi^T(0) \hat{P} \varphi(0) + \int_{-2}^0 \varphi^T(\theta) \hat{S} \varphi(\theta) d\theta = 36.2045.$$

下面给出混杂状态反馈控制律的具体设计过程.

由定理1证明中切换域的构造, 对任意 $\xi \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$, 设计切换域如下

$$\Omega_1 =$$

$$\{\xi: \xi^T \begin{pmatrix} -91.0812 & 24.7475 & 11.5157 & -1.4050 \\ * & 23.5499 & -6.2737 & 3.2542 \\ * & * & -11.8212 & 2.86116 \\ * & * & * & -1.6566 \end{pmatrix} \xi < 0\},$$

$$\xi < 0\},$$

$$\text{令 } \bar{\Omega}_1 = \Omega_1, \bar{\Omega}_2 = \mathbb{R}^2 - \bar{\Omega}_1.$$

设计切换律

$$\sigma(t) = i, \text{ 当 } (x^T, x(t-h)^T)^T \in \bar{\Omega}_i, i \in \{1, 2\}.$$

则该系统的最优混杂状态反馈控制律为

$$u_{\sigma(t)} = K_{\sigma(t)} x(t), K_{\sigma(t)} \in \{K_1, K_2\}.$$

该系统在此混杂状态反馈控制器下的状态轨线如图1所示, 控制效果是显然的. 且最优成本上界为已求得的 $J^* = 36.2045$.

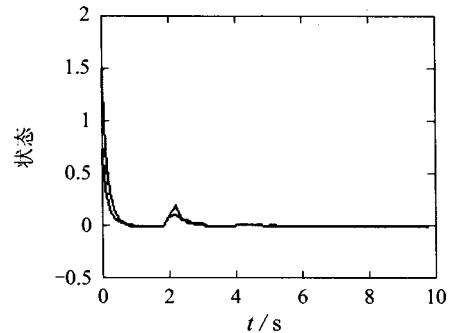


图1 系统在混杂状态反馈控制律 u 下的状态曲线

Fig. 1 State response of the system under hybrid state-feedback guaranteed cost controller u

4.2 多 Lyapunov 函数方法 (Multiple-Lyapunov function method)

设 $\beta_i = \varepsilon_i = 1$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 依据定理3及注

1, 求解 LMIs(10)得

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1.5557 & -0.4611 \\ -0.4611 & 1.5368 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1.4914 & -0.3281 \\ -0.3281 & 1.4079 \end{pmatrix}.$$

则 $K_i = -B^T P_i$. 设计切换律 $\sigma(t) = \arg \max x^T P_i x, i \in M$. 则混杂状态反馈控制律为 $\bar{u} = K_{\sigma(t)} x$. 系统在该混杂状态反馈控制律下的状态响应见图2. 由式(9)可求得一个成本上界是 $J^* = 40$. 进一步, 由定理4, 可以求得一个优化成本上界是 $J^* = 5.4146$.

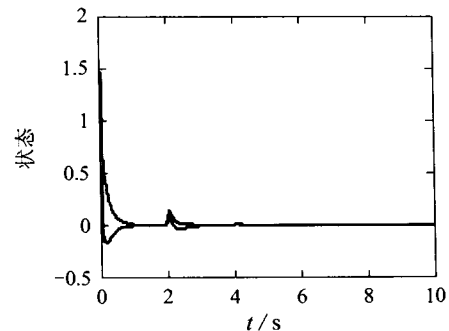


图2 系统在混杂状态反馈控制律 $\bar{u}$ 下的状态曲线

Fig. 2 State response of system under hybrid state-feedback guaranteed cost controller $\bar{u}$

5 结论(Conclusion)

本文分别利用单 Lyapunov 和多 Lyapunov 函数法研究一类不确定线性时滞系统的混杂状态反馈保成本控制及优化设计问题. 当指定的控制器集合中任何单一连续的控制器都不能使系统满足保成本控制, 而系统的控制器可以在该控制器集合中切换时, 利用单 Lyapunov 函数法设计混杂状态反馈保成本控制律, 使系统满足混杂状态反馈保成本控制; 而当控制器增益矩阵未知时, 给出了不确定线性时滞系统满足混杂状态反馈保成本控制的充分条件, 并给出控制器增益矩阵的具体设计方案. 并对两种方法中的控制律及成本上界做了优化处理, 可以方便的利用 Matlab 中的 LMI 工具箱求解器 mincx 来求解.

参考文献(References):

- [1] NIE H, ZHAO J. Hybrid state feedback H_∞ robust control for a class of linear systems with norm-bound uncertainty [C]// *Proc of the American Control Conference*. Denver, Colorado: [s. n.], 2003.
- [2] SUN Z D, GE S S. *Switched Linear Systems-Control and Design* [M]. New York: Springer-Verlag, 2004.
- [3] ZHAO J, SPONG M W. Hybrid control for global stabilization

of the cart-pendulum system [J]. *Automatica*, 2001, 37(12): 1941-1951.

- [4] ZHAI G S, et al. Improving closed-loop stability of second-order LTI systems by hybrid static output feedback [C]// *Proc of the IEEE Conf on Decision and Control*. Las Vegas, Nevada USA: [s. n.], 2002: 2792-2797.
- [5] 孙希明, 赵军. 一类不确定线性系统的混杂状态反馈保成本控制 [J]. *控制与决策*, 2005, 20(4): 421-425.
(SUN Ximing, ZHAO Jun. Hybrid state-feedback guaranteed cost control for a class of uncertain linear systems [J]. *Control and Decision*, 2005, 20(4): 421-425.)

作者简介:

孙希明 (1973—), 男, 东北大学信息学院博士研究生, 主要从事时滞系统, 切换系统方面的研究, E-mail: wrsxm@126.com;

刘建昌 (1960—), 男, 东北大学信息科学与工程学院教授, 博士生导师, 研究领域为智能控制理论与应用, 复杂过程控制技术;

赵军 (1957—), 男, 东北大学信息科学与工程学院教授, 博士生导师, 1991 年于东北大学信息科学与工程学院获博士学位, 1998-1999 年作为高级访问学者赴美国 Illinois (Urbana-Champaign) 研修, 从 2003 年 10 日至今, 作为高级访问学者在香港城市大学研修. 现为中国自动化学会控制理论委员会委员, 《控制理论与应用》编委, 主要研究方向为复杂非线性系统结构, 切换系统等.