

采样系统的 H_∞ 混合灵敏度设计

王广雄, 刘彦文, 何 朕

(哈尔滨工业大学 控制科学与工程系, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要: 由于流行的提升法实际上并不适用于采样控制系统的 H_∞ 最优设计, 本文提出一种基于频率响应概念的新的离散化 H_∞ 设计方法. 文中结合 S/T 混合灵敏度问题, 分析说明了这种离散化方法, 并从鲁棒稳定性和性能两方面对设计结果进行了定量的验证. 文中还与提升法的 H_∞ 设计进行了对比, 指出由于提升变换需要进行回路转移, 改变了标准 H_∞ 问题中的结构关系, 因而设计结果并不理想.

关键词: 采样系统; 混合灵敏度; H_∞ 优化设计; 提升技术; 离散化

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

H-infinity mixed sensitivity design for sampled-data systems

WANG Guang-xiong, LIU Yan-wen, HE Zhen

(Department of Control Science and Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin Heilongjiang 150001, China)

Abstract: Because the popular lifting technique is not suitable for H-infinity optimal design of sampled-data control systems, a novel discretization H-infinity design method based on the frequency response concept is proposed in this paper. Firstly, this discretization method is presented in the context of a typical S/T mixed sensitivity problem. Both the robust stability and performance of the design of the proposed method are verified quantitatively. A comparative design by lifting is also given for the S/T problem. Finally, it is pointed out that the structure of the standard H-infinity problem is changed by loop-shifting during the lifting transformation, and the resulting performance of the lifting design is not desirable.

Key words: sampled-data system; mixed sensitivity; H-infinity optimal design; lifting technique; discretization

1 引言(Introduction)

自从提升技术提出以来^[1], 现在已经成为采样控制系统设计和分析的唯一手段. 提升技术本是由于 H_∞ 设计的需要而提出的, 但提升法计算复杂, 且缺乏物理概念, 而且事实上并不适合用于 H_∞ 设计. 本文根据采样控制系统 H_∞ 标准问题闭环映射的结构特点, 提出一种离散化的 H_∞ 设计方法, 方法简单直观, 而且物理概念清晰.

2 基本方法(Basic method)

现代的采样控制系统设计需要处理如图 1 所示的系统, 而不是经典理论时期的单回路系统. 图 1 所示系统中广义对象中的 $G_{11}(s)$ 是直通通道, 其输入输出都是连续信号, 因此提出了在采样系统中要考虑采样时刻之间的信号问题. 提升技术就是在这个背景下产生的^[1], 但是提升技术并不能用来处理采样系统的 H_∞ 控制问题(见第 4 节). 文献[2]提出

的频率响应法可以给出图 1 系统的连续信号 w 和 z 之间的频率响应. 这里将该方法进一步发展并应用于 H_∞ 设计.

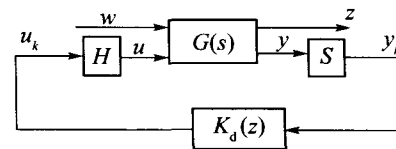


图 1 采样控制系统

Fig. 1 Sampled-data control system

文献[2]频率响应法的实质是将图 1 的信号通道分别按连续通道和离散通道来考虑, 而离散通道的特性完全可以用经典的采样系统离散化的理论来处理. 图 1 中 G 为广义对象

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

H 为保持器, S 为采样开关, K_d 为离散控制器.

频率响应的计算中设输入信号是一正弦信号, $w(t) = \exp(j\omega_0 t)^{[2,3]}$, 其频谱为 $W(j\omega) = 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$. 设输入信号的频率 $\omega_0 < \pi/T_s$ (T_s 为采样周期), 那么从输入 w 到输出 z 的频率响应为^[2]

$$T_{zw} = G_{11} + G_{12}K_d(I - G_{22d}K_d)^{-1}G_{21d}, \quad (2)$$

式中 G_{11}, G_{12} 均为连续系统的频率特性, 而标有 d 的则为离散的频率特性, 例如 $G_{22d}(e^{j\omega T_s})$.

这种频率响应法虽能精确求得采样控制系统的 L_2 诱导范数, 但无法直接用于 H_∞ 设计. 这是因为式(2)中既有连续系统的传递函数 $G_{ii}(s)$, 又有离散的传递函数 $G_{2id}(z)$, 需要将二者统一在同一个框架下才能进行 H_∞ 设计.

现结合 H_∞ 设计中最常用的 S/T 混合灵敏度问题来进行说明. S/T 问题是指求解下列的优化问题

$$\min_{K_{stab}} \left\| \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_2 T \end{bmatrix} \right\|_\infty \leq 1. \quad (3)$$

式(3)中 $S(j\omega)$ 和 $T(j\omega)$ 分别为系统的灵敏度和补灵敏度, W_1 和 W_2 为相应的权函数(见图2).

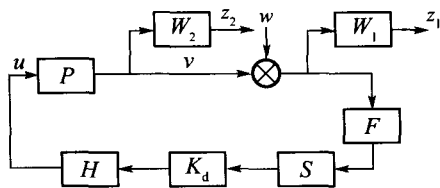


图2 采样控制系统的混合灵敏度问题

Fig. 2 Mixed sensitivity problem of sampled-data systems

式(3)中的 $W_2 T$ 代表了系统设计中的鲁棒稳定性约束, 图3(a)所示为此问题的示意图. 设不确定性 Δ 为范数有界不确定性, $\|\Delta\|_\infty < 1$, 那么鲁棒稳定性的充要条件是

$$\|W_2 T\|_\infty \leq 1. \quad (4)$$

对采样系统来说, 图2和图3(a)中的信号 w 和 z_2 均为连续信号. 文献[4]论证了这个连续的不确定性可以用离散的不确定性 Δ_d 来代替(见图3(b)),

$$\Delta_d = \{\Delta_k\}_{k=0}^\infty, \quad \bar{\sigma}(\Delta_k) < 1. \quad (5)$$

这就是说, 在本文的 H_∞ 混合灵敏度问题中 $w \rightarrow z_2$ 的通道可以按离散信号来处理.

式(3)中的 $W_1 S$ 代表了设计中的性能要求. 虽然信号 z_1 是连续的, 但系统的性能(performance)主要是由低频段特性决定的, 而且在加权的 H_∞ 范数设计中, 这个 $\|W_1 S\|_\infty$ 值一般均是 $\omega = 0$ 时的奇异值. 当 $\omega = 0$ 时, 考虑采样时刻之间的连续信号和只考虑采样时刻上的离散值已无区别, 所以确定低频段性能要求的 $w \rightarrow z_1$ 通道也可以按离散化方法来处理.

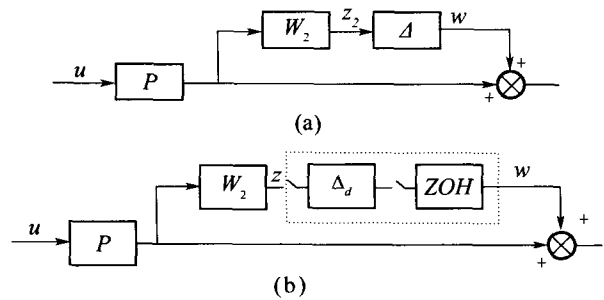


图3 对象的乘性不确定性(a)和离散化(b)

Fig. 3 Multiplicative uncertainty of the plant (a) and its discretization (b)

由此可见, 采样系统的 H_∞ 混合灵敏度问题完全可转换成离散问题来处理, 此时的广义对象已完全是离散的(试与式(1)作比较)

$$G = \begin{bmatrix} G_{11d} & G_{12d} \\ G_{21d} & G_{22d} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

这样, 采样系统的 H_∞ 设计就可以采用常规的离散系统的方法了. 这种设计思路简单, 明了. 采用这种设计方法时唯一要注意的是广义对象中的 G_{ijd} 都应该符合采样系统离散化的概念, 即每一个通道都应该合在一起离散化, 例如图2中从 u 到 z_2 的离散化传递函数应该是 $(W_2 P)_d$, 不能分别离散化后再相乘.

3 H_∞ 混合灵敏度设计 (H-infinity mixed sensitivity design)

现将上述的 H_∞ 设计思想用于图2所示的采样系统. 设

$$P(s) = \frac{10 - s}{(0.4s + 1)(s + 10)}. \quad (7)$$

为了便于对本方法进行验证, 设对象的更准确的模型包含时间延时, 其传递函数为

$$P_d(s) = \frac{10 - s}{(0.4s + 1)(s + 10)} e^{-s}. \quad (8)$$

这里按式(7)的 P (名义特性) 来进行设计, 而将这个延迟特性 (e^{-s}) 视作对象的未建模动态, 即不确定性. 当按乘性不确定性来处理时, 可得相应的权函数为^[5]

$$W_2(s) = \frac{3(s + 0.0029)}{s + 2.9}. \quad (9)$$

至于性能权函数 W_1 则取为

$$W_1(s) = \frac{\rho}{100s + 1}, \quad (10)$$

式中 ρ 是待定的, 要在 H_∞ 优化设计中来确定其最大值(即达到最佳性能).

设采样周期 $T_s = 0.1$ s, 并设抗混叠滤波器

$F(s) = 10\pi/(s + 10\pi)$. 按式(6) 将广义对象离散化, 并利用 MATLAB 的 `dhinflmi` 对此 H_∞ 混合灵敏度进行优化设计. 当性能权函数 W_1 中的 ρ 值最大取到 $\rho = 100$ 时, 得到 H_∞ 范数[式(3)] 的最小值为 1.0084. 相应的 H_∞ 控制器为

$$K_{d1}(z) = \frac{-2.0701(z - 0.7783)(z - 0.7489)(z - 0.3679)(z - 0.04321)}{(z - 0.999)(z - 0.575)(z^2 + 0.5487z + 0.08467)} \quad (11)$$

由于 LMI 算法有自动降阶功能^[6], 所以这个用 `dhinflmi` 算得的控制器 K_{d1} 的阶次为 4. 图 4 所示为设计所得的式(3) 的两个分量: W_1S 和 W_2T .

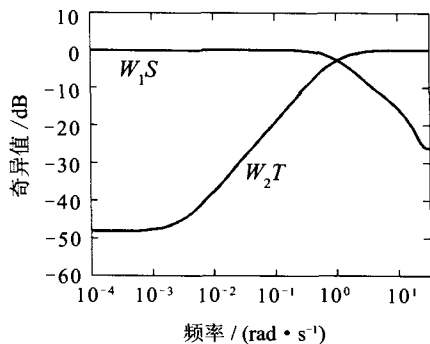


图 4 加权的灵敏度(S)和补灵敏度(T)特性

Fig. 4 Weighted sensitivities S and T

下面从两方面来对本方法的设计结果进行验证, 即鲁棒稳定性和灵敏度特性.

鲁棒稳定性是由 W_2T 项决定的[式(4)]. 设计中是将对象的时间延迟 e^{-s} 作为不确定性来定出权函数 W_2 的. 现将设计所得的 H_∞ 控制器 K_d [式(14)] 与对象闭合进行仿真, 并将这个时间延迟环节也加上[式(8)](仿真曲线略). 本设计虽具有鲁棒性, 但是 H_∞ 两块问题的设计[式(3)] 还是具有保守性的. 这从图 4 的 Bode 图上也可看出, 在系统的带宽上($\omega = 1 \text{ (rad} \cdot \text{s}^{-1})$) $|W_1S|$ 和 $|W_2T|$ 都没有达到 1, 小 $\sqrt{2}$ 倍. 也就是说, 并未达到式(4) 的上限.

如果将摄动的幅值再增加 $\sqrt{2}$ 倍, 这相当于将延迟时间从 1 s 加大到 1.414 s, 这时的响应曲线见图 5, 已接近稳定的边缘了, 与式(4) 的小增益条件是相吻合的. 这说明本设计的结果, 就鲁棒稳定性来说, 是可以进行定量验证的. 图中虚线是名义系统的响应.

现在来验证灵敏度特性 $S(j\omega)$. 图 4 表明 $\|W_1S\|_\infty$. 对应于 $\omega = 0$, $\|W_1S\|_\infty = 0.9671$. 所以低频段的灵敏度特性应为

$|S(j\omega)| = |0.9671/W_1(j\omega)| = 0.9671/\rho = 0.009671$, 式中的 ρ 是在 H_∞ 优化设计中所取的最大值 100. 用

所求得的 H_∞ 控制器 $K_{d1}(z)$ [式(11)] 与对象闭合, 也可以用 $\omega = 0$ 时的静态值来进行校验:

$$S(j0) = \frac{1}{1 + K_d(z)} \Big|_{z=1} = \frac{1}{1 + 102.3993} = 0.009671.$$

这说明用本文的离散化方法进行 H_∞ 设计时, 设计过程中参数的取值($\rho = 100$) 与设计结果是符合的, 与 H_∞ synthesis 的概念是一致的, 是可以从多方面来进行验证的. 这一点与用提升法进行 H_∞ 设计是完全不同的^[7].

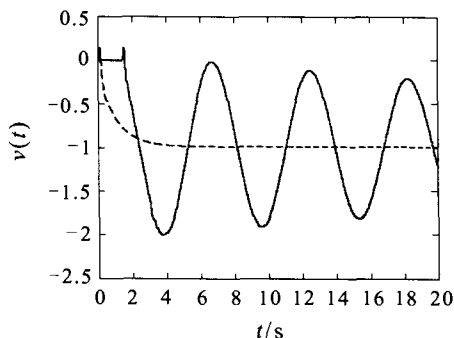


图 5 摄动增大 $\sqrt{2}$ s 后输出 $v(t)$ 的阶跃响应

Fig. 5 Step response of $v(t)$ of the perturbed system with the delay of $\sqrt{2}$ s

4 提升法的混合灵敏度设计 (Lifting design for the mixed sensitivity problem)

由于提升法在近 10 年中已主宰了整个采样控制理论, 所以在提出新的设计方法时免不了要与提升法进行对比.

提升计算已有标准的算法^[1, 8] 和程序^[9], 现结合同一个算例来进行设计. 这个混合灵敏度问题提升设计的结果是 H_∞ 范数值 $\gamma = 1.0321$. 式(12) (13) 是对应的提升对象和所得到的离散控制器.

$$G_d = \begin{bmatrix} A_d & B_{1d} & B_{2d} \\ C_{1d} & 0 & D_{12d} \\ C_{2d} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$A_d = \begin{bmatrix} 0.3679 & -0.0000 & 0 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0.1370 & 0.7788 & 0 & -0.0000 & 0.0000 \\ 0.1076 & 0.7992 & 0.0432 & 0.0004 & 0.0000 \\ 0.0001 & 0.0014 & 0 & 0.9990 & 0.0000 \\ -0.0660 & -0.6635 & 0 & 0.0000 & 0.7438 \end{bmatrix},$$

$$B_{1d} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.0000 & -0.0000 \\ 3.9596 & -0.0000 \\ 0.0039 & 0.0033 \\ -0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}, \quad B_{2d} = \begin{bmatrix} 3.9979 \\ -0.1668 \\ -0.1824 \\ -0.0003 \\ 0.1296 \end{bmatrix},$$

$C_{1d} =$

$$\begin{bmatrix} -0.0666 & -0.7343 & 0.0000 & -0.0001 & -0.2749 \\ -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & 0.3161 & -0.0001 \\ 0.0415 & -0.0115 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0180 \\ 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ -0.0016 & 0.0010 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0034 \end{bmatrix},$$

$$C_{2d} = [0 \ 0 \ 0.3162 \ 0 \ 0],$$

$$D_{12d} = [0.1357 \ 0.0000 \ -0.0552 \ 0.0000 \ -0.0255]^T,$$

$$K_{d2}(z) =$$

$$\frac{-0.0038543(z-0.3681)(z-0.007129)(z^2-1.673z+0.7383)}{(z-0.9961)(z-0.9662)(z-0.2389)(z+0.1135)(z-0.0007254)} \quad (13)$$

这里要指出的是,性能权函数 W_1 [式(10)] 中的 ρ 在这个提升设计中最大只能取到 $\rho_{\max} = 1.6$. 这个 ρ 的值与上一节离散化 H_∞ 设计的结果 100 相差甚远,表明这种提升法 H_∞ 设计所得到的性能是非常差的. 事实上,从式(13)也可看到,设计所得 H_∞ 控制器的静态增益 $K_{d2} = 1.4031$,是非常低的.

这与 H_∞ 标准问题的结构特点和基本的提升运算有关. H_∞ 标准问题对连续系统来说,是一种线性分式变换的结构:

$$F_l(G, K) = G_{11} + G_{12}K(I - G_{22}K)^{-1}G_{21}. \quad (14)$$

采样控制系统虽不是定常线性系统,但也有类似的映射关系 $F(G, K)^{[1]}$.

图6所示为提升后的广义对象,图中 $\hat{w}$ 和 $\hat{z}$ 为提升后的信号, y_k 和 u_k 为离散控制器的输入输出的离散信号. 设图6对象 $\hat{G}$ 中的(1,1)块为 $\hat{G}_{11}$. 提升变换中的一个重要的一步是去掉算子 $\hat{G}_{11}$ 中的直通项 $\hat{D}_{11}$. 这是利用 Safonov 的回路转移 (Loop-shifting)^[10] 的概念,加进一个算子 Θ 来实现的^[1].

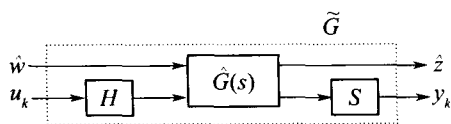


图6 提升后的对象

Fig. 6 Lifted plant

回路转移虽能保持范数不变,但显然广义对象中的(1,1)项的内容和意义完全变了,已不再是原问题[式(14)]中的加权设计了.

结合本例来说,对象提升后[式(12)]输入已是二维, $w^T = [w_1 \ w_2]$. B_{1d} 阵中的第二列与 w_2 相对应. 这第二列中各个系数均为零,只有一个 0.0033(5 位有效数字为 0.00326). 也就是说第二个输入只作用于 A_d 阵中的第 4 个状态变量 $(x_4)_k$, 并经

C_{1d} [式(12)] 输出,对应的传递函数和静态增益

$$\frac{0.00326 \times 0.3161}{z - 0.9990} \Big|_{z=1} = 1.0305. \quad (15)$$

事实上,上面提升 H_∞ 设计所得的 γ 值为 1.0321 就是受制于这个通道.

这个状态变量 x_4 就是权函数 W_1 (见图 2) 的状态变量. 这个通道的增益直接和 W_1 的系数 ρ 有关 [式(10)] (具体数值与提升运算有关). 由于 H_∞ 优化设计的 γ 的名义值是 1 [式(3)], 而这个 γ 值又受到回路转移后多出来的一个独立通道 [式(15)] 的制约. 所以在提升的 H_∞ 优化设计中这个 ρ 值只能与 $\gamma = 1$ 是同一个数量级的, 本例中 $\rho_{\max} = 1.6$, 不可能像上面离散 H_∞ 设计中取较大的值. 这就是提升法的症结所在.

5 结论 (Conclusion)

H_∞ 标准问题是一种闭环映射, 其信号通道是由两部分构成的, 其中连续信号通道 (G_{11}) 与所设计的控制器无关. 提升变换会使输入输出维数增加, 而提升运算中用回路转移来消除 G_{11} 的直通项 $\hat{D}_{11}$ 的实质就是用增加的输入通道来代替直通项, 其结果是给 H_∞ 设计附加了一个与控制器无关的范数约束, 无法做到真正意义上的 H_∞ 优化设计.

本文提出的采样控制系统的离散化 H_∞ 设计, 则与标准的 H_∞ 优化设计的概念和做法完全一致, 且方法简单, 物理概念清楚, 可以用多种方法来进行解释和验证.

参考文献 (References):

- [1] BAMIEH B A, PEARSON J B J. A general framework for linear periodic systems with applications to H_∞ sampled-data control [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1992, 37(4): 418-435.
- [2] 刘彦文, 王广雄, 何朕. 采样系统的频率响应和 L_2 诱导范数 [J]. 控制与决策, 2005, 20(10): 1133-1136.
(LIU Yanwen, WANG Guangxiong, HE Zhen. Frequency response and the L_2 induced norm of sampled-data systems [J]. *Control and Decision*, 2005, 20(10): 1133-1136.)
- [3] YAMAMOTO Y, KHARGONEKAR P P. Frequency response of sampled-data systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1996, 41(2): 166-175.
- [4] WANG G X, LIU Y W, HE Z, et al. A new approach to robust stability analysis of sampled-data control systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2005, 31(4): 510-515.
- [5] 王广雄. 控制系统设计 [M]. 北京: 宇航出版社, 1992: 119-124.
(WANG Guangxiong. *Control System Design* [M]. Beijing: Yu Hang Press, 1992: 119-124.)
- [6] GAHINET P. Explicit controller formulas for LMI-based H_∞ synthesis [J]. *Automatica*, 1996, 32(7): 1007-1014.

(下转第 361 页)

1993.
(LU Qiang, SUN Yuanzhang. *Nonlinear Control of Power Systems* [M]. Beijing: Science Press, 1993.)
- [9] KRSTIC M, KANELAKOPOULOS I, KOKOTOVIC P. *Nonlinear and Adaptive Control Design* [M]. New York: John Wiley & Sons, INC, 1995.
- [10] HU W, MEI S, et al. Nonlinear adaptive decentralized stabilizing control of multi-machine systems [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2002, 133(2-3): 519-532.
- [11] WENLEI LI, YUANWEI JING, GEORGI M, et al. Robust nonlinear control of TCSC for power system via adaptive backstepping design [C]// *IEEE Conference on Control Applications 03 Conference*. Turkey: IEEE Press, 2003.
- [12] KARAGIANNIS D, ASTOLFI A. Nonlinear adaptive control of systems in feedback form: An alternative to adaptive Backstepping [C]// *IFAC Symposium on Large Scale Systems: Theory and Applications*. Osaka, Japan: [s. n.], 2004.
- [13] ASTOLFI A, ORTEGA R. Immersion and invariance: a new tool for stabilization and adaptive control of nonlinear systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2003, 48(4): 590-606.
- [14] KHALIL H. *Nonlinear Systems (3rd edition)* [M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 2002.

作者简介:

付俊 (1979—), 男, 东北大学信息科学与工程学院博士研究生, 研究方向为电力系统鲁棒非线性控制、电力系统混杂全局控制, E-mail: fuziling@126.com;

赵军 (1957—), 男, 东北大学信息科学与工程学院教授, 博士生导师, 1991 年于东北大学信息科学与工程学院获博士学位, 1998—1999 年作为高级访问学者赴美国 Illinois (Urbana-Champaign) 研修, 从 2003 年 10 月至 2005 年 5 月作为高级访问学者在香港城市大学研修. 现为中国自动化学会控制理论委员会委员, 《控制理论与应用》编委, 研究方向: 复杂非线性系统的结构研究, 混杂系统、切换系统稳定性研究.

(上接第 350 页)

- [4] 席裕庚, 张纯刚. 一类动态不确定环境下机器人的滚动路径规划[J]. *自动化学报*, 2002, 28(2): 161-175.
(XI Yugeng, ZHANG Chungang. Rolling path planning of mobile robot in a kind of dynamic uncertain environment[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2002, 28(2): 161-175.)
- [5] CHENG P, SHEN Z, LAVALLE S M. RRT-based trajectory design for autonomous automobiles and spacecraft[J]. *Archives of Control Sciences*, 2001, 11(3-4): 167-194.
- [6] LAVALLE S M, KUFFNER J J. Rapidly-exploring random tree: Progress and prospects. [C]//DONALD B R, LYNCH K M, RUS D, editors, *Algorithmic and Computational Robotics: New Directions*, Wellesley, MA: A K Peters, Ltd, 2001: 293-308.

作者简介:

樊晓平 (1961—), 博士, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为机器人控制, 虚拟现实技术, 智能交通系统等, 已发表有关论文 100 余篇, E-mail: xpfan@mail.csu.edu.cn;

李双艳 (1979—), 女, 硕士, 主要研究方向为机器人路径规划, 智能控制等;

瞿志华 (1963—), 博士, 教授, 博士生导师, 长江学者讲座教授, 美国中佛罗里达大学 (University of Central Florida) 教授, IEEE 高级会员, 主要研究方法为机器人控制, 非线性系统理论, 鲁棒控制等, 已发表有关论文 300 余篇.

(上接第 354 页)

- [7] WANG G X, LIU Y W, HE Z, et al. The lifting technique for sampled-data systems: useful or useless [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2005, 31(3): 491-494.
- [8] CHEN T W, FRANCIS B A. H_∞ -optimal sampled-data control: computation and design [J]. *Automatica*, 1996, 32(2): 223-228.
- [9] 王广雄, 刘彦文, 何朕, 等. H_∞ 离散化的 MATLAB 程序 [J]. *电机与控制学报*, 2004, 8(4): 316-318.
(WANG Guangxiong, LIU Yanwen, HE Zhen, et al. H_∞ discretization using MATLAB [J]. *Electric Machines and Control*, 2004, 8(4): 316-318.)
- [10] SAFONOV M G, LIMEBEER D J N, CHIANG R Y. Simplify-

ing the H_∞ theory via loop-shifting, matrix-pencil, and descriptor concepts [J]. *Int J of Control*, 1989, 50(6): 2467-2488.

作者简介:

王广雄 (1933—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为 H_∞ 控制理论及应用, 控制系统的鲁棒设计, E-mail: gxwang@hope.hit.edu.cn;

刘彦文 (1976—), 女, 博士研究生, 目前研究方向为采样系统和鲁棒控制系统设计;

何朕 (1972—), 女, 副教授, 硕士生导师, 研究方向为 H_∞ 控制、广义系统.