

基于一种新模型的多目标遗传算法及性能分析

刘淳安^{1,2}, 王宇平³

(1. 西安电子科技大学 理学院, 陕西 西安 710071; 2. 宝鸡文理学院 数学系, 陕西 宝鸡 721007;

3. 西安电子科技大学计算机学院, 陕西 西安 710071)

摘要: 在多目标优化中, 各目标通常相互冲突, 其最优解往往有无穷多个, 如何在最优解集中求出一组分布均匀且数量多的 Pareto 最优解供决策者选择十分重要. 本文给出了多目标优化的一种新解法. 首先定义了种群序值的理想方差和种群密度的方差, 然后把目标个数任意的多目标函数优化问题 I 转化成了用种群序值的理想方差和种群密度的方差构成的两个目标函数的优化问题 II, 并对转化后的优化问题 II 提出了一种新的多目标遗传算法 (RDMOEA). 计算机仿真表明 RDMOEA 算法对不同的实验函数均可求出在最优解集中分布均匀且数量充足的 Pareto 最优解.

关键词: 多目标优化; 遗传算法; Pareto 最优解; U -度量

中图分类号: O224, TP18

文献标识码: A

Multi-objective genetic algorithm based on a new model and analysis of its performance

LIU Chun-an^{1,2}, WANG Yu-ping³

(1. Faculty of Science, Xidian University, Xi'an Shaanxi 710071, China;

2. Department of Mathematics, Baoji College of Arts and Science, Baoji Shaanxi 721007, China;

3. School of Computer, Xidian University, Xi'an Shaanxi 710071, China)

Abstract: Multi-objective optimization problems often involve incommensurable and competing objectives, and the number of their Pareto optimal solutions is usually infinite, thus it is very important to find a sufficient number of uniformly distributed Pareto optimal solutions for the decision maker. A novel algorithm is presented to solve the multi-objective optimization problem in this paper. The ideal variance of rank of the population and the variance of density of the population are firstly given. Using the ideal variance of rank of the population and the variance of density of the population as two objective functions, the multi-objective optimization problem I is then converted into a bi-objective optimization problem II. For the transformed problem II, a novel multi-objective optimization genetic algorithm (RDMOEA) is also proposed. Finally, computer simulations for the three difficult standard benchmark functions are performed to verify the results.

Key words: multi-objective optimization; genetic algorithm; Pareto optimal solution; U -measure

1 引言 (Introduction)

在现实世界中, 许多控制和决策问题需同时考虑多个目标优化, 但对多目标优化问题的求解至今还是一个难点, 通常很难求出其最优解, 只能求出非劣解 (非劣解集)^[1,2]. 近些年来, 进化计算界相继提出了不同的多目标遗传算法^[1~4]. 在文献[2]中作者基于 NSGA-II 的思想对多目标优化问题的目标空间进行了分割并引入了格子的序和格子的密度, 同时讨论了一种基于序和密度的多目标优化算法,

此算法对解在整个目标空间中的质量和均匀性分布能起一定作用, 但对 Pareto 界面上解的质量和均匀性分布不一定有效. 为此, 本文首先引入了种群序值的理想方差和种群密度的方差, 其中, 种群序值的理想方差是对 Pareto 界面上解的质量的度量, 种群密度的方差是对 Pareto 界面上解的分布均匀性的度量. 然后把对任意多个目标函数的优化问题 I 转化成对两个目标函数的优化问题 II, 建立了一种新的多目标优化模型, 对建立的多目标优化模型设计了

一种新的多目标遗传算法,实验表明,本文提出的算法对多目标函数的最优解具有良好的搜索能力,获得的多个 Pareto 有效解为决策者提供了进一步优选的依据。

2 基本概念(Basic concepts)

考虑多目标优化问题 I :

$$\min f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)),$$

$$x \in D \subset [L, U], \quad (1)$$

其中: $[L, U] \supset D$ 为 $\mathbb{R}^n$ 空间上的 n 维矩阵域(超立方体), $[L, U] = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) | l_i \leq x_i \leq u_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ 为搜索空间。

定义 1 设在第 t 代生成的种群由个体 $x'_1, x'_2, \dots, x'_N$ 构成, $r_i(t)$ 是该种群中非劣于个体 x'_i 的所有个体的个数,则定义 $1 + r_i(t)$ 为个体 x'_i 的序,通常记作 $r'_i = 1 + r_i(t)$. 易知,当 $x'_i \rightarrow 1$ 时,个体 x'_i 对应于目标空间中的解趋近第 t 代所获问题的 Pareto 界面,故当第 t 代种群中所有个体的序值趋于 1 时,这些个体通过目标函数映射到目标空间中的解的质量越好(其求得的全部解趋于问题的 Pareto 界面),因此,1 可以看成是序值的理想均值. 令 $r_t = (\sum_{i=1}^N (1 - r'_i)^2)/N$, 称 r_t 为第 t 代种群序值的理想方差,当 r_t 越小,所求解的质量越好,于是种群序值的理想方差可以作为解的质量的度量。

定义 2 设到第 t 代生成的种群由个体 $x'_1, x'_2, \dots, x'_N$ 构成,其对应的目标空间中解向量分别为 $U'_1, U'_2, \dots, U'_N$, 记 $D'_i = \min\{\text{dist}(U'_i, U'_j) | j \neq i, j = 1 \sim N\}$, $\text{dist}(U'_i, U'_j)$ 为 U'_i 与 U'_j 间的欧氏距离, $\bar{D}_t = (\sum_{i=1}^N D'_i)/N$, 则对于目标空间中解向量 $U'_i (i = 1, 2, \dots, N)$, 称 $|M'_i|$ 为其对应问题决策空间中的个体 x'_i 的密度,不妨记作 ρ'_i , 这里 $M'_i = \{j | \|U'_j - U'_i\|_p \leq \bar{D}_t, j = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, N\}$. 令 $\rho_t = (\sum_{i=1}^N (\bar{\rho}_t - \rho'_i)^2)/N$, $\bar{\rho}_t = (\sum_{i=1}^N \rho'_i)/N$, 称 ρ_t 为第 t 代目标空间中解向量对应的种群密度的方差,当 ρ_t 越小,所得解的均匀性越好,于是种群密度的方差可以作为解的均匀性的度量。

3 多目标优化模型 II (Model II of multi-objective optimization)

从以上定义的两度测量可以看出,如果将两度测量看成是两个要优化的目标函数,则优化问题 I 可转化为如下两个目标的优化问题 II

$$\min \{r_t, \rho_t\}. \quad (2)$$

设问题(2)的有效解集为 $E(f, x)$, 弱有效解集为 $E_w(f, x)$, 则式(1)与式(2)的解有如下关系成立:

定理 1 E^* 是问题(1)的 Pareto 最优解集的充要条件是 $E^* \subset D \cap E_w(f, x)$, 且对于 E^* , $r_t \rightarrow 0$.

证 充分性:显然成立。

必要性:因 E^* 是问题(1)的 Pareto 最优解集,所以 $E^* \subset D$ 且 E^* 中每个解的序值应达到最小 1, 故种群 E^* 的序值方差 r_t 达到最小,即 $r_t \rightarrow 0$. 因此 E^* 中每个解也是问题(2)的解,即 $E^* \subset E_w(f, x)$. 必要性成立。

4 新的多目标遗传算法 (New genetic algorithm for multi-objective optimization)

算法 1 (RDMOEA)

步骤 1 给定杂交概率 p_c , 变异概率 p_m 及种群规模 N , 在问题的可行域 D 上随机产生初始种群 $p(1)$, 同时把 $p(1)$ 中的序值为 1 的个体存入一个临时解集 $q(1)$, 令 $t = 1$.

步骤 2 由杂交概率 p_c 随机从第 t 代种群 $p(t)$ 中选杂交的父代对 (x'_i, x'_j) 执行算术杂交产生其后代, 没有参与杂交的父代看成自己的后代, 所有后代的集合记为 $p'(t)$.

步骤 3 对步骤 2 产生的每个后代 τ , 对其第 i 分量 τ_i 变异如下: 将搜索空间 $[L, U]$ 的第 i 维子空间 $[l_i, u_i]$ 分成若干个子区间 $[w_1^i, w_2^i], [w_2^i, w_3^i], \dots, [w_{n_i-1}^i, w_{n_i}^i]$, 使得 $|w_j^i, w_{j-1}^i| < \varepsilon, j = 2, 3, \dots, n$, 其中 $w_1^i = l_i, w_{n_i}^i = u_i$, 随机产生一数 $\delta_i \in [0, 1]$, 若 $p_m > \delta_i$, 随机在 $[w_1^i, w_2^i, \dots, w_{n_i}^i]$ 中选一数 $w_{j_i}^i$ 代替 τ_i , 否则, τ_i 保持不变, 这样, 经变异后 τ 变为 $\bar{\tau}, p'(t)$ 变为 $\bar{p}'(t)$.

步骤 4 对 $\bar{p}'(t)$ 中的个体按其密度值分成两类: $f_1 = \{x'_i | |M'_i| = 0, i = 1 \sim N\}$, $f_2 = \{x'_i | |M'_i| > 0, j = 1 \sim N\}$, 对 f_2 中的每个个体 x'_i , 以概率 p_c 在 f_1 中随机产生个体 x'_i 与 x'_j 配对, 采用启发式杂交, 把产生的后代(共 $|f_2|$ 个)作为过渡子种群 $o(t)$, 对 $o(t)$ 中的每个后代以概率 p_c 按步 3 的方式进行变异, 用变异后的个体代替其父代, 这样 $o(t)$ 变为 $\bar{o}(t)$, 同时把 f_1 中的个体直接复制到 $\bar{o}(t)$ 中生成新的种群 $\bar{o}'(t)$.

步骤 5 用 $\bar{p}'(t) \cup \bar{o}'(t) \cup q(t)$ 中的序值为 1 且可行的个体替换 $q(t)$ 中个体生成新的临时解集 $q(t+1)$.

步骤 6 对 $\bar{p}'(t) \cup \bar{o}'(t) \cup q(t)$ 中的每个个体 x'_i 按其适应度 $F'_i = 1/(1 + r'_i)$ 大小排序, 用比例选择法选出 N 个个体组成下一代种群 $p(t+1)$. 令 $t = t + 1$.

步骤 7 若满终止条件, 停, 否则, 转步骤 2.

5 性能分析(Analysis of performance)

5.1 测试函数(Test functions)

本文3个测试函数选自文献[3],它们都是一些难以求解的问题^[4],其中每个函数都由如下的形式定义

$$\min F(x) = (f_1(x_1), f_2(x)),$$

$$\text{s. t. } f_2(x) = g(x) \cdot h(f_1(x_1), g(x)).$$

其中 $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$.

$$F_1: f_1(x_1) = x_1, g(x) = 1 + 9 \cdot \left(\sum_{i=2}^m x_i \right) / (m-1),$$

$$h(f_1, g) = 1 - \sqrt{f_1/g},$$

其中: $m = 30, x_i \in [0, 1], i = 1, 2, \dots, m$.

$$F_2: f_1(x_1) = x_1, g(x) = 1 + 9 \cdot \left(\sum_{i=2}^m x_i \right) / (m-1),$$

$$h(f_1, g) = 1 - (f_1/g)^2,$$

其中: $m = 30, x_i \in [0, 1], i = 1, 2, \dots, m$.

$$F_3: f_1(x_1) = 1 - \exp(-4x_1) \sin^6(6\pi x_1),$$

$$g(x) = 1 + 9 \cdot \left(\left(\sum_{i=2}^m x_i \right) / (m-1) \right)^{0.25},$$

$$h(f_1, g) = 1 - (f_1/g)^2,$$

其中: $m = 10, x_i \in [0, 1], i = 1, 2, \dots, m$.

此函数的非劣解集非凸(non convex)、分布不均匀(non-uniformity).

5.2 结果分析(Analysis of results)

对每个测试函数,用本文算法 RDMOEa 独立运行 30 次,并和文献[3]中的 8 种方法 SPEA, SOEA, NSGA, VEGA, HLGA, NPGA, FFGA, RAND 所得结果进行比较,这里, RDMOEa 与其比较的 8 种方法(详见文献[3])采用相同的初始条件,图 1~3 画出了 9 种方法前 5 次运行后所得非劣解集在目标函数空间中的位置(方法 SPEA, SOEA, NSGA, VEGA, HLGA, NPGA, FFGA, RAND, RDMOEa 的结果分别用符号 $\cdot, \Delta, \triangleleft, \circ, \square, +, \triangleright, \times, \nabla$ 表示),用于比较的 8 种方法的数据均选自网站 <http://www.tik.ee.ethz.ch/~zitzler/testdata.html>. 为进一步分析

RDMOEa 求得非劣解的均匀性,用 U -度量(限于篇幅, U -度量的定义参见文献[5])对上述 9 种方法求得的非劣解在目标函数空间中的数据进行统计计算,表 1 是计算结果.

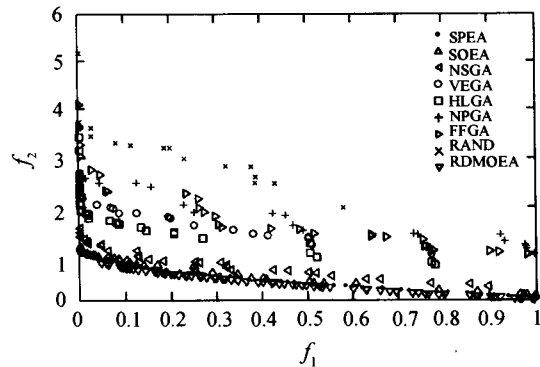


图 1 各方法对 F_1 求出的结果比较

Fig. 1 Comparison of result for function 1 in nine approaches

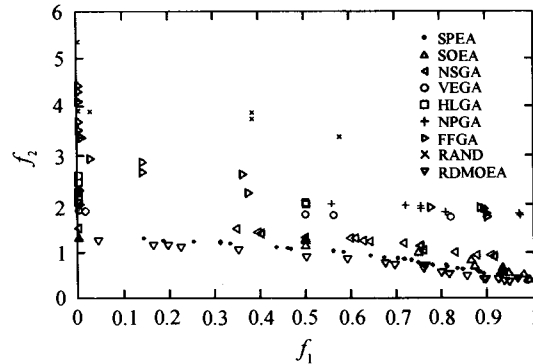


图 2 各方法对 F_2 求出的结果比较

Fig. 2 Comparison of result for function 2 in nine approaches

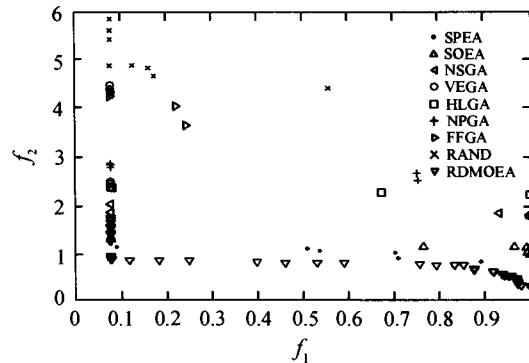


图 3 各方法对 F_3 求出的结果比较

Fig. 3 Comparison of result for function 3 in nine approaches

表 1 各种方法求得问题非劣解的 U -度量值比较

Table 1 Comparison of results of U -measure for different problems in nine approaches

函数	($\cdot$, SPEA)	($\cdot$, SOEA)	($\cdot$, NSGA)	($\cdot$, VEGA)	($\cdot$, HLGA)	($\cdot$, NPGA)	($\cdot$, FFGA)	($\cdot$, RAND)
F_1	0.45/0.55	0.56/0.70	0.42/0.56	0.68/0.63	0.59/0.79	0.58/0.70	0.60/0.63	0.60/0.60
F_2	0.55/0.57	0.55/0.82	0.56/0.60	0.59/0.70	0.62/0.93	0.61/0.85	0.66/0.67	0.67/0.78
F_3	0.92/0.93	0.90/0.96	0.90/0.96	0.90/1.11	0.92/0.98	0.90/0.93	0.97/0.99	0.91/1.01

注:表中符号 ' $\cdot$ ' 代表本文方法 RDMOEa, ($\cdot$, &) 代表方法 ' $\cdot$ ' 与方法 '&' 求得问题 U -度量值的数据对比项,数据形式 $*/\#$ 的分子 ' $*$ ' 与分母 ' $\#$ ' 分别表示方法 ' $\cdot$ ' 和 '&' 求得问题的 U -度量值.

从图1~3可以看出,本文算法RDMOEA求出问题的Pareto front位于其它8种方法求出的左下方,且解的数量多,说明算法RDMOEA求得的非劣解的质量要好.另外从表1的数据可知,RDMOEA求得问题非劣解的 U -度量值^[5]比其它8种方法所得的 U -度量值都偏小,因此算法RDMOEA比其它8种方法求得问题的非劣解在Pareto界面上散布更均匀.

6 结论(Conclusion)

本文把任意多个目标的优化问题转化成了两个目标优化问题,对转化后的优化问题设计了一种求解的多目标遗传算法(RDMOEA),数据试验表明本文算法RDMOEA比与其比较的8种方法求得的非劣解都优.

参考文献(References):

- [1] DEB K. *Multi-objective Optimization Using Evolutionary Algorithms* [M]. Chichester, New York, Weinheim, Brisbane, Singapore, Toronto: John Wiley & Sons Ltd, 2001: 1-78.
 - [2] LU H M, YEN GARY G. Rank-density-based multi-objective genetic algorithm and benchmark test function study [J]. *IEEE Trans on Evolutionary Computation*, 2003, 7(4): 325-342.
 - [3] ZITZLER E, DEB K, THELE L. Comparison of multi-objective evolutionary algorithms: empirical results [J]. *Evolutionary Computation*, 2000, 8(2): 1-24.
 - [4] DEB K. Multi-objective genetic algorithms: problem difficulties and construction of test problem [J]. *Evolutionary Computation*, 1999, 7(3): 205-230.
 - [5] LEUNG Y W, WANG Y P. U -Measure: A quality measure for multi-objective programming [J]. *IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics-Part A: Systems and Human*, 2003, 33(2): 337-343.
- 作者简介:
- 刘淳安 (1972—),男,讲师,2005年4月于西安电子科技大学获硕士学位,现为西安电子科技大学在读博士研究生,研究方向为进化算法、多目标优化, E-mail: chunanliu@yahoo.com.cn;
- 王宇平 (1961—),男,西安电子科技大学计算机学院教授,博士生导师,1993年于西安交通大学获博士学位,研究领域为进化算法、最优化理论、数据挖掘、人工智能等.
-
- (上接第424页)
- [5] CAI Y, CHEN S S. Vehicle/guideway dynamic interaction in maglev systems [J]. *Transactions of the ASME*, 1996, 118(3): 526-530.
 - [6] 曾佑文,王少华,等. EMS磁浮列车-轨道垂向耦合动力学研究 [J]. *铁道学报*, 1999, 21(2): 21-25.
(ZENG Youwen, WANG Shaohua, et al. A study of vertical coupling dynamics of EMS maglev train and guideway systems [J]. *Journal of the China Railway Society*, 1999, 21(2): 21-25.)
 - [7] 赵春发,翟婉明,等. 磁浮车辆/高架桥垂向耦合动力学研究 [J]. *铁道学报*, 2001, 23(5): 27-33.
(ZHAO Chunfa, ZHAI Wanming, et al. Maglev vehicle/elevated-beam guideway vertical coupling dynamics [J]. *Journal of the China Railway Society*, 2001, 23(5): 27-33.)
 - [8] HONG H J, LI Y. The research of control stability and vibration of maglev train [C]// *The 18th International Conference on Mechanically Levitated Systems and Linear Drives*. Shanghai: [s. n.], 2004, 10(2): 1012-1018.
- 作者简介:
- 洪华杰 (1976—),男,国防科技大学机电工程与自动化学院博士,主要研究方向为磁悬浮控制系统动力学, E-mail: opalqq@163.com;
- 李杰 (1971—),男,副教授,硕士生导师,国防科技大学机电工程与自动化学院磁悬浮研究中心主任,研究方向为磁悬浮控制技术和机器人技术;
- 张锰 (1972—),男,副教授,二炮研究院第四研究所,研究方向为网络与自动化.