第 23 卷第 3 期
2006 年 6 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 23 No. 3
Jun. 2006

文章编号: 1000 - 8152(2006)03 - 0449 - 06

广义递阶 Mamdani 模糊系统及其泛逼近性

张宇卓, 李洪兴
(北京师范大学 数学科学学院, 北京 100875)

摘要: 从解决模糊系统的"规则爆炸"问题出发,本文首先给出广义递阶 Mamdani 模糊系统的定义,然后证明其与具有中间变量的广义 Mamdani 模糊系统等价,并借助方形分片线性函数构造性的证明了在最大模和积分模意义下该系统是泛逼近器. 最后仿真实例证实了该系统的有效性.

关键词: 广义递阶 Mamdani 模糊系统; 方形分片线性函数; 泛逼近性
中图分类号: TP273, O174.41   **文献标识码**: A

Generalized hierarchical Mamdani fuzzy systems and their universal approximation

ZHANG Yu-zhuo, LI Hong-xing
(School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University, Beijing 100875, China)

Abstract: The definition of generalized hierarchical Mamdani fuzzy systems is firstly introduced for solving "rules exploring" problem of fuzzy systems. The generalized hierarchical Mamdani fuzzy systems are then proved to be equivalent to the generalized fuzzy systems with some intermediate input variables. Furthermore, by using square piecewise linear functions, these fuzzy systems are proved to be universal approximators in the meaning of maximum modulus and integration modulus. Finally, a simulation is given to prove their feasibility.

Key words: generalized hierarchical Mamdani fuzzy systems; square piecewise linear function; universal approximation

1 引言(Introduction)

近年来,模糊系统得到了越来越广泛的应用,对于不同模糊系统泛逼近性的研究也取得了丰富的成果[1~9]. 然而,在处理含有多个输入变量的基于规则的模糊系统时,常会出现"规则爆炸"的问题. 1991 年,文[10]提出递阶模糊系统(hierarchical fuzzy systems)的概念,为上述问题的解决提供了一个有效途径. 一个自然的问题是,递阶模糊系统是否具有良好的表示能力,即递阶模糊系统是否构成泛逼近器? 1998 年,文[5]研究了隶属函数为三角形的递阶模糊系统可逼近定义在紧集上的三元连续可微函数. 文[6]指出文[5]所利用的基本事实存在错误,并借助方形分片线性函数(SPLF)证明了递阶 T-S 模糊系统是泛逼近器. 文[7]证明了对于定义在紧集上的 n 元连续可微函数也可用采用三角形隶属函数的递阶模糊系统来逼近. 文[8]讨论了具有任意形状隶属函数的递阶模糊系统对定义在紧集上的连续函数的逼近性能. 特别地,文[9]给出一种广义模糊系统的定义,讨论了它对可积函数的逼近性,并指出应用中所研究的 T-S 模糊系统、Mamdani 模糊系统等都是该广义模糊系统的特例. 基于广义模糊系统的构造过程,文[11]给出广义递阶 T-S 模糊系统的定义,并证明了这种广义递阶 T-S 模糊系统与广义 T-S 模糊系统之间的等价关系. 本文提出广义递阶 Mamdani 模糊系统,并借助方形分片线性函数(SPLF)给出它在最大模和积分模意义下是泛逼近器的构造性证明,为递阶模糊系统的广泛应用提供理论依据.

2 预备知识(Preliminaries)

首先,给出方形分片线性函数(SPLF)的定义,它是分段线性函数在多元情形下的推广.

定义 1[9]　设 $S:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$,称 S 为方形分片线性函数(SPLF),若下列条件成立:

1) S 是连续函数;

收稿日期: 2005 - 01 - 14; 收修改稿日期: 2005 - 07 - 25.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60474023, 60274016); 教育部科学技术重点资助项目(03184); 973 国家重大基础研究计划基金资助项目(2002CB312200).

2) 存在 $a>0$,使得 S 在正方体 $\Delta=\{(x_1,\cdots,x_d)\in\mathbb{R}^d \mid -a\leqslant x_i\leqslant a, i=1,\cdots,d\}$ 之外恒为零,这样 S 具有紧支撑;

3) 存在 $N_s\in\mathbb{N}$,以及 d 维多面体 $\Delta_1,\cdots,\Delta_{N_s}$, $\bigcup_{j=1}^{N_s}\Delta_j=\Delta$,而且 S 在每个 $\Delta_j(j=1,\cdots,N_s)$ 上是线性函数:$(x_1,\cdots,x_d)\in\Delta_j\Rightarrow S(x_1,\cdots,x_d)=\sum_{i=1}^{d}\lambda_{ij}x_i+\gamma_j(j=1,\cdots,N_s)$,其中 λ_{ij},γ_j 是常数. 称 $\Delta_1,\cdots,\Delta_{N_s}$ 为对应于 S 的多面体,令 D_d 表示全体SPLF之集,而 D_d^0 表示 D_d 中支撑含于立方体 $[-1,1]^d$ 的全体SPLF之集. 若对 $S\in D_d$,记 $V(\Delta_j)$ 为 Δ_j 的顶点集,$V(S)$ 表示 $\Delta_1,\cdots,\Delta_{N_s}$ 的顶点全体,即 $V(S)=\bigcup_{j=1}^{N_s}V(\Delta_j)$.

引理 1[9] 若 $S\in D_d$,则对 $\forall(x_1,\cdots,x_d)\in\mathbb{R}^d$, $\forall i\in\{1,\cdots,d\}$,左导数 $\dfrac{\partial S_-(x_1,\cdots,x_d)}{\partial x_i}$ 与右导数 $\dfrac{\partial S_+(x_1,\cdots,x_d)}{\partial x_i}$ 均存在,而且对 $\forall(x_1^0,\cdots,x_d^0)\in\mathbb{R}^d$,有

$$\left|\frac{\partial S_+(x_1^0,\cdots,x_d^0)}{\partial x_i}\right|\vee\left|\frac{\partial S_-(x_1^0,\cdots,x_d^0)}{\partial x_i}\right|\leqslant \bigvee_{(x_1,\cdots,x_d)\in V(S)}\left\{\left|\frac{\partial S_+(x_1,\cdots,x_d)}{\partial x_i}\right|\vee\left|\frac{\partial S_-(x_1,\cdots,x_d)}{\partial x_i}\right|\right\}.$$

若记 $D_i(S)=\bigvee_{(x_1,\cdots,x_d)\in V(S)}\left\{\left|\dfrac{\partial S_+(x_1,\cdots,x_d)}{\partial x_i}\right|\vee\left|\dfrac{\partial S_-(x_1,\cdots,x_d)}{\partial x_i}\right|\right\},(i=1,2,\cdots,d)$,则有

$$|S(x_1+h_1,\cdots,x_d+h_d)-S(x_1,\cdots,x_d)|\leqslant\sum_{i=1}^{d}D_i(S)\cdot|h_i|,$$

其中 $h_1,\cdots,h_d\in\mathbb{R}$ 是给定的 d 个常数.

定理 1[6] 设 $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ 是连续函数,$U\subset\mathbb{R}^d$ 是任意紧集,则存在 $a>0$,使 $U\subset[-a,a]^d$,且对 $\forall\varepsilon>0$,有 $S\in D_d$,使得 $\mathrm{Supp}\,S\subset[-a,a]^d$ 且 $\|f-S\|_{\infty,U}<\varepsilon$.

定理 2[9] 设 μ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的Lebesgue测度,$f\in L_p(\mu)$,则对 $\forall\varepsilon>0$,存在 $S\in D_d$,使得 $\|f-S\|_{\mu,p}<\varepsilon$.

注 1 由于方形分片线性函数 S 在某立方体 $\Delta=\{(x_1,\cdots,x_d)\in\mathbb{R}^d \mid -a\leqslant x_i\leqslant a, i=1,\cdots,d\}$ 之外恒为零,所以可通过适当的线性变换将 S 变成 $S_1\in D_d^0$,使得 S_1 在 $[-1,1]^d$ 外恒为零. 对应地,此变换将 f 变成定义在 $[-1,1]^d$ 上的 f_1. 若记 $K=[-1,1]^d$,则 $\forall\varepsilon>0$,存在 $S\in D_d$,使得 $\|f-S\|_{\mu,p}<\varepsilon\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$ 存在 $S_1\in D_d^0$,使得 $\|f_1-S_1\|_{K,p}<\varepsilon$. 因此,在实际研究模糊系统泛逼近性时,可以只在输入空间 $\mathbb{R}^d$ 的有界子集 $[-1,1]^d$ 上讨论.

3 广义递阶Mamdani模糊系统(Generalized hierarchical Mamdani fuzzy systems)

在介绍广义递阶Mamdani模糊系统概念之前,首先给出广义Mamdani模糊系统的定义.

定义 2[9] (广义Mamdani模糊系统) 设 $p_1,\cdots,p_d\in\{-m,-m+1,\cdots,m-1,m\}$,则第 $(p_1,\cdots,p_d)$ 条Mamdani模糊规则可表示为

若 x_1 是 $\tilde{A}_{1p_1}$ 且 x_2 是 $\tilde{A}_{2p_2}$ 且 $\cdots$ 且 x_d 是 $\tilde{A}_{dp_d}$,则 y 是 $\tilde{B}_{r(p_1,\cdots,p_d)}$.

其中 r 是可调节的实函数且 $r:\mathbb{Z}^d\to\mathbb{Z}$. 记 $Q_d(r)=\bigvee_{p_1,\cdots,p_d=-m}^{m}\{|r(p_1,\cdots,p_d)|\}$ 作为 $r(p_1,\cdots,p_d)$ 绝对值的最大者,$\tilde{B}_{r(p_1,\cdots,p_d)}\in\mathscr{F}([-b,b])$ 为模糊数,$\ker(\tilde{B}_{r(p_1,\cdots,p_d)})=\{\dfrac{b}{Q_d(r)}r(p_1,\cdots,p_d)\}$,且规定 $\dfrac{0}{0}\equiv0$,则广义Mamdani模糊系统可定义为

$$M(x_1,\cdots,x_d)=\frac{\sum_{p_1,\cdots,p_d=-m}^{m}\frac{b}{Q_d(r)}r(p_1,\cdots,p_d)\cdot(H_{p_1,\cdots,p_d}(x_1,\cdots,x_d))^{\alpha}}{\sum_{p_1,\cdots,p_d=-m}^{m}(H_{p_1,\cdots,p_d}(x_1,\cdots,x_d))^{\alpha}},\tag{1}$$

其中:$H_{p_1,\cdots,p_d}(x_1,\cdots,x_d)=\tilde{A}_{1p_1}(x_1)\mathrm{T}\cdots\mathrm{T}\tilde{A}_{dp_d}(x_d)$,$\alpha$ 为可调节参数且 $0\leqslant\alpha<+\infty$,T为t-模.

注 2 定义2中的广义Mamdani模糊系统利用的是Zadeh提出的CRI合成推理算法[12],对于确切输入使用单点模糊化,通过模糊蕴涵关系 $\tilde{R}_{p_1,\cdots,p_d}=\tilde{A}_{1p_1}\mathrm{T}\cdots\mathrm{T}\tilde{A}_{dp_d}\to\tilde{B}_{r(p_1,\cdots,p_d)}$,可得输出模糊集 $\tilde{B}^*_{r(p_1,\cdots,p_d)}(y)=(\tilde{A}\circ\tilde{R}_{p_1,\cdots,p_d})(y)=H_{p_1,\cdots,p_d}(x_1,\cdots,x_d)\mathrm{T}\tilde{B}_{r(p_1,\cdots,p_d)}(y)$,其中模糊蕴涵算子使用t-模. 最后,利用广义重心清晰化方法[13]得到式(1).

定义 3 (广义递阶Mamdani模糊系统-GHMFS) 广义递阶Mamdani模糊系统基于下列Mamdani模糊推理规则:

第1级 若 x_1 是 $\tilde{A}_{1p_1}$ 且 $\cdots$ 且 x_{d_1} 是 $\tilde{A}_{d_1p_{d_1}}$,则 y_1 是 $\tilde{B}_{q_1}$;

第2级 若 x_{d_1+1} 是 $\tilde{A}_{(d_1+1)p_{d_1+1}}$ 且 $\cdots$ 且 $x_{d_1+d_2}$ 是 $\tilde{A}_{(d_1+d_2)p_{d_1+d_2}}$ 且 y_1 是 $\tilde{B}_{q_1}$,则 y_2 是 $\tilde{B}_{q_2}$;

$\cdots$

第 j 级 若 $x_{d_{j-1}+1}$ 是 $\tilde{A}_{(d_{j-1}+1)p_{d_{j-1}+1}}$ 且 $\cdots$ 且 $x_{d_{j-1}+d_j}$

是 $\tilde{A}_{(d_{j-1}+d_j)p_{d_{j-1}+d_j}}$ 且 y_{j-1} 是 $\tilde{B}_{q_{j-1}}$，则 y_j 是 $\tilde{B}_{q_j}$. 其中 $j=2,\cdots,L;p_1,p_2,\cdots,q_j \triangleq r_j(p_{d_{j-1}+1},p_{d_{j-1}+2},\cdots,p_{d_{j-1}+d_j}) \in \{-m,-m+1,\cdots,m-1,m\}$. 记 $\sum_{j=1}^{L} d_j = d$. 在定义2的条件下，广义递阶 Mamdani 模糊系统可表示为:

$$y_1 = M_1(x_1,\cdots,x_{d_1}) = \frac{\sum\limits_{p_1,\cdots,p_{d_1}=-m}^{m} \frac{b}{Q_{d_1}(r_1)} r_1(p_1,\cdots,p_{d_1}) \cdot (H_{p_1,\cdots,p_{d_1}}(x_1,\cdots,x_{d_1}))^{\alpha}}{\sum\limits_{p_1,\cdots,p_{d_1}=-m}^{m} (H_{p_1,\cdots,p_{d_1}}(x_1,\cdots,x_{d_1}))^{\alpha}},$$

$$y_2 = M_2(x_{d_1+1},\cdots,x_{d_1+d_2},y_1) =$$

$$\frac{\sum\limits_{p_{d_1+1},\cdots,p_{d_1+d_2},q_1=-m}^{m} \frac{b}{Q_{d_2}(r_2)} r_2(q_1,p_{d_1+1},\cdots,p_{d_1+d_2}) \cdot (H_{p_{d_1+1},\cdots,p_{d_1+d_2}}(x_{d_1+1},\cdots,x_{d_1+d_2})\mathrm{T}\tilde{B}^*_{q_1}(y_1))^{\alpha}}{\sum\limits_{p_{d_1+1},\cdots,p_{d_1+d_2},q_1=-m}^{m} (H_{p_{d_1+1},\cdots,p_{d_1+d_2}}(x_{d_1+1},\cdots,x_{d_1+d_2})\mathrm{T}\tilde{B}^*_{q_1}(y_1))^{\alpha}},$$

$\cdots$

$$y_j = M_j(x_{l_j+1},\cdots,x_{l_j+d_j},y_{j-1}) =$$

$$\frac{\sum\limits_{p_{l_j+1},\cdots,p_{l_j+d_j},q_{j-1}=-m}^{m} \frac{b}{Q_{d_j}(r_j)} r_j(q_{j-1},p_{l_j+1},\cdots,p_{l_j+d_j}) \cdot (H_{p_{l_j+1},\cdots,p_{l_j+d_j}}(x_{l_j+1},\cdots,x_{l_j+d_j})\mathrm{T}\tilde{B}^*_{q_{j-1}}(y_{j-1}))^{\alpha}}{\sum\limits_{p_{l_j+1},\cdots,p_{l_j+d_j},q_{j-1}=-m}^{m} (H_{p_{l_j+1},\cdots,p_{l_j+d_j}}(x_{l_j+1},\cdots,x_{l_j+d_j})\mathrm{T}\tilde{B}^*_{q_{j-1}}(y_{j-1}))^{\alpha}}.$$

其中:$j=2,\cdots,L;l_j=\sum_{k=1}^{j-1} d_k$，显然 $l_L+d_L=d$.

定理3 若将 $y_1,\cdots,y_{L-1}$ 看作递阶模糊系统的中间变量，则广义递阶 Mamdani 模糊系统的输出 y_L 可表示为

$$y_L = \frac{\sum\limits_{q_1,\cdots,q_{L-1};p_1,\cdots,p_d=-m}^{m} \frac{b}{Q_d(r)} r(p_1,\cdots,p_d) \cdot (H_{p_1,\cdots,p_d}(x_1,\cdots,x_d)\mathrm{T}J_{q_1,\cdots,q_{L-1}}(y_1,\cdots,y_{L-1}))^{\alpha}}{\sum\limits_{q_1,\cdots,q_{L-1};p_1,\cdots,p_d=-m}^{m} (H_{p_1,\cdots,p_d}(x_1,\cdots,x_d)\mathrm{T}J_{q_1,\cdots,q_{L-1}}(y_1,\cdots,y_{L-1}))^{\alpha}},$$

其中 $J_{q_1,\cdots,q_{L-1}}(y_1,\cdots,y_{L-1}) = \tilde{B}_{q_1}(y_1)\mathrm{T}\cdots\mathrm{T}\tilde{B}_{q_{L-1}}(y_{L-1})$.

证 由定义3知 $y_L = M_L(x_{l_L+1},\cdots,x_{l_L+d_L},y_{L-1}) =$

$$\frac{\sum\limits_{q_{L-1};p_{l_L+1},\cdots,p_{l_L+d_L}=-m}^{m} \frac{b}{Q_{d_L}(r_L)} r_L(q_{L-1},p_{l_L+1},\cdots,p_{l_L+d_L}) \cdot (H_{p_{l_L+1},\cdots,p_{l_L+d_L}}(x_{l_L+1},\cdots,x_{l_L+d_L})\mathrm{T}\tilde{B}^*_{q_{L-1}}(y_{L-1}))^{\alpha}}{\sum\limits_{q_{L-1};p_{l_L+1},\cdots,p_{l_L+d_L}=-m}^{m} (H_{p_{l_L+1},\cdots,p_{l_L+d_L}}(x_{l_L+1},\cdots,x_{l_L+d_L})\mathrm{T}\tilde{B}^*_{q_{L-1}}(y_{L-1}))^{\alpha}}.$$

由于

$\tilde{B}^*_{q_1}(y_1) = \tilde{A}\circ\tilde{R}_{p_1,\cdots p_{d_1}}(y_1) =$
$H_{p_1,\cdots,p_{d_1}}(x_1,\cdots,x_{d_1})\mathrm{T}\tilde{B}_{q_1}(y_1)$,
$\tilde{B}^*_{q_2}(y_2) =$
$(H_{p_{d_1+1},\cdots,p_{d_1+d_2}}(x_{d_1+1},\cdots,x_{d_1+d_2})\mathrm{T}\tilde{B}^*_{q_1}(y_1))$.
$\mathrm{T}\tilde{B}_{q_2}(y_2) =$
$(H_{p_1,\cdots,p_{d_1+d_2}}(x_1,\cdots,x_{d_1+d_2}))\mathrm{T}\tilde{B}_{q_1}(y_1)\mathrm{T}\tilde{B}_{q_2}(y_2)$,
$\tilde{B}^*_{q_{L-1}}(y_{L-1}) = H_{p_1,\cdots,p_{d_1\cdots+d_{L-1}}}(x_1,\cdots,x_{d_1+\cdots+d_{L-1}})\cdot$
$\mathrm{T}\tilde{B}_{q_1}(y_1)\mathrm{T}\cdots\mathrm{T}\tilde{B}_{q_{L-1}}(y_{L-1})=$
$H_{p_1,\cdots,p_{l_L}}(x_1,\cdots x_{l_L})\mathrm{T}J_{q_1,\cdots,q_{L-1}}(y_1,\cdots,y_{L-1})$.

又因为

$$q_1 = r_1(p_1,\cdots,p_{d_1}),$$

$q_2 = r_2(q_1,p_{d_1+1},\cdots,p_{d_1+d_2}) =$
$r_2(r_1(p_1,\cdots,p_{d_1}),p_{d_1+1},\cdots,p_{d_1+d_2})$,
$\cdots$
$q_{L-1} = r_{L-1}(r_{L-2}(\cdots(r_2(r_1(p_1,\cdots,p_{d_1}),p_{d_1+1},\cdots,$
$p_{d_1+d_2},p_{d_1+d_2+1},\cdots,p_{l_L})\cdots)$,

所以

$r_L(q_{L-1},p_{l_L+1},\cdots,p_{l_L+d_L}) =$
$r_L(r_{L-1}(\cdots(r_1(p_1,\cdots,p_{d_1}),p_{d_1+1},\cdots,p_{l_L},p_{l_L+1},\cdots,p_{l_L+d_L})\cdots)=$
$r_L(r_{L-1}(\cdots(r_1(p_1,\cdots,p_{d_1}),p_{d_1+1},\cdots,p_d)\cdots) \triangleq$
$r(p_1,\cdots,p_d)$.

则 $\ker(\tilde{B}_L) = \left\{\frac{b}{Q_d(r)}\cdot r(p_1,\cdots,p_d)\right\}$，所以

$$y_L=\frac{\sum\limits_{q_1,\cdots,q_{L-1};p_1,\cdots,p_d=-m}^{m}\frac{b}{Q_d(r)}r(p_1,\cdots,p_d)\cdot(H_{p_1,\cdots,p_d}(x_1,\cdots,x_d)\mathrm{T}J_{q_1,\cdots,q_{L-1}}(y_1,\cdots,y_{L-1}))^{\alpha}}{\sum\limits_{q_1,\cdots,q_{L-1};p_1,\cdots,p_d=-m}^{m}(H_{p_1,\cdots,p_d}(x_1,\cdots,x_d)\mathrm{T}J_{q_1,\cdots,q_{L-1}}(y_1,\cdots,y_{L-1}))^{\alpha}}.$$ 证毕.

注 3 从定理3容易看出,广义递阶Mamdani模糊系统可以看作具有中间变量$y_1,\cdots,y_{L-1}$的广义Mamdani模糊系统.

4 广义递阶Mamdani模糊系统的泛逼近性(Universal approximation of GHMFS)

由注1可设输入论域为$[-1,1]^d$. 假定模糊集族$\{\tilde{A}_{ij}\,|\,i=1,\cdots,d;j=-m,-m+1,\cdots,m-1,m\}$满足下列条件:

1) $\tilde{A}_{ij}(\cdot)$在$[-1,1]$上可积;

2) $\ker(\tilde{A}_{ij})$含$\frac{j}{m}$,对于$j-1,j,j+1\in\{-m,-m+1,\cdots,m-1,m\}$,$x\in[-1,1]$,若$\tilde{A}_{ij-1}(x)\wedge\tilde{A}_{ij+1}(x)>0$,则$\tilde{A}_{ij}(x)>0$;

3) 存在$c_0\in N$,使得$\forall x\in[-1,1]$有$\forall i\in\{1,\cdots,d\}$,$1\leqslant \mathrm{card}\{j\,|\,\tilde{A}_{ij}(x)>0\}\leqslant c_0$.

基于引理1,文[9]证明了如下结论.

引理 2[9] 设$p_1,\cdots,p_d\in\{-m,-m+1,\cdots,m-1,m\}$,$r:\mathbb{Z}^d\to\mathbb{Z}$,$\tilde{B}_{r(p_1,\cdots,p_d)}\in\mathscr{F}([-b,b])$为模糊数,$Q_d(r)=\bigvee\limits_{p_1,\cdots,p_d=-m}^{m}\{|r(p_1,\cdots,p_d)|\}$,$\ker(\tilde{B}_{r(p_1,\cdots,p_d)})=\left\{\frac{b}{Q_d(r)}r(p_1,\cdots,p_d)\right\}$,则可构造出$S\in D_d^0$,使得$S(\frac{p_1}{m},\cdots,\frac{p_d}{m})=\frac{b}{Q_d(r)}r(p_1,\cdots,p_d)$,且

$$\left|S(x_1,\cdots,x_d)-S(\frac{p_1}{m},\cdots,\frac{p_d}{m})\right|\leqslant\frac{c_0}{m}\sum_{i=1}^{d}D_i(S).$$

定理 4 设$f:[-1,1]^d\to\mathbb{R}$是连续函数,则对$\forall\varepsilon>0$,存在广义递阶Mamdani模糊系统$y_1,\cdots,y_L$,使得$\|y_L-f\|_{\infty,[-1,1]^d}<\varepsilon$.

证 记$X_d=(x_1,\cdots,x_d)$,$Y_{L-1}=(y_1,\cdots,y_{L-1})$,则由引理2和定理3,可得

$$\|y_L-S\|_{\infty,[-1,1]^d}=\bigvee_{X_d\in[-1,1]^d}\{|y_L-S(X_d)|\}=$$

$$\bigvee_{X_d\in[-1,1]^d}\left\{\left|\frac{\sum\limits_{p_1,\cdots,p_d;q_1,\cdots,q_{L-1}=-m}^{m}\frac{b}{Q_d(r)}r(p_1,\cdots,p_d)(H_{p_1,\cdots,p_d}(X_d)\mathrm{T}J_{q_1,\cdots,q_{L-1}}(Y_{L-1}))^{\alpha}}{\sum\limits_{p_1,\cdots,p_d;q_1,\cdots,q_{L-1}=-m}^{m}(H_{p_1,\cdots,p_d}(X_d)\mathrm{T}J_{q_1,\cdots,q_{L-1}}(Y_{L-1}))^{\alpha}}-S(X_d)\right|\right\}=$$

$$\bigvee_{X_d\in[-1,1]^d}\left\{\left|\frac{\sum\limits_{p_1,\cdots,p_d;q_1,\cdots,q_{L-1}=-m}^{m}(H_{p_1,\cdots,p_d}(X_d)\mathrm{T}J_{q_1,\cdots,q_{L-1}}(Y_{L-1}))^{\alpha}\left[\frac{b}{Q_d(r)}r(p_1,\cdots,p_d)-S(X_d)\right]}{\sum\limits_{p_1,\cdots,p_d;q_1,\cdots,q_{L-1}=-m}^{m}(H_{p_1,\cdots,p_d}(X_d)\mathrm{T}J_{q_1,\cdots,q_{L-1}}(Y_{L-1}))^{\alpha}}\right|\right\}=$$

$$\bigvee_{X_d\in[-1,1]^d}\left\{\left|\frac{\sum\limits_{p_1,\cdots,p_d;q_1,\cdots,q_{L-1}=-m}^{m}\cdot(H_{p_1,\cdots,p_d}(X_d)\mathrm{T}J_{q_1,\cdots,q_{L-1}}(Y_{L-1}))^{\alpha}\left[S(\frac{p_1}{m},\cdots,\frac{p_d}{m})-S(X_d)\right]}{\sum\limits_{p_1,\cdots,p_d;q_1,\cdots,q_{L-1}=-m}^{m}(H_{p_1,\cdots,p_d}(X_d)\mathrm{T}J_{q_1,\cdots,q_{L-1}}(Y_{L-1}))^{\alpha}}\right|\right\}\leqslant$$

$$\bigvee_{X_d\in[-1,1]^d}\left(\frac{c_0}{m}\sum_{i=1}^{d}D_i(S)\right)=\frac{c_0}{m}\sum_{i=1}^{d}D_i(S).$$

故令$m>\frac{2c_0}{\varepsilon}\sum\limits_{i=1}^{d}D_i(S)$,可知$\|y_L-S\|_{\infty,[-1,1]^d}<\frac{\varepsilon}{2}$,又由定理1可知$\|f-S\|_{\infty,[-1,1]^d}<\frac{\varepsilon}{2}$,从而有

$$\|y_L-f\|_{\infty,[-1,1]^d}\leqslant$$
$$\|y_L-S\|_{\infty,[-1,1]^d}+\|S-f\|_{\infty,[-1,1]^d}<\varepsilon.$$

证毕.

定理 5 设μ是$[-1,1]^d$上的Lebesgue测度,对$\forall f\in L_p(\mu)$,$\forall\varepsilon>0$,存在广义递阶Mamdani模糊系统$y_1,\cdots,y_L$使得$\|y_L-f\|_{\mu,p}<\varepsilon$.

证明略.

注 4 根据定理4的证明过程,我们可以根据给定的精度ε,确定最小模糊规则库的规则数目.

5 仿真实例(Simulation)

为节省篇幅,本节只给出广义递阶Mamdani模糊系统逼近给定连续函数的实现过程.

设$\alpha=1$, $d=3$, $d_1=2$, $d_2=1$, $c_0=2$,则模糊系统的输入变量数为3,且递阶模糊系统具有两

级. 定义连续函数 $f:[-1,1]^3 \to \mathbb{R}$ 如下:

$$f(x_1,x_2,x_3)=\exp\left\{-\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{25}\right\},$$

$$(|x_1|\leqslant 1,\ |x_2|\leqslant 1,\ |x_3|\leqslant 1).$$

给定 $\varepsilon=0.1$,由于

$$\left|\exp\left\{-\frac{x_1^2+y_1^2+z_1^2}{25}\right\}-\exp\left\{-\frac{x_2^2+y_2^2+z_2^2}{25}\right\}\right|\leqslant$$

$$\frac{2}{25}(|x_1-x_2|+|y_1-y_2|+|z_1-z_2|),$$

则 $\bigvee_{i=1}^{d} D_i(S)\leqslant\frac{2}{25}<\frac{1}{12}$,可取 $m>2c_0\cdot d\cdot\bigvee_{i=1}^{d} D_i(S)/\varepsilon=120(\bigvee_{i=1}^{d} D_i(S))$,故取 $m=10$, 则递阶系统的模糊规则库大小为 $(2m+1)^2(d-1)=2(2\times10+1)^2=882$.

令 $A_{1j}=A_{2j}=A_{3j}\quad(j=0,\pm1,\cdots,\pm10)$,且

$$A_{1(10)}(x_1)=\begin{cases}10\left(x_1-\frac{9}{10}\right), & \frac{9}{10}\leqslant x_1\leqslant 1,\\ 0, & \text{否则};\end{cases}$$

$$A_{1j}(x_1)=\begin{cases}10\left(\frac{1+j}{10}-x_1\right), & \frac{j}{10}\leqslant x_1\leqslant\frac{1+j}{10},\\ 10\left(\frac{1-j}{10}+x_1\right), & -\frac{1-j}{10}\leqslant x_1\leqslant\frac{j}{10},\\ 0, & \text{否则};\end{cases}$$

$$A_{1(-10)}(x_1)=\begin{cases}-10\left(x_1+\frac{9}{10}\right), & -1\leqslant x_1\leqslant\frac{-9}{10},\\ 0, & \text{否则};\end{cases}$$

取 $r_1(p_1,p_2)=\left[\frac{p_1+p_2}{2}\right]$,其中 $[\cdot]$ 为取整运算. 设 $B_{p_1p_2}$ 为如下模糊集:

$$B_{p_1p_2}(y)=\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(y-\frac{r_1(p_1,p_2)}{10}\right)\right\},$$

$$(p_1,p_2=0,\pm1,\cdots,\pm10),$$

又由 $f\left(\frac{p_1}{10},\frac{p_2}{10},\frac{p_3}{10}\right)=S\left(\frac{p_1}{10},\frac{p_2}{10},\frac{p_3}{10}\right)$ 和定理 3,得到两级的广义递阶 Mamdani 模糊系统:

$$\begin{cases} y_1=\dfrac{\sum\limits_{p_1,p_2=-10}^{10} A_{1p_1}(x_1)A_{2p_2}(x_2)\left(\dfrac{r_1(p_1,p_2)}{10}\right)}{\sum\limits_{p_1,p_2=-10}^{10} A_{1p_1}(x_1)A_{2p_2}(x_2)},\\ y_2=\dfrac{\sum\limits_{p_1,p_2,p_3=-10}^{10}(A_{1p_1}(x_1)A_{2p_2}(x_2)A_{3p_3}(x_3)B_{p_1p_2}(y_1))\cdot f\left(\dfrac{p_1}{10},\dfrac{p_2}{10},\dfrac{p_3}{10}\right)}{\sum\limits_{p_1,p_2,p_3=-10}^{10} A_{1p_1}(x_1)A_{2p_2}(x_2)A_{3p_3}(x_3)B_{p_1p_2}(y_1)}.\end{cases}$$

给定 $x_3=1$,可以得到 f 和 y_2 的曲面如图 1,图 2. 通过计算一些随机点处的误差可知,广义递阶 Mamdani 模糊系统对于给定连续函数的逼近精度很高. 因此,在近似意义下,可以直接实现对给定连续函数的逼近. 若利用一般模糊系统来实现同样的精度,则相应模糊规则库的大小是 $(2m+1)^3=21^3=9261$. 可见,利用递阶模糊系统可使模糊规则数显著减少.

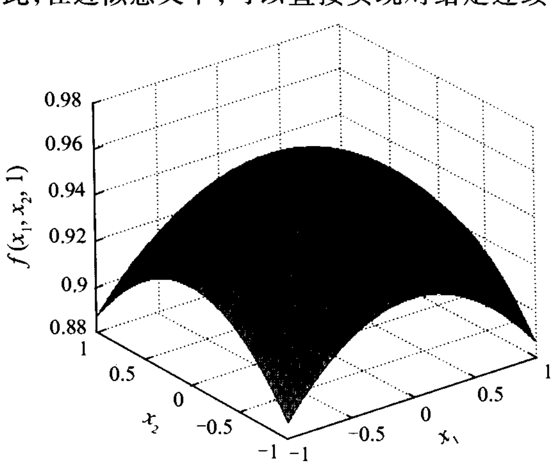

图 1　$x_3=1$ 时 f 的曲面

Fig. 1　Surface of f when $x_3=1$

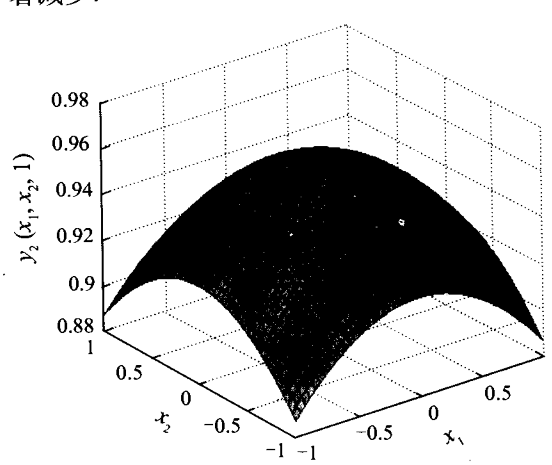

图 2　$x_3=1$ 时 y_2 的曲面

Fig. 2　Surface of y_2 when $x_3=1$

6 结语(Conclusion)

本文定义的广义递阶 Mamdani 模糊系统可以看作是具有中间变量的广义 Mamdani 模糊系统. 在此基础上,可以证明该模糊系统在最大模和积分模意义下是泛逼近器,其中给出的证明过程是构造性的,即可以通过给定的精度 ε,来确定最小模糊规则库的规模. 值得提出的是,若将该广义递阶 Mamdani 模糊系统中的蕴涵算子换成其它更广泛的模糊蕴涵算子,可以分别得到若干不同的递阶模糊系统. 进一步,可以分析这些新的模糊系统的逼近特性.

参考文献(References):

[1] LI H X. Interpolation mechanism of fuzzy control[J]. *Science in China (Series E)*, 1998, 41(3): 312 - 320.

[2] 曾珂,徐文立,张乃尧. 特定 Mamdani 模糊系统的通用逼近性[J]. 控制与决策, 2000, 15(4): 435 - 438.
(ZENG Ke, XU Wenli, ZHANG Naiyao. Universal approximation of special Mamdani fuzzy systems [J]. *Control and Decision*, 2000, 15(4): 435 - 438.)

[3] 曾珂,张乃尧,徐文立. 典型 T - S 模糊系统是通用逼近器[J]. 控制理论与应用, 2001, 18(2): 293 - 297.
(ZENG Ke, ZHANG Naiyao, XU Wenli. Typical T - S fuzzy systems are universal approximators [J]. *Control Theory & Applications*, 2001, 18(2): 293 - 297.)

[4] LIU P Y, LI H X. Analysis for $L_p(\mu)$ -norm approximation capability of generalized Mamdani fuzzy systems[J]. *Information Sciences*, 2001, 138(1 - 4): 195 - 210.

[5] WANG L X. Universal approximation by hierarchical fuzzy systems[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1998, 93(2): 223 - 230.

[6] 刘普寅. 模糊神经网络理论及应用研究[D]. 北京: 北京师范大学, 2002.
(LIU Puyin. *Fuzzy neural network theory and applications* [D]. Beijing: Beijing Normal University, 2002.)

[7] WEI C, WANG L X. A note on universal approximation by hierarchical fuzzy systems[J]. *Information Sciences*, 2000, 123(3/4): 241 - 248.

[8] 孙多青,霍伟. 具有任意形状隶属函数的递阶模糊系统逼近性能研究[J]. 控制理论与应用, 2003, 20(3): 377 - 381.
(SUN Duoqing, HUO Wei. Universal approximation of hierarchical fuzzy systems with random shaped membership functions [J]. *Control Theory & Applications*, 2003, 20(3): 377 - 381.)

[9] 刘普寅,李洪兴. 广义模糊系统对于可积函数的逼近性[J]. 中国科学(E辑), 2000, 30(5): 413 - 423.
(LIU Puyin, LI Hongxing. Approximation of generalized fuzzy systems to integrable functions[J]. *Science in China (Series E)*, 2000, 30(5): 413 - 423.)

[10] RAJU G V S, ZHOU J, KISNER R A. Hierarchical fuzzy control[J]. *Int J of Control*, 1991, 54(5): 1201 - 1216.

[11] LIU P Y, LI H X. Equivalence of generalized T-S fuzzy system and its hierarchical system [J]. *J of Beijing Normal University (Natural Science)*, 2000, 36(5): 612 - 618.

[12] ZADEH L A. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes [J]. *IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics*, 1973, 3(1): 28 - 44.

[13] FILEV D P, YAGER R R. A generalized defuzzification method via bad distributions[J]. *Int J of Intelligent Systems*, 1991, 6(supp): 687 - 697.

作者简介:

张宇卓 (1977—),女,现为北京师范大学数学科学学院博士研究生,主要研究方向为模糊系统与智能控制, E-mail: zhuozhuo30@sina.com;

李洪兴 (1953—),男,北京师范大学数学科学学院教授,博士生导师,主要研究方向为模糊系统,智能控制,知识表示与数据挖掘等.