文章编号：1000-8152(2006)03-0463-04

惯性盘倒立摆的部分变量镇定

叶华文[1]，戴冠中[2]，康剑灵[3]
(1. 中南大学 信息与工程学院，湖南 长沙 410083；2. 西北工业大学 自动化学院，陕西 西安 710072；
3. 东华大学 应用数学系，上海 200051)

摘要：设计控制律使惯性盘倒立摆的部分变量全局渐近稳定，部分变量全局渐近稳定到不变流形. 设计方法为李雅普诺夫前推方法，稳定性分析则依据部分变量全局渐近稳定性判据. 仿真验证了理论分析.

关键词：镇定；部分变量稳定；倒立摆
中图分类号：TP202　　**文献标识码**：A

Partial variable stabilization of an inertia wheel pendulum

YE Hua-wen[1], DAI Guan-zhong[2], KANG Jian-ling[3]
(1. School of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha Hunan 410083, China;
2. College of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an Shaanxi 710072, China;
3. Department of Applied Mathematics, Donghua University, Shanghai 200051, China)

Abstract: For an inertia wheel pendulum, a control law is designed to ensure that partial states of an inertia wheel pendulum are globally asymptotically stable, whereas other states are globally asymptotically convergent to an invariant manifold. Firstly, the control law is obtained by using Lyapunov forwarding technique. The stability analysis is then completed by invoking the stability criteria with respect to partial variables. Finally, simulation results are given to approve the theoretical analysis.

Key words: stabilization; stability with respect to partial states; inverted pendulum

1 引言(Introduction)

对一类惯性盘倒立摆，文献[1]运用前推方法给出了相应的镇定设计，方法特点是每一步迭代都显式求解一个偏微分方程，求解受阻则进行松弛处理. 结果，控制设计后的闭环渐近稳定，但吸引域并非全空间，需除去一个勒贝格零测集.

本文继续考虑这个模型的镇定问题，设计方法仍然是前推方法，但是将从部分变量镇定的角度考虑问题. 因此，当偏微分方程求解受阻时无需复杂的松弛处理，每次迭代都只需求解一个形式相同的简单偏微分方程. 最终，我们的设计导致闭环的部分变量为全局渐近稳定，部分变量全局渐近稳定到不变流形上.

内容安排：首先，针对一类互联系统，运用有关引理总结一个部分变量镇定的定理，其次，以此定理为依据，给出惯性盘倒立摆的部分变量镇定设计，然后是有关稳定性讨论及仿真验证.

2 部分变量镇定定理(Theorem for partial variable stabilization)

首先给出部分变量全局渐近稳定的引理及有关定义[2].

考察驻定微分方程

$$\dot{x} = f(x),\ f(0) = 0. \tag{1}$$

这里 $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$, $n_1 + n_2 = n$.

定义 1　称系统(1)关于变量 x_2 是稳定的，如果对任意给定的正数 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta(\varepsilon) > 0$，使得当 $|x_0| \leqslant \delta(\varepsilon)$ 时，对所有 $t \geqslant t_0$ 成立 $|x_2(t;\ t_0,\ x_0)| \leqslant \varepsilon$；如果还满足 $\lim\limits_{t\to\infty}|x_2(t;\ t_0,\ x_0)| = 0$，则称系统(1)关于变量 x_2 是渐近稳定的.

定义 2　李雅普诺夫函数 $V(x)$ 称为关于部分变量 x_2 正定径向无界，如果存在 $\mathbb{R}^{n_2}$ 上的正定径向无界函数 $W(x_2)$，使得对所有 $x \in \mathbb{R}^n$ 成立 $V(x) \geqslant W(x_2)$.

收稿日期：2004-10-26；收修改稿日期：2005-09-16.

引理 1 如果存在关于部分变量 x_2 正定径向无界的李雅普诺夫函数 $V(x)$,其沿方程(1)的导数 $\dot{V}$ 关于变量 x_2 为负定,那么系统(1)关于部分变量 x_2 全局渐近稳定.

证 注意到 $V(x)$ 关于 x_2 正定径向无界,运用文献[2]之定理1.4.2,引理得证. 证毕.

定理 1 考察系统

$$\dot{z} = h(x)\ ,\ \dot{x} = f(x) + g(x)u\ . \tag{2}$$

这里 $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$, $n_1 + n_2 = n$, $z, u \in \mathbb{R}$; $h(0) = 0$, $f(0) = 0$. 如果满足下面的假设:

H1 存在关于变量 x_2 的正定径向无界函数 V,使得

$$L_f V(x) < 0,\ \forall x_2 \neq 0\ ,$$
$$L_g V(x_1, 0) = 0,\ \forall x_1.$$

H2 存在连续可微函数 $M(x)$, $M(0) = 0$,使得对任意 $x \in \mathbb{R}^n$,有 $L_f M(x) = h(x)$, $L_g M(x) \neq 0$;那么

$$u = -L_g V(x) + (z - M(x))L_g M(x)\ ,$$

使 $x_2 = 0$ 成为全局渐近稳定平衡点,其余状态变量全局渐近稳定到不变流形 $z - M(x_1, 0) = 0$.

证 设置李雅普诺夫函数

$$W = V(x) + \frac{1}{2}(z - M(x))^2,$$

该函数关于 x_2, $z - M(x)$ 显然是正定径向无界的. 沿着闭环的解计算时间微分可得

$$\dot{W} = L_f V(x) - (L_g V(x) - (z - M(x))L_g M(x))^2.$$

显然有

$$\dot{W} = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x_2 = 0 \\ L_g V(x) = (z - M(x))L_g M(x) \end{array}\right\}.$$

由于 $L_g M(x_1, 0) \neq 0$, $L_g V(x_1, 0) = 0$,因此有 $\dot{W} = 0 \Rightarrow x_2 = 0$, $z - M(x_1, 0) = 0$,由引理1知命题正确. 证毕.

3 惯性盘倒立摆的部分变量镇定(Partial variable stabilization for the inertia wheel pendulum)

惯性盘倒立摆的微分方程为[1]

$$\dot{z}_1 = z_2,\ \dot{z}_2 = \sin x_1,\ \dot{x}_1 = x_3,\ \dot{x}_3 = u\ . \tag{3}$$

以定理1为依据,由下而上,依次加进积分器,给出惯性盘倒立摆的部分变量镇定设计. 最终,我们将得到关于(z_2, x_3, $z_1 + 2x_1$)的部分变量镇定控制.

第1步 考察子系统

$$\dot{x}_1 = x_3,\ \dot{x}_3 = u\ .$$

以 $V = (1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_3^2$ 为李雅普诺夫函数,有 $\dot{V} = x_3(\sin x_1 + u)$,因此初步设计

$$u = -\sin x_1 - x_3 + v\ ,$$

其中 v 为新输入. (x_1, x_3) 子系统成为

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ -\sin x_1 - x_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}v \triangleq f_1(x_1, x_3) + g_1 v\ . \tag{4}$$

此时 $L_{f_1}V(x_1, x_3) < 0$, $\forall x_3 \neq 0$ 成立,满足定理1的H1,可考虑继续迭代设计.

第2步 考察系统

$$\dot{z}_2 = \sin x_1,\ \begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_3\end{pmatrix} = f_1(x_1, x_3) + g_1 v\ .$$

寻找函数 $M_1(x_1, x_3)$ 使之满足 $L_{f_1}M_1(x_1, x_3) = \sin x_1$,即求解偏微分方程

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_1}x_3 - \frac{\partial M_1}{\partial x_3}(\sin x_1 + x_3) = \sin x_1,$$

得到 $M_1 = -x_1 - x_3$. 运用定理1,设计 v 为

$$v = -L_{g_1}V + (z_2 - M_1)L_{g_1}M_1 = -z_2 - x_1 - 2x_3.$$

令 $v = -z_2 - x_1 - 2x_3 + \bar{v}$,则 (z_2, x_1, x_3) 子系统成为

$$\begin{pmatrix}\dot{z}_2\\ \dot{x}_1\\ \dot{x}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin x_1\\ x_3\\ -z_2 - x_1 - \sin x_1 - 3x_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\bar{v} \triangleq f_2(z_2, x_1, x_3) + g_1(z_2, x_1, x_3)\bar{v}\ . \tag{5}$$

设置李雅普诺夫函数

$$U = (1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_3^2 + \frac{1}{2}(z_2 - M_1)^2 = (1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_3^2 + \frac{1}{2}(z_2 + x_1 + x_3)^2.$$

经计算有

$$L_{f_2}U(z_2, x_1, x_3) = -x_3^2 - (z_2 + x_1 + 2x_3)^2.$$

此时下式不成立

$$L_{f_2}U(z_2, x_1, x_3) < 0,\ \forall (z_2, x_3) \neq 0\ .$$

事实上,$-x_3^2 - (z_2 + x_1 + 2x_3)^2 = 0$ 结合状态方程只成立

$$\dot{z}_2 = \sin x_1,\ -\sin x_1 = 0,\ z_2 + x_1 = 0\ ,$$

由此不能必然推出 $z_2 = 0$.

定理1的H1不成立,继续迭代受阻. 然而,如果令 $\bar{v} = x_1 - x_3 + \tilde{v}$,方程(5)成为

$$\begin{pmatrix}\dot{z}_2\\ \dot{x}_1\\ \dot{x}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin x_1\\ x_3\\ -\sin x_1 - z_2 - 2x_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\tilde{v} \triangleq \tilde{f}_2(z_2, x_1, x_3) + \tilde{g}_2(z_2, x_1, x_3)\tilde{v}\ . \tag{6}$$

定义李雅普诺夫函数

$$\tilde{U} = (1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_3^2 + \frac{1}{2}(z_2 + x_3)^2.$$

计算得到

$$L_{\tilde{f}_2}\tilde{U}(z_2, x_1, x_3) = -(z_2 + 2x_3)^2,$$

可验证 $L_{\tilde{f}_2}\tilde{U}(z_2, x_1, x_3) < 0$, $\forall (z_2 + x_3) \neq 0$. 事实上,只需验证

$$z_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow z_2 = 0,\ x_3 = 0.$$

而这是成立的,因为

$$\dot{z}_2 = \sin x_1,\ \dot{x}_1 = x_3,$$

$$\dot{x}_3 = -\sin x_1,\ z_2 + 2x_3 = 0.$$

既然定理 1 的 H1 成立,可考虑继续迭代设计.

第 3 步　再次加进积分器,考察惯性盘倒立摆方程

$$\dot{z}_1 = z_2,$$

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \tilde{f}_2(z_2, x_1, x_3) + \tilde{g}_2(z_2, x_1, x_3)\tilde{v}.$$

求解 $L_{\tilde{f}_2}M_2(z_2, x_1, x_3) = z_2$,得到 $M_2 = -z_2 - 2x_1 - x_3$. 根据定理 1,取

$$\tilde{v} = -L_{\tilde{g}_2}\tilde{U} + (z_1 - M_2)L_{\tilde{g}_2}M_2 = -z_1 - 2z_2 - 2x_1 - 3x_3.$$

略作计算知道系统(3)的完整的部分变量镇定控制为

$$u = -z_1 - 3z_2 - 2x_1 - \sin x_1 - 7x_3. \tag{7}$$

该控制律使 $(z_2, x_3, z_1 + 2x_1) = (0, 0, 0)$ 全局渐近稳定.

注　考察系统(4),有"$L_{f_1}V(x_1, x_3) < 0, \forall x_3 \neq 0$"而不是"$L_{f_1}V(x_1, x_3) < 0, \forall (x_1, x_3) \neq 0$";考察系统(6),成立 $L_{\tilde{f}_2}\tilde{U}(z_2, x_1, x_3) < 0$, $\forall (z_2, x_3) \neq 0$ 而不是 $L_{\tilde{f}_2}\tilde{U}(z_2, x_1, x_3) < 0\ \forall (z_2, x_1, x_3) \neq 0$. 它们表明,定理 1 的 H1 比文献[1] Proposition 1 的 A.1 更容易满足,从部分变量稳定的角度研究惯性盘倒立摆的镇定更为合理.

李雅普诺夫函数 $\tilde{U}$ 来源于文献[1],为了得到该函数,文献[1]运用了一个远比定理 1 复杂的结论——该文 Proposition 1. 但是,仔细推算可发现,如此确定的李雅普诺夫函数 $\tilde{U}$ 并不能使相应的子系统满足 Proposition 1 的 A.1. 有趣的是,我们借助 $\tilde{U}$ 并辅以简单的变量替换 $\bar{v} = x_1 - x_3 + \tilde{v}$,不仅使系统(6)满足了定理 1 的 H1,也方便了下一步顺利求解相应的偏微分方程.

值得指出,本文最终的设计与文献[1]的相应设计基本一致,但是,因为从部分变量镇定的角度考虑问题,不必如文献[1]一样处理复杂的偏微分方程,而是每次迭代都求解一个形式相同的简单偏微分方程. 另外,稍作分析可发现,我们的每次迭代都使得相应子系统为部分变量全局渐近稳定.

4　其它稳定性讨论及仿真(Other stability discussion and simulation)

下面揭示,本文的设计的确为部分变量镇定,而且闭环还具有局部渐近稳定性.

在控制(7)的作用下,系统(3)成为

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = \sin x_1, \\ \dot{x}_1 = x_3, \\ \dot{x}_3 = -z_1 - 3z_2 - 2x_1 - \sin x_1 - 7x_3. \end{cases} \tag{8}$$

结合上节的设计,由定理 1 可知 $z_1 + 2x_1 = 0$ 全局渐近稳定. 下面指出,x_1, z_1 不会全局收敛到原点.

首先,参见定理 1 的证明可知,整个设计实际上根据下面的李雅普诺夫函数得到:

$$W = U + \frac{1}{2}(z_1 - M_2)^2 = (1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_3^2 + \frac{1}{2}(z_2 + x_3)^2 + \frac{1}{2}(z_1 + z_2 + 2x_1 + x_3)^2.$$

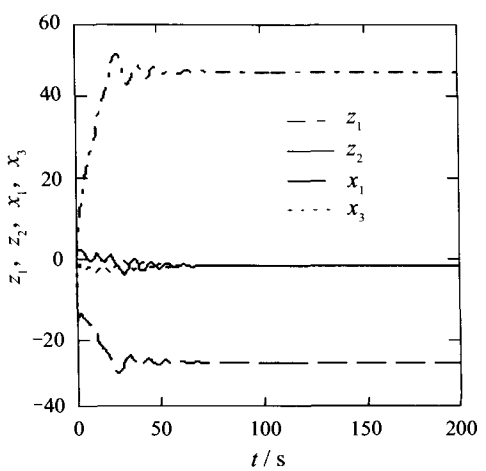
容易验证 W 局部正定,该函数沿着(8)的时间微分为

$$\dot{W} = -(z_2 + 2x^3)^2 - (z_1 + 2z_2 + 2x_1 + 3x_3)^2.$$

由拉萨尔不变集原理可知系统(8)的原点局部渐近稳定.

其次,将系统(8)的平衡点 $(z_1, z_2, x_1, x_3) = (\pm 4n\pi, 0, \mp 2n\pi, 0)$, $n \in \mathbb{R}$ 平移到原点,系统方程不变,即 $(z_1, z_2, x_1, x_3) = (\pm 4n\pi, 0, \mp 2n\pi, 0)$, $n \in \mathbb{R}$ 也是局部渐近稳定平衡点.

通过仿真,下面直观说明闭环的部分变量全局渐近稳定性、吸引子 $z_1 + 2x_1 = 0$ 的存在性以及局部渐近稳定性. 图 1 显示初值为(3,5, -12, -13)时闭环系统(8)的部分变量全局渐近稳定;图 2 显示初值为(0.3,0.5, -0.2,0.7)时的局部渐近稳定.



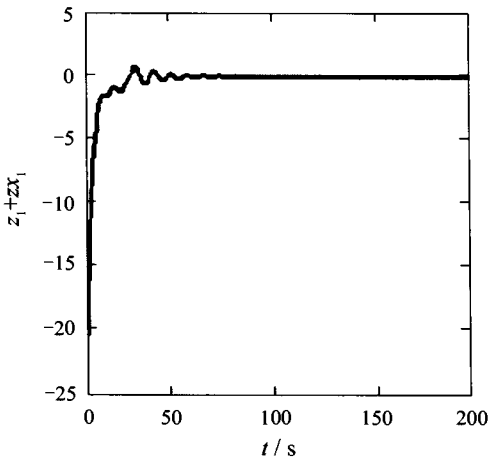


图 1 部分变量稳定

Fig. 1 Stability with respect to partial states

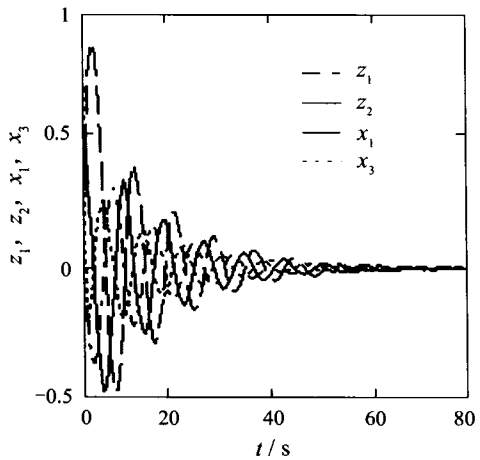


图 2 局部渐近稳定

Fig. 2 Local asymptotical stability

选取更多不同的初值进行仿真,结果表明$(z_2, x_3) = (0, 0)$全局渐近稳定,$(z_1, x_1) = (0, 0)$只是局部渐近稳定,初值较大时(z_1, x_1)收敛为$(\pm 4n\pi, \mp 2n\pi)$,n为正负整数,即$z_1 + 2x_1$总是收敛为零.

5 结论(Conclusion)

本文研究惯性盘倒立摆的镇定问题,采用文献[1]中的Lyapunov前推方法,但着眼于部分变量镇定.因此,不必如文献[1]一样处理复杂的偏微分方程,而是根据定理1以统一方式完成设计,即每次迭代时求解一个形式相同的简单偏微分方程.

简言之,本文的主要贡献在于,从部分变量稳定的角度给出了惯性盘倒立摆的前推设计,并通过理论和仿真揭示,最终的闭环为部分变量全局渐近稳定,其余变量收敛为非零常值,且在一个全局渐近稳定的不变流形上演化.

参考文献(References):

[1] PRALY L, ORTEGA R, KALIORA G. Stabilization of nonlinear systems via forwarding mod $\{L_g V\}$ [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2001, 46(9): 1461 - 1466.

[2] 梅凤翔,史荣昌,张永发,等. 约束力学系统的运动稳定性[M]. 北京:北京理工大学出版社, 1997.
(MEI Fengxiang, SHI Rongchang, ZHANG Yongfa, et al. *Motion Stability of Constrained Mechanical Systems* [M]. Beijing: Publishing House of Beijing Institute of Technology, 1997.)

作者简介:

叶华文 (1968—),男,2004年博士后出站,现在中南大学信息与工程学院工作,主要研究机电系统的稳定控制,E-mail: yehuawen2001@yahoo.com.cn;

戴冠中 (1937—),男,教授,研究领域:大系统理论、非线性控制、智能控制和信息安全;

康剑灵 (1972—),女,副教授,研究领域:微分几何理论及应用、非线性系统的几何理论等.