文章编号: 1000-8152(2006)03-0471-04

一种改进的混沌优化算法

费春国, 韩正之
(上海交通大学 自动化系, 上海 200030)

摘要: 为了克服遗传算法的早熟现象以及混沌优化的搜索时间过长的缺点,将遗传算法、混沌优化和变尺度方法相结合,提出了一种改进的混沌优化算法. 该算法利用混沌的随机性、遍历性和规律性来避免陷入局部极小值,从而也克服了遗传算法中的早熟现象,同时引入了变尺度方法提高该算法的搜索速度. 本文还给出了算法的收敛性分析. 对典型测试函数的仿真结果表明此算法优于变尺度混沌优化和遗传算法.

关键词: 混沌优化; 遗传算法; 优化方法; 变尺度

中图分类号: TP18　　**文献标识码**: A

An improved chaotic optimization algorithm

FEI Chun-guo, HAN Zheng-zhi
(Department of Automation, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China)

Abstract: To overcome premature convergence of genetic algorithm (GA) and long search time of chaotic optimization, an improved chaotic optimization algorithm (ICOA) is proposed by combining GA, chaotic optimization and mutative scale method. This algorithm uses chaotic characteristics-randomness, ergodicity and regularity to avoid trapping around local optima. It can overcome premature convergence of GA. At the same time, mutative scale method is introduced into the algorithm to improve search speed. The convergence analysis of algorithm is also given. Finally, the proposed algorithm is applied to solve some complex benchmark functions, and the simulations show the proposed algorithm can provide better performance than mutative scale chaotic algorithm and GA.

Key words: chaotic optimization; genetic algorithms; optimization method; mutative scale method

1　引言(Introduction)

近年来许多学者对混沌和遗传算法(GA)的结合进行了研究. 文献[1]把混沌变量加载于GA的变量群体中,利用混沌变量对子代群体进行微小扰动,并随着搜索过程的进行逐渐调整扰动幅度来实现优化. 文献[2]采用帐篷映射生成的序列经简单映射后利用高斯函数来决定交叉位置,然后用logistic产生的序列对种群进行变异. 文献[3, 4]先用GA得到适应值较大的部分个体,然后在这些个体的邻域内进行混沌优化或变尺度混沌优化. 本文在文献[5]的基础上,加入了GA的选择、交换和变异算子,以及变尺度思想,提出了一种改进的混沌优化算法(improved chaotic optimization algorithm, ICOA).

2　算法的提出(Proposition of algorithm)

2.1　算法描述(Description of algorithm)

优化问题的数学模型为

$$\min f(z),\ \text{s.t.}\ z \in T, \tag{1}$$

其中T是使(1)成立的所有解的集合. ICOA的基本步骤如下:

步骤1　根据不同的约束条件选择不同的混沌函数. 如果$z \in [a, b]$,选择$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n)$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 4$,目标函数变为$f(X)$, $X = a + x(b - a)$. 如果$z \in [-a, a]$,选择$x_{n+1} = \lambda x_n^3 - \lambda x_n + x_n$, $1 \leqslant \lambda \leqslant 4$, 目标函数变为$f(X)$, $X = ax$.

步骤2　通过随机的方法产生一组初始种群$x_{0i} \in [0, 1]$或$[-1, 1]$, $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 计算其性能指标$f(X_{0i})$,其中$X_{0i} = a + x_{0i}(b - a)$或$X_{0i} = ax_{0i}$, n为种群数.

步骤3　根据所选的混沌方程在原有解x_{0i}的基础上产生一组新的种群$x_i \in [0, 1]$或$[-1, 1]$, $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 计算其相应的性能指标$f(X_i)$,其中$X_i = a + x_i(b - a)$或$X_i = ax_i$.

步骤4　如果$f(X_i) < f(X_{0i})$,则根据GA的复制运算接受新解$X_{0i} = X_i$.

收稿日期: 2004-03-05; 收修改稿日期: 2005-11-28.

步骤 5 根据 GA 中的交换运算，随机地对新种群中的部分解按概率 p_c 进行交换.

步骤 6 根据 GA 中的变异运算，随机地对新种群中的部分解按概率 p_m 进行替换. 经过4 ~ 6 步得到种群 X_{1i}，映射到混沌变量区间后得 $x_{1i} \in [0, 1]$ 或 $[-1, 1]$，$(i = 1, 2, \cdots, n)$.

步骤 7 如果 $f(X_{1i}) < f(X_{0i})$，则接受新解 $X_{0i} = X_{1i}, x_{0i} = x_{1i}$. 种群 X_{0i} 中将保持性能指标较好的种群，从中找出性能最好的个体记作 X_c. 然后转到步骤3. 如果 X_c 在规定的迭代的次数 m 里没有满足指定的误差要求搜索条件，则进行步骤8，否则结束.

步骤 8 以上一步搜索结果 X_c 为中心，以 r/δ 为半径，r 为前一步的搜索半径，δ 为衰减因子. 以 $x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n)$ 或 $x_{n+1} = \lambda x_n^3 - \lambda x_n + x_n$ 为搜索函数. 重复步骤3 ~ 7 在缩小后的范围内进行细搜索. 其搜索范围为 $[X_c - r/\delta, X_c + r/\delta]$.

步骤 9 如果在指定的迭代次数里不满足误差要求条件，将继续以 r/δ 进一步缩小搜索范围. 重复步骤3 ~ 7 继续搜索. 如果满足误差要求条件时结束. 最终所得到的 X_c 和 $f(X_c)$ 为全局最优.

2.2 算法说明(Explanation of algorithm)

传统的混沌优化算法[5]既能克服早熟收敛，保证搜索到全局最优值，又能保证搜索速度，使算法具有良好的性能. 本文在传统的混沌优化算法基础上，在步骤4 ~6 加入 GA 的选择、交换和变异等操作. 这些操作能够进行启发式搜索，同时算法具有隐含并行性，可以在只搜索局部解空间的情况下，得到局部最优或全局最优. 因此提高了原有算法的收敛速度.

当空间较大时，遍历时间较长，而且不易搜索到全局最优值，但是很容易找到比较好的次优解. 当 m 设得合适时，次优解一般是比较靠近全局最优解的，这时在以次优解为中心，减小搜索半径，进一步在小范围内进行搜索，可以加快搜索速度. 基于上述思想，应用变尺度的思想，在步骤8 以上一步得到的次优解为中心，以 r/δ 速度缩小搜索空间，实现在小范围内的搜索的同时，保证了全局最优解在其搜索范围内. 通过大范围的粗搜索可以找到较好的次优解，进一步通过小范围的细搜索就可以找到全局最优解了.

参数 n, m 和 δ 的设置方法可以借鉴 GA 等演化算法，如：1) 试验法，2) 二级优化算法，3) 凑试法. 其中凑试法是最常用的一种方法，它是根据经验来凑试算法的参数，然后，通过多执行算法来获得问题的最优或次优解.

在采用凑试法时，可以遵循下面的原则：如果搜索空间比较大，则 n 应取得比较大一些，来减少搜索时间，反之可以取得小一些. 因此，n 的选择应与搜索空间成正比. m 不易取得过小，当 m 取得过小，同时 δ 取得过大时，在搜索范围缩小以后，将使得全局最优解不在搜索范围内，从而使得最终陷入局部最优. 如果 m 取得过大，将会使得搜索速度变慢. 同样 δ 取得太小，也会使搜索速度变慢，太大会陷入局部最优. 所以，m 的选择应与 δ 选择成正比.

3 收敛性分析(Analysis of convergence)

从 ICOA 中可以看出，初始种群的产生的过程是一个随机过程. 每一次新的种群的产生只与前一次的种群有关，种群所处的状态为离散状态，并且是在有限的范围 N 内，因此这个过程可以用有限的 Markov 链来描述.

定理 1 ICOA 所产生的每一代种群组成的 Markov 链是齐次的.

证 新的种群的产生只与前种群有关，即转移概率只与种群状态有关，而与时刻 n 无关. 因此

$$P_{ij} = P\{X_{n+1} = j \mid X_n = j\}, \tag{2}$$

所以是齐次 Markov 链. 证毕.

转移矩阵 P 可以分解为 C, M, S 和 T 的乘积，C, M, S 和 T 分别表示交换、变异、选择和混沌算子所引起的状态转移矩阵.

定理 2 ICOA 的转移矩阵 $P = TSCMS$ 是正矩阵.

证 对于转移矩阵 T，每一个状态都是根据上一个状态由特定的混沌方程所产生的. 因此，对于任意的 $i, j \in N$，状态 i 经混沌后成为 j 的概率为 $t_{ij} = \begin{cases} 1, & j = i + 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，$t_{ij}$ 是混沌转移概率. 由文献[6]中的定义4. 3，定义4. 4 和定义4. 5 知 T 是随机的，也是列允许的.

对于转移矩阵 S，在被选择的两代种群中，只有具有较好适应度的个体才能被选中，从而保留在新产生种群中，而另一个将被舍弃，因此对于任意的 $i, j \in N$，状态 i 经选择后成为 j 的概率为 $s_{ij} = \begin{cases} 0.5, & j = i, i + 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，$s_{ij}$ 为选择转移概率，所以 S 也是随机和列允许的.

对于交换矩阵 C，任意的 $i, j \in N$，状态 i 经交换后成为 j 的概率为 $c_{ij} = \begin{cases} p_c^a(1 - p_c)^{n-a}, & j = i + 1, \\ 1 - p_c^a(1 - p_c)^{n-a}, & \text{其他}, \end{cases}$

a 为交换的位数. 因此 C 是随机和列允许的.

对于变异矩阵 M,任意的 $i, j \in N$,状态 i 经变异后成为 j 的概率为 $m_{ij} = \begin{cases} p_m^b(1-p_m)^{n-b}, & j = i+1, \\ 1 - p_m^b(1-p_m)^{n-b}, & \text{其他}, \end{cases}$ b 为变异个数. 因此 M 是随机和列允许的.

因为 C, M, S 是随机矩阵,且 M 是正的,S 是列允许的,所以由文献[6]中的引理4.1可得 $A = CMS$ 是正的. 设 $B = SA$,因为 S 是随机的,则 S 的每一行中至少存在一个正数. 所以对于任意的 $i, j \in N$,有 $b_{ij} = \sum_{k=1}^{N} s_{ik}a_{kj} > 0$,即 $B > 0$,B 为正. 令 $P = TB = TSCMS$,因为 T 也是随机的,同理 $P = TSCMS > 0$,即 $P = TSCMS$ 为正矩阵.　　证毕.

根据定理1,定理2和文献[6]中的定理4.2可知ICOA是一个遍历的齐次的Markov链. 由遍历的定义可知,从任意的状态出发,经过充分大的转移步数后,到达另一个状态的概率为非零 p,即对于任意的初始状态,Markov链中的任意状态都存在一个大于零的极限分布. 当迭代次数充分大的时候,搜索能遍历整个状态空间. 又由于每一次迭代后都保留历史最优解,因此必存在使性能指标最优的点 x^*,当转移步数 m 足够大时,无论初始状态如何,必存在 $\lim_{m\to\infty} p(f(x^*)) = 1$,因此ICOA是全局渐进收敛.

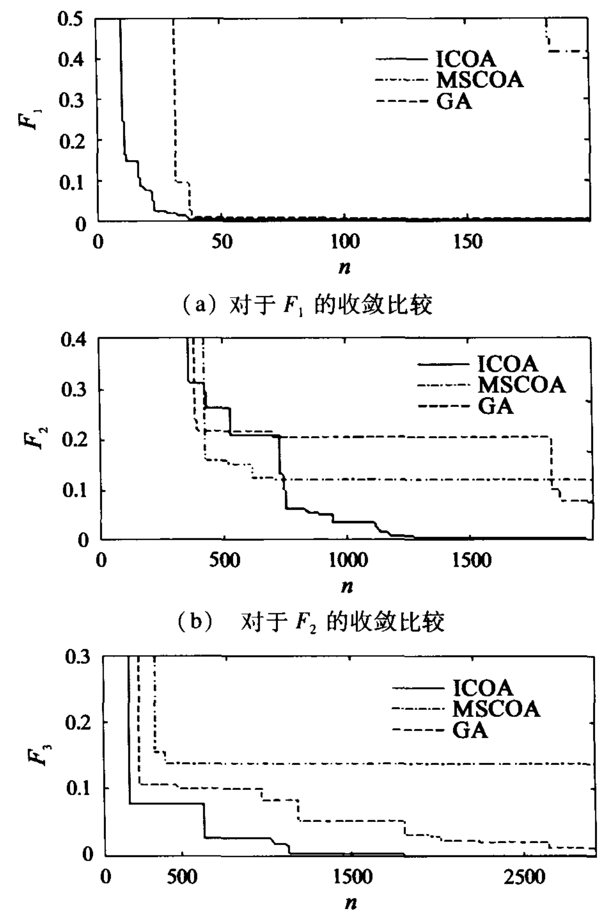
4 仿真结果和讨论(Simulation results and discussion)

下面用一些比较复杂的典型测试函数对ICOA进行仿真研究,同时与变尺度混沌优化(MSCOA)[7]和GA进行比较. 为了避免初始值对算法效果的影响,随机在搜索空间中取100个初始值,然后分别用上述三种算法对每个典型测试方程进行求解,仿真结果记入表1,图1给出了相应的算法收敛图.

表 1　典型测试函数的仿真结果

Table 1　Simulation results of benchmark functions

算法	性能指标	F_1	F_2	F_3
ICOA	最小迭代步数	70	968	2000
	最大迭代步数	157	2309	4505
	平均迭代步数	114	1468.2	3411.2
	收敛到全局最优的次数	100	100	100
	找到的最小最优值	4.61×10^{-6}	6.01×10^{-6}	8.02×10^{-6}
	找到的最大最优值	3.98×10^{-5}	3.96×10^{-5}	3.98×10^{-5}
MSCOA	收敛到全局最优的次数	0	0	0
	找到的最小局部最优值	0.0769	0.0214	0.7482
GA	收敛到全局最优的次数	0	0	0
	找到的最小局部最优值	0.0003	0.0024	0.0137



(a) 对于 F_1 的收敛比较

(b) 对于 F_2 的收敛比较

(c) 对于 F_3 的收敛比较

图 1　对 F_1, F_2, F_3 的3种算法局部收敛比较

Fig. 1　Comparison of local convergence on F_1, F_2, F_3 by three algorithms

1) Schwefel 函数:

$$F_1 = \sum_{i=1}^{3} |x_i| + \prod_{i=1}^{3} |x_i|, \quad -10 \leqslant x_i \leqslant 10, \tag{3}$$

F_1 在点(0, 0, 0)有全局最小值0. 参数设为:$n = 10$; $r = 10$; $m = 5$; $\delta = 10$; $P_c = 0.5$; $P_m = 0.2$.

2) Colville 函数:

$$F_2 = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 + 90(x_4 - x_3^2)^2 + (1 - x_3)^2 + 10.1((x_2 - 1)^2 + (x_4 - 1)^2) + 19.8(x_2 - 1)(x_4 - 1), \quad -10 \leqslant x_i \leqslant 10, \tag{4}$$

F_2 在点(1, 1,1, 1) 有全局最小值0. 参数设为:$n = 150$;$r = 10$;$m = 80$;$\delta = 3$;$P_c = 0.5$;$P_m = 0.2$.

3) Rosenbrock 函数:

$$F_3 = \sum_{i=1}^{4}[100(x_i^2 - x_{i+1})^2 + (1 - x_i)^2],$$
$$-10 \leqslant x_i \leqslant 10, \tag{5}$$

F_3 在点(1, 1, 1, 1, 1) 有全局最小值为0. 参数设为:$n = 300$;$r = 10$;$m = 200$;$\delta = 3$;$P_c = 0.5$;$P_m = 0.2$.

选择 $x_{n+1} = \lambda x_n^3 - \lambda x_n + x_n(\lambda = 4)$ 作为混沌方程,当 $F < 4 \times 10^{-5}$ 时认为找到了全局最优值. 从表1和图1中可以看出,对于100个不同的初始值,ICOA均可得到全局最优解. 并且收敛速度比较快,精度比较高. 在与ICOA相同参数设置下,MSCOA和GA均不能找到全局最优值. 通过上述的比较可知,ICOA在收敛速度和精度等方面均优于MSCOA和GA.

5 结束语(Conclusion)

本文将将GA、混沌优化和变尺度相结合提出了ICOA. 混沌优化由于混沌的遍历性,因此更容易跳出局部最优解,成为一种很好的搜索机制. GA因为其隐含并行性,及启发式搜索性质,因此具有很强的搜索能力. 本文将这两种算法有效的结合了起来,充分的发挥了它们的优越性,仿真表明,此算法优于MSCOA和GA.

参考文献(References):

[1] 姚俊峰,梅炽,彭小奇. 混沌遗传算法(CGA)的应用研究及其优化效率评价[J]. 自动化学报, 2002, 28(6): 935 - 943.
(YAO Junfeng, MEI Chi, PENG Xiaoqi. The application research of the chaos genetic algorithm (CGA) and its evaluation of optimization efficiency[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2002, 28(6): 935 - 943.)

[2] 杨宇明,李传东. 混沌在遗传算法中的应用[J]. 计算机工程与应用, 2004, 140(5): 76 - 77.
(YANG Yuming, LI Chuandong. Chaos in genetic algorithm[J]. *Computer Engineering and Applications*, 2004, 140(5): 76 - 77.)

[3] 雷德明. 利用混沌搜索全局最优解的一种混合遗传算法[J]. 系统工程与电子技术, 1999, 21(12): 81 - 82.
(LEI Deming. A hybrid genetic algorithm using chaos for globally optimal solution[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 1999, 21(12): 81 - 82.)

[4] 李亚东,李少远. 一种新的遗传混沌优化组合方法[J]. 控制理论与应用, 2002, 19(1): 143 - 145.
(LI Yadong, LI Shaoyuan. A new genetic chaos optimization combination method[J]. *Control Theory & Applications*, 2002, 19(1): 143 - 145.)

[5] 李兵,蒋慰孙. 混沌优化方法及其应用[J]. 控制理论与应用, 1997, 14(4): 613 - 615.
(LI Bing, JIANG Weisun. Chaos optimization method and its application[J]. *Control Theory & Applications*, 1997, 14(4): 613 - 615.)

[6] 潘正君,康立山,陈毓屏. 演化计算[M]. 北京:清华大学出版社, 1998.
(PAN Zhengjun, KANG Lishan, CHEN Yuping. *Evolutionary Computation* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1998.)

[7] 张彤,王宏伟,王子才. 变尺度混沌优化方法及应用[J]. 控制与决策, 1999, 14(3): 285 - 288.
(ZHANG Tong, WANG Hongwei, WANG Zicai. Mutative scale chaos optimization algorithm and its application [J]. *Control and Decision*, 1999, 14(3): 285 - 288.)

作者简介:

费春国 (1974—),男,现为上海交通大学控制科学与工程专业博士生,主要研究方向为智能优化和神经网络, E-mail: chunguo@eyou.com;

韩正之 (1947—),男,1988年获博士学位,现为上海交通大学教授,博士生导师,主要研究方向为非线性控制系统理论,计算机控制系统和智能控制理论.