

基于单位分解的一类非线性不确定系统跟踪控制设计

王银河¹, 张嗣瀛²

(1. 广东工业大学 自动化学院, 广东 广州 510090; 2. 东北大学 自动化系, 辽宁 沈阳 110006)

摘要: 利用单位分解在紧致域上能够以任意给定精度逼近连续函数的性质, 针对一类不确定非线性系统设计了带有自适应律的鲁棒自适应跟踪控制器. 结果表明这种控制器可以使输出跟踪误差渐近收敛到零点的一个小邻域内, 并保证闭环系统的所有状态一致有界. 最后的仿真实例说明了该方法的有效性.

关键词: 单位分解; 逼近定理; 自适应跟踪控制

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Tracking control synthesis for a class of uncertain nonlinear systems based on partition of unity

WANG Yin-he¹, ZHANG Si-ying²

(1. Faculty of Automation, Guangdong University of Technology, Guangzhou Guangdong 510090, China;

2. Department of Automatic Control, Northeastern University, Shenyang Liaoning 110006, China)

Abstract: By utilizing the property that partition of unity can approximate any continuous function on the compact set at arbitrary precision, the robust tracking controllers with adaptive laws are designed for a class of uncertain nonlinear systems. The results show that the tracking errors converge to a small neighborhood of zero and all states in the closed-loop system are bounded via the controllers. Finally, the simulations show the validity of the method adopted in this paper.

Key words: partition of unity; approximation theorem; adaptive tracking control

1 引言 (Introduction)

在控制设计中经常采用自适应控制方法来克服系统的某些不确定性和非线性^[1~3]. 近来, 针对带有已知不确定性线性结构及未知结构常参数的情形, 许多文献讨论了该类系统的鲁棒自适应控制设计问题^[1~7]. 这些文献所讨论系统模型的一个重要假定是其不确定性为某些基函数(比如有理函数、样条函数和高斯函数等)的线性组合. 值得注意的是带有未知不确定性的情形也有类似的讨论, 在这些讨论中, 不确定性的上界被假定为某些基函数的线性组合或称“生长条件”^[8~11]. 由于实际系统的不确定性经常表现为很强的非线性性, 所以用某些基函数的线性组合表示它及其上界有时是不合适的. 另外, 我们也注意到能描述所有不确定性的通用函数是不存在的. 在这种形势下, 采用在某个紧致域上利用合适的函数进行带有误差的逼近描述可能是一个可行的方法. 利用不同的逼近定理衍生出对不确定性的各种逼近方式并完成相应的控制设计对控制理论的发展是有益的.

本文是文 [12] 中有关单位分解逼近理论在控制领域的一个直接应用, 基本思路是: 首先利用单位分解的某些线性组合去逼近系统的不确定性^[12], 使之近似参数化后再设计系统的鲁棒跟踪控制器和自适应律. 结果表明, 基于单位分解设计系统的自适应鲁棒跟踪控制器是非常有效的一个方法.

2 系统描述 (System description)

考虑如下具有不确定性的单输入-单输出非线性控制系统

$$y^{(n)} = f(x) + g(x)u + \xi(x, u, t). \quad (1)$$

其中: 状态 $x = (y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})^T \in \mathbb{R}^n$; 系统的输出 $y \in \mathbb{R}$; 系统的输入 $u \in \mathbb{R}$; $f(\cdot), g(\cdot)$ 是未知的连续函数; 对 $x \in \mathbb{R}^n$, $g(x) \neq 0$; $\xi = \xi(x, u, t)$ 是系统的干扰.

笔者的任务是, 利用单位分解的逼近性质设计具有自适应律的鲁棒控制器, 使闭环系统的所有变量一致有界, 输出 y 与有界参考信号 y_m 的跟踪误差 $e = e(t) = y - y_m$ 渐近地收敛到零点的一个小

邻域内.

记误差向量 $\bar{e} = (e, \dot{e}, \dots, e^{(n-1)})^T$, 参考信号向量 $\bar{y}_m = (y_m, \dot{y}_m, \dots, y_m^{(n-1)})^T$. 引进记号

$$v(t) = y_m^{(n)} - \lambda_n e^{(n-1)} - \dots - \lambda_1 e. \quad (2)$$

其中 $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 使多项式 $s^n + \lambda_n s^{n-1} + \dots + \lambda_1$ 为 Hurwitz 多项式.

引入过滤误差

$$e_r(t) = \gamma_n e^{(n-1)} + \gamma_{n-1} e^{(n-2)} + \dots + \gamma_1 e. \quad (3)$$

其中 $\gamma_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 使多项式 $s^n + \gamma_n s^{n-1} + \dots + \gamma_1$ 为 Hurwitz 多项式.

引入下面两个算子多项式:

$$H(D) = D^n + \lambda_n D^{n-1} + \dots + \lambda_1, \quad (4)$$

$$\bar{H}(D) = \gamma_n D^{n-1} + \gamma_{n-1} D^{n-2} + \dots + \gamma_1, \quad (5)$$

其中 $D = \frac{d}{dt}$.

假定 1 可以找到常数 $k_d > 0$ 使算子多项式 (4) 与 (5) 满足下列条件:

$$\bar{H}(D) H^{-1}(D) = \frac{1}{D + k_d}. \quad (6)$$

引入下列集合^[13]:

$$\begin{aligned} A_d^c &= \{x \mid \|x - x_0\|_{p, \pi} \leq c\}, \\ A &= \{x \mid \|x - x_0\|_{p, \pi} \leq c + \phi\}, \\ \|x\|_{p, \pi} &= \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\frac{|x_i|}{\pi_i} \right)^p \right\}^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \quad (7)$$

其中: c, ϕ 是正常数, x_0 固定集合在系统 (1) 状态空间的位置. $\|x\|_{p, \pi}$ 是具有权值 $\{\pi_i\}_{i=1}^n$ 的 p -范数.

设 $f_0(x), g_0(x)$ 分别是 $f(x), g(x)$ 的标称值. 利用单位分解逼近定理^[12], 设

$$\begin{cases} f(x) - f_0(x) = F_1(x) + \varepsilon_1(x), \\ g(x) - g_0(x) = F_2(x) + \varepsilon_2(x). \end{cases} \quad (8)$$

其中: $F_1(x) = p^T \Lambda(x) = \sum_{i=1}^{N_1} q_i \alpha_i(x)$, $F_2(x) = q^T B(x) = \sum_{j=1}^{N_2} q_j \beta_j(x)$; $\{\alpha_i\}, \{\beta_j\}$ 分别是隶属 A 的两组开覆盖 $\{U_i\}, \{V_j\}$ 的单位分解.

对于任意给定的正数 $\varepsilon_f, \varepsilon_g$ (不必很小), 可以假定

$$\sup_{x \in A} |\varepsilon_1(x)| \leq \varepsilon_f, \sup_{x \in A} |\varepsilon_2(x)| \leq \varepsilon_g. \quad (9)$$

假定 2 1) $|f(x) - f_0(x)| \leq a(x), |g(x) - g_0(x)| \leq b(x), g_0(x) > 0$;

2) $|g(x)| \geq \delta(x) > 0$;

3) $|\xi(x, u, t)| \leq d(x)$.

其中: $x \in \mathbb{R}^n, \delta(x), a(x), b(x), d(x)$ 是已知的非负连续函数.

记 $\hat{p} = \hat{p}(t), \hat{q} = \hat{q}(t)$ 分别是式 (8) 中参数向量 p, q 的估计向量; $\hat{\varepsilon}_f = \hat{\varepsilon}_f(t), \hat{\varepsilon}_g = \hat{\varepsilon}_g(t)$ 分别是 $\varepsilon_f, \varepsilon_g$ 的估计值. 估计误差 $\tilde{p} = \hat{p} - p, \tilde{q} = \hat{q} - q, \tilde{\varepsilon}_f = \hat{\varepsilon}_f - \varepsilon_f, \tilde{\varepsilon}_g = \hat{\varepsilon}_g - \varepsilon_g$.

引入下列符号:

$$\begin{cases} \hat{f}(x) = f_0(x) + \hat{p}^T \Lambda(x), \\ \hat{g}(x) = g_0(x) + \hat{q}^T B(x). \end{cases} \quad (10)$$

记 $\tilde{f}(x) = \hat{f}(x) - f(x), \tilde{g}(x) = \hat{g}(x) - g(x)$, 则由式 (8)~(10), 有

$$\begin{cases} \tilde{f}(x) = \tilde{p}^T \Lambda(x) - \varepsilon_1(x), \\ \tilde{g}(x) = \tilde{q}^T B(x) - \varepsilon_2(x). \end{cases} \quad (11)$$

3 跟踪控制设计 (Design of tracking controller)

引入下列函数^[14]

$$\begin{aligned} m &= m(t) = \max \left\{ 0, \text{sat} \left(\frac{\|x - x_0\|_{p, \pi} - c}{\phi} \right) \right\}, \\ e_{r\Delta} &= e_{r\Delta}(t) = e_r(t) - \varphi \text{sat} \left(\frac{e_r(t)}{\varphi} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

其中 ϕ, φ 分别是边界层和死零区的宽度. 饱和函数 $\text{sat}(\omega)$ 由下式定义

$$\text{sat}(\omega) = \begin{cases} -1, & \omega < -1, \\ \omega, & |\omega| \leq 1, \\ 1, & \omega > 1. \end{cases} \quad (13)$$

对于系统 (1), 提出下列鲁棒控制器和自适应律

$$u = u^a + \frac{1}{\delta(x)} u^b. \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned} u^a &= \frac{1}{\Omega} [-\hat{f}(x) + v(t) + k_d \varphi \text{sat}(e_r/\varphi) + \\ &\quad m \hat{p}^T \Lambda(x)], \\ u^b &= -\{m[a(x) + (b(x) + \|\hat{q}\|)|u^a|] + d(x) + \\ &\quad (1-m)[|\hat{\varepsilon}_f| + (|\hat{\varepsilon}_g| + \|\hat{q}\|)|u^a|]\} \text{sgn } e_r. \end{aligned} \quad (15)$$

其中 $\Omega = \|\hat{q}\| + g_0(x) + (1-m)\hat{q}^T B(x)$. $\hat{p}, \hat{q}, \hat{\varepsilon}_f, \hat{\varepsilon}_g$ 由下列自适应律确定:

$$\dot{\hat{p}} = (1-m)\eta_1 e_{r\Delta} \Lambda(x), \quad (17a)$$

$$\dot{\hat{q}} = (1-m)\eta_2 e_{r\Delta} B(x) u^a, \quad (17b)$$

$$\dot{\hat{\varepsilon}}_f = (1-m)\eta_3 |e_{r\Delta}|, \quad (18a)$$

$$\dot{\hat{\varepsilon}}_g = (1 - m) \eta_4 |e_{r\Delta}| |u^a|. \quad (18b)$$

其中 η_k ($k = 1, 2, 3, 4$) 为可调正常数.

注 1 1) 注意到 $g_0(x) > 0$, $\|B(x)\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{N_2} \beta_j^2} \leq 1$, $m \leq 1$, 所以控制器(15)中 $\Omega \neq 0$.

2) 如果没有特别的说明, 上面出现的范数 $\|\cdot\|$ 均指欧氏范数.

利用控制器(14), 将系统(1)改写为

$$y^{(n)} = f(x) + g(x) u^a + \frac{g(x)}{\delta(x)} u^b + \xi. \quad (19)$$

控制器(15)可以表示为

$$u^a = \frac{1}{\Gamma} \{ -\hat{f}(x) + v(t) + k_d \varphi \text{sat}(e_r/\varphi) + m[\hat{p}^T A(x) + \hat{q}^T B(x) u^a] \}. \quad (20)$$

其中 $\Gamma = \|\hat{q}\| + \hat{g}(x)$. 类似于注1, $\Gamma \neq 0$. 利用式(11)和(20), 将式(19)表示为

$$y^{(n)} = -\tilde{f}(x) - [\tilde{g}(x) + \|\hat{q}\|] u^a + \Delta + \frac{g(x)}{\delta(x)} u^b + \xi(x, u, t). \quad (21)$$

其中 $\Delta = v(t) + k_d \varphi \text{sat}(e_r/\varphi) + m[\hat{p}^T A(x) + \hat{q}^T B(x) u^a]$.

利用式(2), 算子(4), 可将(21)表示为

$$H(D) e(t) = -\tilde{f}(x) - [\tilde{g}(x) + \|\hat{q}\|] u^a + \Delta_1 + \frac{g(x)}{\delta(x)} u^b + \xi(x, u, t), \quad (22)$$

其中 $\Delta_1 = \Delta - v(t)$.

利用假定1, 式(22)及过滤误差式(3), 有

$$\begin{aligned} \dot{e}_r(t) = & -k_d e_r(t) - \hat{p}^T A(x) - \hat{q}^T B(x) u^a + \\ & \varepsilon_1(x) + [\varepsilon_2(x) - \|\hat{q}\|] u^a + \Delta_1 + \\ & \frac{g(x)}{\delta(x)} u^b + \xi(x, u, t). \end{aligned} \quad (23)$$

定理 1 考虑系统(1), 如果假定1, 2成立, 则在非线性控制器(14)和自适应律(17)(18)的共同作用下, 闭环系统的所有变量一致有界, 输出跟踪误差渐近收敛到零点的一个小邻域内.

证 考虑正定函数 $V(t) = \frac{1}{2} e_{r\Delta}^2 + \frac{1}{2\eta_1} \tilde{p}^T \tilde{p} + \frac{1}{2\eta_2} \tilde{q}^T \tilde{q} + \frac{1}{2\eta_3} \tilde{\varepsilon}_f^2 + \frac{1}{2\eta_4} \tilde{\varepsilon}_g^2$, 则 $V(t)$ 沿系统(23)与控制器(14)和自适应律(17)(18)构成的闭环系统的时间导数可以分为两种情形: 当 $|e_r| < \varphi$ 时, $e_{r\Delta} = 0$, 取自适应律(17)(18), 有 $\dot{V}(t) = 0$; 当 $|e_r| \geq \varphi$ 时, 有 $\dot{e}_{r\Delta} = \dot{e}_r(t)$, 此时

$$\dot{V}(t) = e_{r\Delta} \dot{e}_r + \frac{1}{\eta_1} \tilde{p}^T \dot{\tilde{p}} + \frac{1}{\eta_2} \tilde{q}^T \dot{\tilde{q}} +$$

$$\frac{1}{\eta_3} \tilde{\varepsilon}_f \dot{\tilde{\varepsilon}}_f + \frac{1}{\eta_4} \tilde{\varepsilon}_g \dot{\tilde{\varepsilon}}_g, \quad (24)$$

利用(23), 可以导出

$$\begin{aligned} e_{r\Delta} \dot{e}_r(t) \leq & -k_d e_{r\Delta}^2(t) - (1 - m) e_{r\Delta} [\hat{p}^T A(x) + \\ & \hat{q}^T B(x) u^a] + (1 - m) |e_{r\Delta}| [\varepsilon_f + \\ & (\varepsilon_g + \|\hat{q}\|) |u^a|] + m |e_{r\Delta}| [a(x) + \\ & (b(x) + \|\hat{q}\|) |u^a|] + \\ & |e_{r\Delta}| d(x) + \frac{g(x)}{f(x)} e_{r\Delta} u^b. \end{aligned} \quad (25)$$

将控制器式(14)代入式(25), 注意到 $\frac{g(x)}{\delta(x)} \geq 1$, 由式(24)(25)及自适应律(17)(18), 当 $|e_r| \geq \varphi$ 时, 可以得到

$$\dot{V}(t) \leq -k_d e_{r\Delta}^2(t). \quad (26)$$

由式(26)知 $V(t)$ 单减, 因此 $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t)$ 存在. 这意味着 $V(t)$ 中的所有变量有界. 进一步, 从式(25)(26)及Barbalat引理^[15]得, $e_{r\Delta}(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ 这意味着跟踪误差渐近落入下列界限内^[15]:

$$|e^{(i)}| \leq 2^i \Lambda^{i-n+1} \varphi. \quad (27)$$

证毕.

4 仿真算例 (Simulation example)

考虑下列系统

$$\begin{aligned} \ddot{y} = & 16 \frac{\sin(4\pi y)}{4\pi y} \left(\frac{\sin(\pi \dot{y})}{\pi \dot{y}} \right)^2 + \\ & (2 + \sin(3\pi(y - 0.5))) u + \omega. \end{aligned} \quad (28)$$

其中 $\omega = 0.5 \sin(0.5t)$. 当 $\omega = 0$ 时, 系统(28)经常被用来检验神经网络算法^[16~18].

在仿真中, 参考信号为 $y_m = 0.5 \sin(0.5\pi t)$, 相关集合为 $A_d^c = \{x | \|x\|^2 \leq 4\}$; $A = \{x | \|x\|^2 \leq 4(1 + 0.1)\}$. 下面选择 A 的开覆盖. 首先, 由文[12]选开覆盖 $\{U_i\}$ 以产生式(8)中的单位分解 $\{\alpha_i\}$, $i = 1, 2, 3$, $U_1 = \{x; \|x - a_1\| < 1.5, a_1 = (-2, 0)^T\}$, $U_2 = \{x; \|x - a_2\| < 1.5, a_2 = (2, 0)^T\}$, $U_3 = (-2, 2) \times (-10, 10)$. 类似地, 选择开覆盖 $\{V_j\}$ 以产生式(8)中单位分解 $\{\beta_j\}$, $j = 1, 2, 3$, $V_1 = \{x; \|x - b_1\| < 15, b_1 = (-3, 0)^T\}$, $V_2 = \{x; \|x - b_2\| < 15, b_2 = (3, 0)^T\}$, $V_3 = (-15, 15) \times (-20, 20)$. 状态初始值 $x(0) = (1.5, -1.5)^T$; 参数初值 $\hat{p}_i(0), \hat{q}_j(0), \hat{\varepsilon}_f(0)$ 和 $\hat{\varepsilon}_g(0)$ 任意地在闭区间 $[-2, 2]$ 内选取; 取 $d(x) = 0.5$, $f_0(x) = 0$, $g_0(x) = 2$, $a(x) = 16$, $b(x) = 1$, $k_d = 5$, $\Lambda_1 = 25$, $\Lambda_2 = 10$, $\gamma_1 =$

5, $\gamma_2 = 1$, $\varphi = 0.1$. 仿真见图1~图3.

从仿真可以看出, 只利用两组3个开覆盖就完成了跟踪任务, 从这一点上说, 本文的算法比文[16~18]中的算法简单.

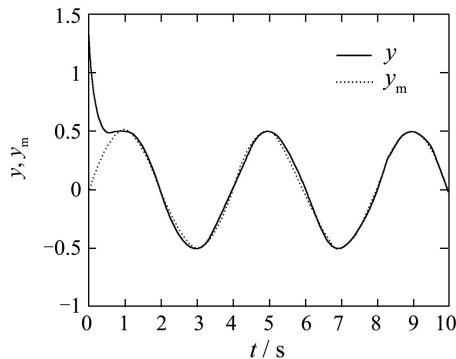


图1 y 与 y_m 的输出跟踪曲线

Fig. 1 Tracking curves of y and y_m

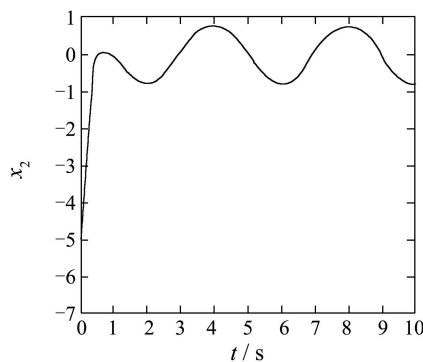


图2 系统状态 x_2 的响应曲线

Fig. 2 State response curve of x_2

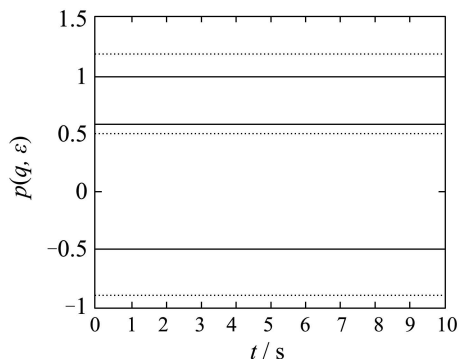


图3 参数估计 $\hat{p}$, $\hat{q}$, $\hat{\epsilon}_f$ 和 $\hat{\epsilon}_g$ 响应曲线

Fig. 3 Estimate parameter response curves of $\hat{p}$, $\hat{q}$, $\hat{\epsilon}_f$ and $\hat{\epsilon}_g$

5 结论 (Conclusion)

利用单位分解的某些线性组合在紧致域上具有以任意精度逼近连续函数的性质, 可以使系统的不确定项近似线性参数化, 以此为基础能够为一类非线性不确定系统设计自适应鲁棒跟踪控制器. 这种控制器可以使闭环系统所有变量一致有界且保证跟踪误差渐近地收敛到零点的一个小邻域内.

参考文献 (References):

- [1] ASTROM K J, WITTENMARK B. *Adaptive Control*[M]. 2nd Edition. MA: Addison-Wesley, 1995.
- [2] MARINO R, TOMEI P. *Nonlinear Control Design-Geometric, Adaptive and Robust*[M]. London: Prentice-Hall, 1995.
- [3] KRSTIC M, KANELAKOPOULOS I, KOKOTOVIC P V. *Nonlinear and Adaptive Control Design*[M]. Wiley: New York, 1995.
- [4] KANELAKOPOULOS I, KOKOTOVIC P V, MORSE A S. Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems[J]. *IEEE Trans on Automat Control*, 1991, 36(11): 1241 – 1253.
- [5] GUAY M, ZHANG T. Adaptive extremum seeking control of nonlinear dynamic systems with parametric uncertainties[J]. *Automatica*, 2003, 39(6): 1283 – 1293.
- [6] ARSLAN G, BASAR T. Robust output tracking for strict-feedback systems using neural-net based approximators for nonlinearities[C]// *Proc of IEEE Conference on Decision and Control*, Piscataway, NJ, USA: [s.n.], 1999: 2987 – 2992.
- [7] POLYCARPOU M M, MEARS M J. Stable adaptive tracking of uncertain systems using nonlinearly parametrized on-line approximators[J]. *Int J of Control*, 1998, 70(3): 363 – 384.
- [8] KRSTIC M, KANELAKOPOULOS I, KOKOTOVIC P V. Adaptive nonlinear control without overparametrization[J]. *Systems Control & Letters*, 1992, 19(3): 177 – 185.
- [9] POLYCARPOU M M, LOANNOU P A. A robust adaptive nonlinear control design[J]. *Automatica*, 1996, 32(3): 423 – 427.
- [10] YAO B, MASAYOSHI T. Adaptive robust control of SISO nonlinear systems in a semi-strict feedback form[J]. *Automatica*, 1997, 33(5): 893 – 900.
- [11] HADDAD W M, HAYAKAWA T. Direct adaptive control for nonlinear uncertain systems with exogenous disturbance[J]. *Int J of Adaptive Control and Signal Processing*, 2002, 16(2): 151 – 172.
- [12] WANG Y H, LI Z Y, ZHANG S Y. Approximation property of partition of unity and its applications[J]. *Journal of Control Theory and Applications*, 2004, 2(3): 267 – 275.
- [13] SU C Y, STEPANENKO. Adaptive control of a class of nonlinear systems with fuzzy logic[J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 1994, 2(4): 285 – 294.
- [14] TONG S C, LI Q G, CHAI T Y. Fuzzy adaptive control for a class of nonlinear systems[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1999, 101(1): 31 – 39.
- [15] SLOTINE J J E, LI W P. *Applied Nonlinear Control*[M]. Englewood Cliffs, NJ, USA: Prentice-Hall, 1991.
- [16] SANNER R M, SLOTINE J J E. Gaussian networks for direct adaptive control[J]. *IEEE Trans on Neural Networks*, 1992, 3(6): 837 – 863.
- [17] TZIRKEL-HANCOCK E, FALLSIDE F. Stable control of nonlinear systems using neural networks[J]. *Int J of Robust Nonlinear Control*, 1992, 2(1): 63 – 86.
- [18] KOO K M. Stable adaptive fuzzy controller with time-varying dead-zone[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, 121(1): 161 – 168.

作者简介:

王银河 (1962—), 男, 教授, 研究领域包括非线性系统结构分析及鲁棒自适应控制, E-mail: yhwang@stu.edu.cn;

张嗣瀛 (1925—), 男, 教授, 中国科学院院士, 研究领域为复杂系统结构分析理论和控制理论.