第 23 卷第 5 期 控制理论与应用 Vol. 23 No. 5
2006 年 10 月 Control Theory & Applications Oct. 2006

文章编号：1000−8152(2006)05−0703−03

2-D奇异系统Roesser模型的鲁棒H_∞控制

徐慧玲[1], 盛 梅[1], 邹 云[2], 郭 雷[3]

(1. 南京理工大学 应用数学系, 江苏 南京 210094; 2. 南京理工大学 自动化系, 江苏 南京 210094;
3. 东南大学 自动化研究所, 江苏 南京 210096)

摘要: 考虑具有参数不确定性的2-D奇异系统Roesser模型(简称2-D SRM)鲁棒H_∞控制问题. 在给出界实引理的另一等价形式的基础上, 通过求解矩阵不等式, 给出了不确定2-D奇异系统鲁棒H_∞ 控制问题可解的充分条件及静态状态反馈控制律设计的代数表达式. 最后通过一个仿真算例验证了方法的有效性.

关键词: 2-D奇异系统; 跳跃模; 鲁棒H_∞ 控制; 矩阵不等式
中图分类号: TP13 **文献标识码**: A

Robust H-infinity control for uncertain 2-D singular Roesser models

XU Hui-ling[1], SHENG Mei[1], ZOU Yun[2], GUO Lei[3]

(1. Department of Applied Mathematics, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing Jiangsu 210094, China;
2. Department of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing Jiangsu 210094, China;
3. Research Institute of Automation, Southeat University, Nanjing Jiangsu 210096, China)

Abstract: This paper discusses the problem of robust H-infinity control for linear discrete time 2-D singular Roesser models (2-D SRM) with parameter uncertainty. The purpose is the design of state feedback controllers such that the resulting closed-loop system is acceptable, jump modes free, stable and satisfies a specified H-infinity performance level for all admissible uncertainties. An equivalent form of bounded realness of 2-D SRM is established in terms of linear matrix inequalities. Based on this, a sufficient condition for the solvability of the robust H-infinity control problem for linear discrete time uncertain 2-D SRM is then presented, and a desired state feedback controller can also be derived by solving a set of matrix inequalities. Finally, numerical example is provided to demonstrate the applicability of the proposed approach.

Key words: 2-D singular systems; jump modes; robust H-infinity control; matrix inequalities

1 引言(Introduction)

在近10年, 由于2-D奇异系统的广泛应用引起了人们极大的兴趣[1~4], 许多1-D奇异系统的结果被推广到2-D情形[2,3]. 文献[1]在给出跳跃模概念的基础上讨论了2-D奇异系统的渐近稳定性. 文献[2]讨论了不确定2-D奇异系统输出反馈鲁棒H_∞控制问题. 本文指出了文献[2]中所采用的方法的不足之处, 并给出了解决这一问题的新方法. 利用矩阵不等式,得到了不确定2-D奇异系统状态反馈鲁棒H_∞控制问题可解的充分条件及静态状态反馈控制律设计的代数表达式.

2 预备知识及问题的描述(Problem formulation and preliminaries)

考虑如下不确定2-D SRM系统(Σ):

$$E\begin{bmatrix}x^{\mathrm{h}}(i+1,j)\\x^{\mathrm{v}}(i,j+1)\end{bmatrix}=(A+\Delta A)\begin{bmatrix}x^{\mathrm{h}}(i,j)\\x^{\mathrm{v}}(i,j)\end{bmatrix}+Bu(i,j)+Ld(i,j),\tag{1}$$

$$z(i,j)=H\begin{bmatrix}x^{\mathrm{h}}(i,j)\\x^{\mathrm{v}}(i,j)\end{bmatrix}.\tag{2}$$

边界条件为

$$x^{\mathrm{h}}(0,j)=x^{\mathrm{h}}_j, x^{\mathrm{v}}(i,0)=x^{\mathrm{v}}_i.\tag{3}$$

其中$x^{\mathrm{h}}(i,j)\in\mathbb{R}^{n_1}$, $x^{\mathrm{v}}(i,j)\in\mathbb{R}^{n_2}$ 分别为水平和垂直局部状态向量, $u(i,j)\in\mathbb{R}^{\mathrm{m}}$, $d(i,j)\in\mathbb{R}^{\mathrm{p}}$, $z(i,j)\in\mathbb{R}^{\mathrm{l}}$ 分别为系统的输入向量、干扰向量及控制输出向量. A,B,L,H为适维实矩阵. $E\in\mathbb{R}^{n\times n}$为奇异矩阵, 且满足如下2-D正则束条件, 即若存在有限的复数(z,w), 使得系统的系数矩阵满足

$$\det[EI(z,w)-A]=\sum_{k=0}^{\bar n_1}\sum_{l=0}^{\bar n_2}a_{kl}\,z^k\,w^{\mathrm{l}}\neq 0,$$

收稿日期: 2004−10−08; 收修改稿日期: 2005−08−16.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60674014, 60474078);南京理工大学科研发展基金资助项目; 江苏省博士后科研资助计划(0601010B).

其中$I(z,w)$=diag$\{zI_{n_1},wI_{n_2}\}$, $n_1+n_2=n$. 且当$a_{\bar{n}_1,\bar{n}_2}\neq 0$时系统($\Sigma$)称为容许的, ΔA表示参数不确定性.

在本文中假定ΔA具有如下形式

$$\Delta A=MF(i,j)N.$$

其中$F(i,j)\in\mathbb{R}^{j\times k}$是未知数的矩阵函数, 且$F(i,j)$满足$F(i,j)^{\mathrm{T}}F(i,j)\leqslant I$.

对不确定系统2-D SRM(Σ)作如下的状态反馈

$$u(i,j)=Kx(i,j),\ K\in\mathbb{R}^{m\times n}.\tag{4}$$

其中$x(i,j)=\begin{pmatrix}x^{\mathrm{h}}(i,j)\\x^{\mathrm{v}}(i,j)\end{pmatrix}$. 则闭环系统($\Sigma_{\mathrm{c}}$)为

$$E\begin{bmatrix}x^{\mathrm{h}}(i+1,j)\\x^{\mathrm{v}}(i,j+1)\end{bmatrix}=A_{\mathrm{c}}\begin{bmatrix}x^{\mathrm{h}}(i,j)\\x^{\mathrm{v}}(i,j)\end{bmatrix}+Ld(i,j),\tag{5}$$

$$z(i,j)=H\begin{bmatrix}x^{\mathrm{h}}(i,j)\\x^{\mathrm{v}}(i,j)\end{bmatrix}.\tag{6}$$

其中$A_{\mathrm{c}}=A+\Delta A+BK$.

状态反馈鲁棒H_∞控制问题: 给定系统(Σ)和常数$\gamma>0$, 寻求状态反馈控制律(4), 使闭环系统(Σ_{c})对所有容许的ΔA都是容许、渐近稳定、无跳跃模且$\|G(z,w)\|_\infty<\gamma$ (边界条件为零时), 其中$G(z,w)=H[EI(z,w)-A_{\mathrm{c}}]^{-1}L$是干扰$d(i,j)$到控制输出$z(i,j)$的传递函数, $\|G(z,w)\|_\infty=\sup\limits_{\omega_1,\omega_2\in[0,2\pi)}\bar{\sigma}[G(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega1},\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega2})]$, 这里$\bar{\sigma}(\cdot)$表示矩阵$(\cdot)$的最大奇异值.

为简洁计, 引入如下2-D SRM(Σ_0):

$$E\begin{bmatrix}x^{\mathrm{h}}(i+1,j)\\x^{\mathrm{v}}(i,j+1)\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}x^{\mathrm{h}}(i,j)\\x^{\mathrm{v}}(i,j)\end{bmatrix}+Ld(i,j),\tag{7}$$

$$z(i,j)=H\begin{bmatrix}x^{\mathrm{h}}(i,j)\\x^{\mathrm{v}}(i,j)\end{bmatrix}.\tag{8}$$

下面给出与本文相关的引理.

引理 1[5] 设T是可逆对称阵, F满足$F^{\mathrm{T}}F\leqslant I$. 如果$M$, N是适维常矩阵, 且存在常数$\varepsilon>0$使得$\varepsilon I-M^{\mathrm{T}}TM>0$, 则

$$(A+MFN)^{\mathrm{T}}T(A+MFN)\leqslant$$
$$A^{T}(T^{-1}-\varepsilon^{-1}MM^{\mathrm{T}})^{-1}A+\varepsilon N^{\mathrm{T}}N.$$

引理 2[3] 如果存在块对角对称阵P=blackdiag$\{P_{\mathrm{h}},P_{\mathrm{v}}\}\in\mathbb{R}^{n\times n}(P_{\mathrm{h}}\in\mathbb{R}^{n_1\times n_1},P_{\mathrm{v}}\in\mathbb{R}^{n_2\times n_2})$,使得

$$EPE^{\mathrm{T}}\geqslant 0,\tag{9}$$

$$APA^{\mathrm{T}}-EPE^{\mathbf{T}}<0,\tag{10}$$

则系统(Σ_0)是容许, 渐近稳定, 无跳跃模的, 且满足式(10)的矩阵P是可逆的.

引理 3[4] 容许的系统(Σ_0)是无跳跃模, 则必存在可逆矩阵$\bar{M}\in\mathbb{R}^{n\times n}$和$\bar{N}$=blackdiag$\{\bar{N}_{\mathrm{h}},\bar{N}_{\mathrm{v}}\}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 其中$\bar{N}_{\mathrm{h}}\in\mathbb{R}^{n_1\times n_1}$, $\bar{N}_{\mathrm{v}}\in\mathbb{R}^{n_2\times n_2}$, 使得$\bar{M}E\bar{N}=\bar{E}$=blackdiag$(\bar{E}_{\mathrm{h}},\bar{E}_{\mathrm{v}})$, 其中$\bar{E}_{\mathrm{h}}\in\mathbb{R}^{n_1\times n_1}$, $\bar{E}_{\mathrm{v}}\in\mathbb{R}^{n_2\times n_2}$, $\bar{M}A\bar{N}=\bar{A}$, $\bar{M}B=\bar{B}$.

3 主要结果(Main result)

由闭环系统(5)及引理3知: 不失一般性, 不妨假定本文所讨论的系统中的E具有$E=$ blackdiag$\{E_{\mathrm{h}},E_{\mathrm{v}}\}$形式, 其中$E_{\mathrm{h}}\in\mathbb{R}^{n_1\times n_1}$, $E_{\mathrm{v}}\in\mathbb{R}^{n_2\times n_2}$. 此时由文献[4]易有如下引理:

引理 4 系统(7)($L=0$)与如下系统

$$E^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}x^{\mathrm{h}}(i+1,j)\\x^{\mathrm{v}}(i,j+1)\end{bmatrix}=A^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}x^{\mathrm{h}}(i,j)\\x^{\mathrm{v}}(i,j)\end{bmatrix}.\tag{11}$$

的容许性、稳定性、因果性等价.

由此易得引理2的另一等价描述:

引理 5 如果存在对称阵P=blackdiag$\{P_{\mathrm{h}},P_{\mathrm{v}}\}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ($P_{\mathrm{h}}\in\mathbb{R}^{n_1\times n_1},P_{\mathrm{v}}\in\mathbb{R}^{n_2\times n_2}$), 使得

$$E^{\mathrm{T}}PE\geqslant 0,\tag{12}$$

$$A^{\mathrm{T}}PA-E^{\mathrm{T}}PE<0.\tag{13}$$

则系统(Σ_0)是容许、渐近稳定且无跳跃模的, 而且, 如果(13)成立, 则P是可逆的.

定理 1 给定一正数$\gamma>0$, 如果存在对称阵P=blackdiag$\{P_{\mathrm{h}},P_{\mathrm{v}}\}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 其中$P_{\mathrm{h}}\in\mathbb{R}^{n_1\times n_1}$, $P_{\mathrm{v}}\in\mathbb{R}^{n_2\times n_2}$使得如下的LMI成立:

$$E^{\mathrm{T}}PE\geqslant 0,\tag{14}$$

$$\begin{bmatrix}A^{\mathrm{T}}PA-E^{\mathrm{T}}PE+H^{\mathrm{T}}H & A^{\mathrm{T}}PL\\ L^{\mathrm{T}}PA & L^{\mathrm{T}}PL-\gamma^2I\end{bmatrix}<0.\tag{15}$$

则系统(Σ_0)是容许的、渐近稳定、无跳跃模的, 且边界条件为零时满足$\|G(z,w)\|_\infty<\gamma$.

证 注意到引理5, 这里只需证明$\|G(z,w)\|_\infty<\gamma$, 引入如下记号:

$$z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_1},w=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_2},\omega_1,\omega_2\in[0,2\pi),$$
$$U=\gamma^2I-L^{\mathrm{T}}PL,S(z,w)=$$
$$U^{\frac{1}{2}}-L^{\mathrm{T}}[E^{\mathrm{T}}I(z^{-1},\omega^{-1})-A^{\mathrm{T}})]^{-1}\times A^{\mathrm{T}}PLU^{-\frac{1}{2}}.\tag{16}$$

类似于文[2]定理1的证明即可证.

注 1 定理1即为文献[2]中2-D奇异系统Roesser模型界实引理的等价形式.

注 2 文献[2]中的定理2要求矩阵B行满秩, 这一条件对系统的要求过强. 另外, 由于反馈控制律的表达式中存

在B^-, 则输出反馈控制律的选取并不唯一. 为解决上述问题, 本文给出了解决此问题的如下新方法.

定理 2 如果存在常数 $\varepsilon > 0$, $\mu > 0$ 和可逆对称阵 P = blackdiag$\{P_{\rm h}, P_{\rm v}\} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ($P_{\rm h} \in \mathbb{R}^{n_1\times n_1}, P_{\rm v} \in \mathbb{R}^{n_2\times n_2}$) 使得

$$E^{\rm T}PE \geqslant 0, \tag{17}$$

$$\varepsilon I - M^{\rm T}\Theta M > 0, \tag{18}$$

$$A^{\rm T}\Gamma A - A^{\rm T}\Gamma BS^{-1}B^{\rm T}\Gamma A + H^{\rm T}H + \varepsilon N^{\rm T}N - E^{\rm T}PE < 0, \tag{19}$$

$$\gamma^2 I - L^{\rm T}PL > 0, \tag{20}$$

其中

$$S = B^{\rm T}\Gamma B + \mu I \tag{21}$$

可逆且

$$\Gamma = (\Theta^{-1} + \varepsilon^{-1}MM^{\rm T})^{-1}, \tag{22}$$

$$\Theta = (P^{-1} - \gamma^{-2}LL^{\rm T})^{-1}. \tag{23}$$

则系统2-D SRM(1)状态反馈鲁棒H_∞控制问题是可解的.

在此情况下, 状态反馈控制器可选取为

$$K = -S^{-1}B^{\rm T}\Gamma A. \tag{24}$$

证 利用引理1可得

$$A_{\rm c}^{\rm T}\Theta A_{\rm c}^{\rm T} \leqslant (A+BK)^{\rm T}\Gamma(A+BK) + \varepsilon N^{\rm T}N. \tag{25}$$

经过代数运算, 由式(21)和(24)有

$$(A+BK)^{\rm T}\Gamma(A+BK) \leqslant A^{\rm T}\Gamma A - A^{\rm T}\Gamma BS^{-1}B^{\rm T}\Gamma A. \tag{26}$$

注意到式(25)与(26)即有

$$A_{\rm c}^{\rm T}\Theta A_{\rm c} + H^{\rm T}H - E^{\rm T}PE < 0, \tag{27}$$

而式(20)表明$P^{-1} - \gamma^{-2}LL^{\rm T}$是可逆的. 则根据矩阵求逆引理, 式(23)(25)及Shur补引理即得

$$\begin{bmatrix} A_{\rm c}^{\rm T}PA_{\rm c} - E^{\rm T}PE + H^{\rm T}H & A_{\rm c}^{\rm T}PL \\ L^{\rm T}PA_{\rm c} & L^{\rm T}PL - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0.$$

根据定理1即证.

4 仿真算例(Simulation study)

考虑如下的2-D SRM($\Delta A = 0$)系统:

$$E = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right], A = \left[\begin{array}{c|c} 2 & 0 \\ \hline 2 & 1 \end{array}\right], B = \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline 1 \end{array}\right],$$

$$L = \left[\begin{array}{c} 0.1 \\ \hline 0.2 \end{array}\right], H = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 \end{array}\right],$$

易验证该系统是容许的, 不稳定且有跳跃模. 设

$$\varepsilon = 0.5,\ \mu = 1,\ \gamma = 0.2,\ P = \left[\begin{array}{c|c} 5.5 & 0 \\ \hline 0 & -4.5 \end{array}\right],$$

根据定理2, 反馈增益可选取为

$$K = [-1.2707 \quad 0.9448].$$

下图表明闭环系统($\Sigma_{\rm c}$)频率响应低于给定的H_∞指标$\gamma = 0.2$.

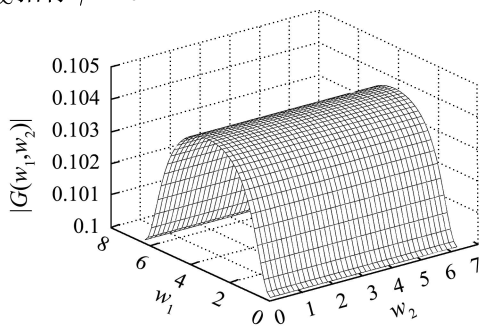

图 1 闭环系统的频率响应

Fig. 1 Frequency response of the closed-loop systems

5 结论(Conclusion)

本文讨论了具有参数不确定性的2-D奇异系统Roesser模型(简称2-D SRM)状态反馈鲁棒H_∞控制问题. 通过线性矩阵不等式给出了界实引理, 并给出了鲁棒H_∞ 控制问题可解的充分条件及状态反馈增益的表达形式.

参考文献(References):

[1] ZOU Y, CAMPBELL S L. The jump behavior and stability analysis for 2-D singular systems[J]. *Multidimensional Systems & Signal Processing*, 2000, 11(4): 321 – 338.

[2] XU H L, ZOU Y, XU SY, et al. Bounded real lemma and robust H_∞ control of 2-D singular Roesser models[J]. *Systems & Control Letters*, 2005, 54(4): 339 – 346.

[3] XU H L, XU S Y. Robust stabilization for uncertain 2-D singular Roesser models[C]// *Pro of the 8th Eighth Int Conf on Control, Automation, Robotics and Visio (ICARCV2004)*. Kunming: [s.n.], 2004, 12: 1476 – 1480.

[4] ZOU Y, XU H L, XU S Y. Equivalence and duality of 2-D singular systems[C]// *47th IEEE Midwest Symtosium on Circuits and Systems*, Hiroshima, Japan: [s.n.], 2004: 561 – 564.

[5] XU S Y, LAM J, YANG C. Robust H_∞ control of uncertain discrete singular systems with pole placement in a disk[J]. *Systems & Control Letters*, 2001, 43(1): 85 – 93

作者简介:

徐慧玲 (1969—), 女, 在东南大学做博士后研究, 研究方向为奇异系统、2-D系统、鲁棒控制, E-mail: xuhuiling_2005@yahoo.com.cn;

盛 梅 (1970—), 女, 博士, 研究方向为鲁棒控制与滤波、2-D系统与随机系统, E-mail: mei-sheng@vip.163.com ;

邹 云 (1962—), 男, 教授, 研究方向为奇异系统、多维系统、电力系统稳定性, E-mail: zouyun@vip.163.com;

郭 雷 (1966—), 男, 博士,教授, 研究方向为随机系统、鲁棒控制、神经网络, E-mail: l.guo@seu.edu.cn.