

多模式网络化控制系统稳定性分析

郑 刚¹, 谭 民², SONG Y H³

(1. 中国科学院 软件研究所 通用软件实验室, 北京 100080; 2. 中国科学院 自动化研究所, 北京 100080;
3. 布鲁内尔大学 电子与计算机工程系, 英国 伦敦)

摘要: 网络传输引起的时滞在网络化控制系统中经常出现. 针对存在多个运动模式的网络化控制系统, 建立了时滞混杂自动机模型, 分析了系统平衡点的稳定性, 给出了平衡点保持稳定的充分条件在于构造的与离散状态相关的Lyapunov泛函在离散状态的切换时刻是非增的. 当时滞混杂自动机中连续性子系统为线性时不变时滞系统时, 可以利用线性矩阵不等式方法来寻找系统的公共Lyapunov泛函, 并求解使系统平衡点保持稳定的时滞上界. 最后, 给出了一个例子说明了分析结果.

关键词: 网络控制; 混杂系统; 稳定性; 时滞系统; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Stability analysis of multi-regime networked control systems

ZHENG Gang¹, TAN Min², SONG Y H³

(1. General Software Laboratory, Institute of Software, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China;
2. Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China;
3. Department of Electronic and Computer Engineering, Brunel University, Uxbridge UB8 3PH, UK)

Abstract: A network-induced delay occurs frequently in networked control systems. A hybrid automaton with delay (HAD) is proposed to model a class of networked control systems with multiple continuous dynamical regimes. Based on the HAD model, the stability for the equilibrium of a networked control system is analyzed, and the sufficient condition of the stability for the equilibrium is also presented, in which, multiple Lyapunov functionals, with respect to the discrete states of the HAD, are non-increasing across the time instants when discrete transitions happen. Furthermore, for the case where the continuous dynamics in the HAD is denoted by a linear time invariant system with delay, the linear matrix inequality (LMI) technique is employed to search for a common Lyapunov functional of different discrete states in the HAD and to obtain the upper bound on the system delay remaining stable. Finally, an example is given to illustrate the analysis results.

Key words: networked control; hybrid systems; stability; time delay; linear matrix inequality

1 引言(Introduction)

网络化控制系统指在反馈控制系统的闭环回路中包含实时网络的系统^[1]. 网络化控制系统通过网络(如以太网、现场总线网络和Internet等)在传感器与控制器之间、控制器与被控对象之间传输数据, 完成控制功能, 实现控制目标. 网络传输时滞是网络化控制系统的一个基本特征^[1~3]. 在复杂网络化控制系统中, 通常存在多个运动模式, 按照一定的规则进行切换, 称之为多模式网络化控制系统, 这类系统包含了相互作用的离散和连续动态特征, 属于一种混杂系统^[4]. 如果不考虑网络传输的时滞, 可以将多模式的控制系统看作一个混杂自动机^[5], 自动

机中的每个离散状态对应一个连续变量动态子系统(CVDS), 切换规则对应混杂自动机中的状态迁移关系和迁移发生条件, 在此基础上, 利用研究混杂系统稳定性的方法^[6,7]来研究多模式网络化控制系统的稳定性.

时滞的存在将影响网络化控制系统的动态特征, 可能改变系统原有的稳定性结果^[8]. 另外, 由于时滞的存在, 系统的初始条件需要在一段时间区间上而不是一个时间点上定义, 描述连续性子系统的动态特征将不再是普通微分方程, 而是时滞微分方程或者泛函微分方程^[9,10]; 时滞也可能产生在模式切换过程中, 由此会对模型中的状态迁移条件和迁

移关系产生影响. 因此, 原有的混杂自动机模型不能充分描述网络化控制系统, 研究多模式网络化控制系统的稳定性需要研究具有时滞的混杂系统稳定性.

到目前为止, 研究具有时滞的混杂系统稳定性的文献不是很多, 文献[11]利用Lyapunov函数加上Razumikhin条件来分析具有时滞的混杂系统的一致渐近稳定性问题. 本文采用与文献[11]不同的方法, 针对多模式网络化控制系统, 提出一个时滞混杂自动机模型来描述这样一类系统: 连续子系统动态特征由泛函微分方程表示, 并且连续子系统时的滞是有界的, 而在连续子系统之间的切换过程是瞬时发生的. 实际上, 这个模型也包括了离散状态迁移存在时滞的情况, 因为可以将具有时滞的离散状态迁移过程看作一个新的离散状态, 这样, 两个离散状态之间具有时滞的迁移过程就变为3个离散状态间的瞬时迁移过程. 以时滞混杂自动机模型为基础, 给出了系统稳定的充分条件, 并且针对连续性子系统为线性时不变时滞系统的情况, 将判断稳定性的问题转化为线性矩阵不等式(linear matrix inequality, LMI)^[12]的求解问题, 最后给出了一个仿真例子来说明分析结果.

2 时滞混杂自动机(Hybrid automaton with delay)

定义1 时滞混杂自动机. 一个时滞混杂自动机(hybrid automaton with delay, HAD)模型由一个十元组 $(Q, X, \Theta, X^*, f, E, \text{Init}, G, \text{Inv}, R)$ 表示, 各部分的含义如下:

- Q 是一个离散状态集, 为有限集;
- X 是时滞混杂自动机的连续状态空间, 连续状态变量 $x \in X, X \subset \mathbb{R}^n$;
- Θ 是一个有界的时滞区间, $\Theta = [-r, 0]$, 其中 $r > 0$, 且 $r = \max\{r_i, i = 1, 2, \dots, n\}$, r_i 表示时滞混杂自动机中第 i 个连续性子系统存在的时滞, 因此 r 表示在 n 个连续性子系统中存在的最大时滞;
- X^* 是由连续函数映射 $\Phi: \Theta \rightarrow X$ 构成的函数空间, $X^* = C([-r, 0], X)$;
- $f: Q \times T \times X^* \rightarrow X$ 是一个算子, 表示在对应离散状态下的连续动态特征, 其中 $T \subseteq \mathbb{R}^+$, T 中元素表示系统从0时刻开始动态演化经历的时间, 与离散状态 q 对应的连续动态行为可表示为泛函微分方程形式: $\dot{x} = f(q, t, x_t)$, 其中 $q \in Q, t \in T, x_t \in X^*, x_t = x_t(-\theta) = x(t - \theta), \theta \in [0, r]$ 表示时滞的大小;

- $E \subset Q \times Q$ 表示离散状态迁移集;

• $\text{Init} \subseteq Q \times X^*$ 表示初始条件集, 可表示为 $(q_0, \varphi) \in Q \times X^*$ 的形式, 其中 q_0 表示初始离散状态, φ 表示在 q_0 中在初始时间区间 $[-r, 0]$ 上的连续性动态行为, $\varphi \in C([-r, 0], X)$;

• $G: E \rightarrow 2^X$ 表示离散状态迁移 $e = (q, q') \in E$ 发生的警戒条件;

• $\text{Inv}: Q \rightarrow 2^X$ 表示与离散状态 $q \in Q$ 对应的状态保持条件;

• $R: E \times X \rightarrow 2^X$ 表示在发生离散状态迁移 $e = (q, q') \in E$ 后的连续状态 $x \in X$ 的置位关系

当时滞不存在时, 时滞混杂自动机模型就转化为混杂自动机模型^[5]. 为分析上的方便, 事先假定算子 $f(q, t, x_t)$ 在 $q \in Q$ 时关于 t 和 x_t 满足全局Lipschitz条件.

定义2 混杂时间轨道. 混杂时间轨道为一时间区间序列, 用 τ 表示, $\tau = [t_0 - r, t_0] \cup \{I_i\}, i \in \mathbb{N}$, 满足如下条件:

- $[t_0 - r, t_0]$ 是初始时间区间, 其中 $r > 0, r = \max\{r_i, i = 1, 2, \dots, n\}$, t_0 是初始时刻, 通常 $t_0 = 0$;
- I_i 通常表示一闭区间, 若 τ 为有限多个区间构成的序列, 最后一区间可以是左闭右开的形式.
- 令 $I_i = [t_i, t'_i]$, 则 $\forall i \in \mathbb{N}$, 有 $t_i \leq t'_i, t_i = t'_{i-1}$.

定义3 时滞混杂自动机的行为. 令 T 表示时滞混杂自动机的混杂时间轨道集合, 时滞混杂自动机的行为用一三元组 (τ, q, x) 形式表示, 其中 $\tau \in T, q: \tau \rightarrow Q, x: \tau \rightarrow X$, 并满足下列条件:

- 初始条件: $(q_0, x(t)) = (q_0, x_{t_0}(-\theta)) \in \text{Init}$, 其中 $t \in [t_0 - r, t_0], \theta \in [0, r]$;
- 离散演化过程: $\forall i \in \mathbb{N}, e = (q(t'_i), q(t_{i+1})) \in E, x(t'_i) \in G(e)$ 且 $x(t_{i+1}) \in R(e, x(t'_i))$;
- 连续演化过程: 对于 $t \in I_i$, 系统处于离散状态 $q, q \in Q$, 连续动态特征可用泛函微分方程 $\dot{x} = f(q, t, x_t)$ 表示, 其中 $x(t) \in \text{Inv}q, x_t = x_t(-r_j) = x(t - r_j), r_i$ 表示在该离散状态下的时滞.

如果在连续子系统中不含时滞量, 则定义2和定义3与文献[6]是相同的. 在存在时滞的情况下, 系统的初始条件必须在一个时间区间上给出, 而不能在一个初始时刻中给出. 令 $H(q_0, \varphi)$ 表示时滞混杂自动机在初始条件 $(q_0, \varphi) \in \text{Init}$ 下的行为的集合, 用 H 表示在初始条件集 Init 下的行为的集合.

时滞混杂自动机模型可描述一类多模式网络化控制系统, 如图1所示, 每个控制器对应一种控制模式, 监控器作出决策, 使系统可以按照一定的规则进行切换, 控制器和传感器之间, 以及控制器和

执行器之间都存在由网络传输引起的时滞, 显然, 每种控制模式对应自动机中的一个离散状态, 控制模式之间的切换对应离散状态之间的迁移. 连续对象的动态演化关系 $\dot{x} = f(x, u_i, t)$ 和反馈控制模式 $u_i = -Kx(t - r_i)$ 可以化为泛函微分方程形式 $\dot{x} = f_i(q, t, x_t(r_i))$, 用于描述对应离散状态的连续动态特征, r_i 表示第 i 种控制模式的时滞. 图2给出了具有两个控制模式的网络化控制系统的时滞混杂自动机模型描述.

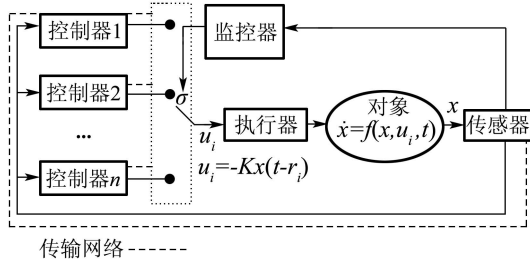


图1 多模式网络化控制系统

Fig.1 Multi-regime networked control system

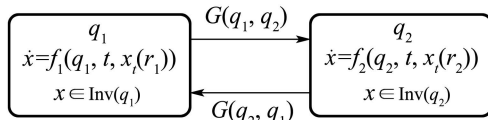


图2 时滞混杂自动机模型

Fig. 2 Model of hybrid automaton with delay

3 时滞混杂自动机的稳定性分析(Stability analysis for a hybrid automaton with delay)

3.1 时滞混杂自动机的稳定性定义(Stability definition of a hybrid automaton with delay)

定义4 不变集. 集合 $S \subseteq Q \times X^*$ 称为时滞混杂自动机 H 的不变集, 如果有下列条件成立: $\forall (q_0, \varphi) \in S$, 以 (q_0, φ) 为初始条件产生的时滞混杂自动机的行为 $(\tau, q, x) \in H(q_0, \varphi)$ 满足 $\forall t \in \tau$, 有 $(q, x_t(-\theta)) \in S$, 其中 $\theta \in [0, r]$.

定义5 平衡点. x_0 称为时滞混杂自动机 H 的平衡点, 如果有下列条件成立:

- 1) $\forall q \in Q, t \in \tau$, s. t. $x_t(\theta) \equiv x_0, f(q, t, x_0) = 0$;
- 2) $((q, q') \in E) \wedge (x_0 \in G(q, q')) \Rightarrow R(q, q', x_0) = \{x_0\}$.

显然, 平衡点是不变集的一个特例, 表示成不变集的形式为 $S = Q \times \{x_0\}$.

对于泛函微分方程 $\dot{x} = f(q, t, x_t)$, 如果固定 q , 显然 $x = 0$ 是该泛函微分方程的零解. 由此可见, 若置位关系 $R(q, q', 0) = \{0\}$ 成立, 则 $x = 0$ 是时滞混

杂自动机 H 的一个平衡点.

在研究微分方程时, 分析平衡点的稳定性是一项重要内容^[9,10]. 下面集中讨论时滞混杂自动机平衡点的稳定性. 不失一般性, 可认为 H 的平衡点就是其零解.

先给出函数空间中范数的定义: 对于函数 $\varphi \in C([-r, 0], X)$, 其范数形式为 $\|\varphi\| = \sup_{\theta \in [-r, 0]} |\varphi(\theta)|$.

定义6 平衡点的稳定性. 令 $x = 0$ 是时滞混杂自动机 H 的平衡点, 如果 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon, t_0) > 0$, s.t. $\forall (\tau, q, x) \in H(q_0, \varphi)$, 当 $\|\varphi\| < \delta(\varepsilon, t_0), \forall t \in \tau, q \in Q$, 有 $|x(t, t_0, \varphi)| < \varepsilon$ 成立, 则称 $x = 0$ 是稳定的. 如果 $\delta = \delta(\varepsilon)$, 则称 $x = 0$ 是一致稳定的.

本文在讨论时滞混杂自动机的稳定性时, 并不涉及具有 Zeno 行为^[4] 的混杂系统, 在状态迁移时刻 t'_n 仅发生一次状态迁移. 并且, 不失一般性, 可认为混杂时间轨道 τ 是由无穷多个时间区间构成的时间序列, 或者是由有限多个时间区间构成的序列, 最后一个区间为 $[t_N, \infty)$.

3.2 时滞混杂自动机的稳定性分析(Stability analysis of a hybrid automaton with delay)

定理1 已知 $x = 0$ 是时滞混杂自动机 H 的平衡点, $|R(e, x)| \leq |x|, e \in E$, 存在一开集 $D \subseteq X$ 且 $0 \in D, D^* = C([-r, 0], D)$. 若存在泛函

$$V : Q \times D^* \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \text{ s.t.}$$

- 1) $V(q, 0, t) = 0$;
- 2) 存在两个 K 类函数 w 和 W , 有 $w(|x(t)|) \leq V(q, x_t, t) \leq W(\|x_t\|)$ 成立;
- 3) $\frac{\partial V(q, x_t, t)}{\partial t} \leq 0$,

且 $\forall (\tau, q, x) \in H$, 序列 $\{V(q(t_i), x_{t_i}, t_i) : q(t_i) = \hat{q}, \hat{q} \in Q\}$ 是非增的, 则 H 的平衡点是稳定的.

证 这里用数学归纳法对含有两个离散状态的情况进行证明, 即 $Q = \{q_1, q_2\}$, 与 q_1 对应的连续子系统时滞为 r_1 , 与 q_2 对应的连续子系统时滞为 r_2 , $r = \max\{r_1, r_2\}$. 对于离散状态数目更多的情况, 证明过程类似.

不失一般性, 假定初始离散状态为 q_1 , 则系统初始条件为 $(q_1, \varphi), (q_1, \varphi) \in \text{Init}$.

由定义3, 时滞混杂自动机行为可表示为 (τ, q, x) , 其中 $x \in X, q \in Q = \{q_1, q_2\}, \tau$ 延伸至时间无穷远处, 形式为

$$\{[t_0 - r_1, t_0] \cup [t_0, t'_0] \cup [t_1, t'_1] \cup \cdots \cup [t_n, \infty), \\ k = 0, 1, 2, \cdots, n-1, n = 0, 1, 2, \cdots\} \quad (1)$$

$\forall \varepsilon > 0$, 则 $w(\varepsilon) > 0$, 因 K 类函数 W 连续, 存在 $\delta_1 \in (0, \varepsilon)$, 使得 $W(\delta_1) < w(\varepsilon)$, 进而有 $\delta_1 < \varepsilon$. 若系统不发生离散状态迁移, 即系统一直处于 q_1 , 那么 $\tau = [t_0 - r_1, \infty)$, 此时, 容易得出满足条件 1) 和 2) 时, 系统稳定.

若在时刻 $t'_0 (t'_0 > t_0)$ 处, 发生离散状态迁移, 系统从 $t_1 = t'_0$ 开始在 q_2 中动态演化. $\forall \eta \in (0, \delta_1)$, 取与 t_0 无关的 δ_2 , 满足 $W(\delta_2) < w(\eta)$. 由 K 类函数性质, 可知 $\delta_2 < \eta$. 如果 $\|\varphi\| < \delta_2$ 成立, 根据条件 1) 和 2), 得到

$$\begin{aligned} w(|x(t)|) &\leq V(q_1, x_t, t) \leq V(q_1, \varphi, t_0) \leq \\ W(\|\varphi\|) &< W(\delta_2) \leq w(\eta). \end{aligned}$$

由 w 函数性质知 $t \in [t_0, t'_0]$, $|x(t)| < \eta$ 成立. 进而因 $\|\varphi\| < \delta_2$ 且 $|x(t)| < \eta$, 可得当 $t \in [t_0, t'_0]$ 时, $\|x_t\| < \eta$, 其中 $\|x_t\| = \|x_t(-r_1)\| = |x(t - r_1)|$.

在时刻 $t_1 = t'_0$, 系统在 q_2 中发生动态演化, 此时有 $\|x_{t_1}\| = \|x_{t_1}(-r_2)\|$. 因 $|R(e, x)| \leq |x|$, $e = (q_1, q_2)$, 显然有 $\|x_{t_1}(-r_2)\| \leq \|x_{t'_0}(-r_1)\| < \eta$ 成立.

因此, 当 $t \geq t_1$ 时, 有

$$\begin{aligned} w(|x(t)|) &\leq V(q_2, x_t, t) \leq V(q_2, x_{t_1}, t_1) \leq \\ W(\|x_{t_1}\|) &< W(\eta) < W(\delta_1) \leq w(\varepsilon) \end{aligned}$$

成立, 进而有 $|x(t)| < \varepsilon$.

因此, 若 $\tau = [t_0 - r_1, t_0] \cup [t_0, t'_0] \cup [t_1, \infty)$, 平衡点 $x = 0$ 是稳定的.

考虑更为一般的情况, H 的混杂时间轨道 τ 为式(1)形式, 意味着系统在离散状态 q_1 和 q_2 之间发生多次切换. 首先, 考虑 τ 为下面的形式:

$$\begin{aligned} &[t_0 - r_1, t_0] \cup [t_0, t'_0] \cup [t_1, t'_1] \cup \cdots \cup [t_{2k}, t'_{2k}] \cup \\ &[t_{2k+1}, t'_{2k+1}] \cup \cdots \cup [t_{2n}, \infty), \\ &k = 0, 1, 2, \cdots, n-1, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \end{aligned} \quad (2)$$

在此情况下, 当 $t \geq t_{2n}$, 系统总是在离散状态 q_1 中发生连续动态演化.

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 \in (0, \varepsilon)$, s.t. $W(\delta_1) < w(\varepsilon)$, 由已知条件, 当 $t > t_{2n}$ 时, 有如下结果:

$$\begin{aligned} w(|x(t)|) &\leq V(q_1, x_t, t) \leq V(q_1, x_{t_{2n}}, t_{2n}) \leq \\ V(q_1, x_{t_{2n-2}}, t_{2n-2}) &\leq \cdots \leq V(q_1, \varphi, t_0) \leq \\ W(\|\varphi\|) &< W(\delta_1) \leq w(\varepsilon), \end{aligned}$$

根据 w 函数的性质, 可知 $|x(t)| < \varepsilon$.

下面, 考虑 τ 为下面的形式:

$$\begin{aligned} &[t_0 - r_1, t_0] \cup [t_0, t'_0] \cup [t_1, t'_1] \cup \cdots \cup [t_{2k}, t'_{2k}] \cup \\ &[t_{2k+1}, t'_{2k+1}] \cup \cdots \cup [t_{2n+1}, \infty), \\ &k = 0, 1, 2, \cdots, n-1, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \end{aligned} \quad (3)$$

在此情况下, 当 $t \geq t_{2n+1}$, 系统总是在离散状态 q_2 中发生连续动态演化.

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 \in (0, \varepsilon), \text{ s.t. } W(\delta_1) < w(\varepsilon), \\ &\forall \eta \in (0, \delta_1), \exists \delta_2 \in (0, \eta), \text{ s.t. } W(\delta_2) < w(\eta). \end{aligned}$$

令 $\|\varphi\| < \delta_2$, 在 $t \in [t_0, t'_0]$, 时滞混杂自动机仍处于状态 q_1 , 有

$$\begin{aligned} w(|x(t)|) &\leq V(q_1, x_t, t) \leq V(q_1, \varphi, t_0) \leq \\ W(\|\varphi\|) &< W(\delta_2) \leq w(\eta), \end{aligned}$$

由此得到 $|x(t)| < \eta$, 其中 $t \in [t_0, t'_0]$, 并有 $\|x_{t'_0}\| = \|x_{t'_0}(-r_1)\| < \eta$.

当 $t > t_{2n+1}$ 时, 有

$$\begin{aligned} w(|x(t)|) &\leq V(q_2, x_t, t) \leq V(q_2, x_{t_{2n+1}}, t_{2n+1}) \leq \\ V(q_2, x_{t_{2n-1}}, t_{2n-1}) &\leq \cdots \leq V(q_2, x_{t_1}, t_1) \leq \\ W(\|x_{t_1}\|) &= W(\|x_{t_1}(-r_2)\|). \end{aligned} \quad (4)$$

由已知条件 $|R(e, x)| \leq |x|$, $e = (q_1, q_2)$, 得

$$\|x_{t_1}(-r_2)\| \leq \|x_{t'_0}(-r_1)\|.$$

故有

$$\begin{aligned} w(|x(t)|) &\leq V(q_2, x_t, t) \leq V(q_2, x_{t_{2n+1}}, t_{2n+1}) \leq \\ V(q_2, x_{t_{2n-1}}, t_{2n-1}) &\leq \cdots \leq V(q_2, x_{t_1}, t_1) \leq \\ W(\|x_{t_1}\|) &\leq W(\|x_{t_1}(-r_2)\|) \leq W(\eta) < \\ W(\delta_1) &< w(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5)$$

得 $|x(t)| < \varepsilon$.

综合如上结果, 知平衡点是 $x = 0$ 稳定的, 定理1得证.

在定理1的基础上, 得如下推论.

推论 1 对于时滞混杂自动机 H , $x = 0$ 是 H 的平衡点, $|R((q, q'), x)| \leq |x|$, 存在一开集 $D \subseteq X$ 且 $0 \in D$, 定义 $D^* = C([-r, 0], D)$. 如果存在一个泛函 $V: D^* \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ s.t.

1) $V(0, t) = 0$;

2) 存在两个 K 类函数 w 和 W , 有

$$w(|x(t)|) \leq V(x_t, t) \leq W(\|x_t\|) \text{ 成立;}$$

3) $\frac{dV(x_t, t)}{dt} \leq 0$,

则平衡点 $x = 0$ 是稳定的.

证 构造一个Lyapunov泛函

$$V_0: Q \times D^* \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \text{ s.t.}$$

$\forall q \in Q, x_t \in D^*$, 有 $V_0(q, x_t, t) = V(x_t, t)$, 应用定理1可以得证.

定理1分析存在时滞的混杂系统稳定性的核心

是构造符合条件的 Lyapunov 泛函 V , V 与 q 有关, 不同的 q 对应不同的泛函形式. 因此, 对于时滞混杂自动机模型, 如果存在多个离散状态, 需要构造与离散状态相对应的多个 Lyapunov 泛函, 如果这些泛函在对应离散状态切换时刻的取值是非增的, 那么这个系统就是稳定的. 如果 H 中不含时滞, 定理 1 与文献 [6] 中的定理 2.3 类似.

文献 [11] 以抽象的五元组模型为基础, 研究了存在时滞得混杂系统的一般渐进稳定性, 稳定性的条件是构造 Lyapunov 函数, 在满足类似定理 1 的条件 1) 和 2) 的形式之外, 还要满足 Razumikhin 条件. 本文定理 1 与文献 [11] 不同之处分析如下:

1) 描述时滞混杂系统的模型不同. 文献 [11] 用抽象的五元组形式描述, 难以与实际系统建立对应关系, 而时滞混杂自动机模型尽管模型相对复杂, 但容易与实际系统进行对应;

2) 判断稳定性的出发点不同. 文献 [11] 在判断稳定性时, 立足于 Lyapunov 函数, 稳定性条件既要满足定理 1 中条件 1 的类似形式, 还要满足对 Lyapunov 函数施加的限制条件, 同时还需满足 Razumikhin 条件, 稳定性条件相比本文定理 1 更加严格. 即使对于连续性子系统为线性时不变系统的时滞混杂自动机, 找到满足文献 [11] 的稳定性条件也是不容易的. 文献 [11] 中给出的例子是针对在采样时刻具有分段恒定时滞的采样数据反馈控制系统(时滞混杂系统的一种类型)的稳定性进行了分析. 相对文献 [11], 定理 1 中条件的可操作性相对容易. 下面针对在时滞混杂自动机模型中的连续性子系统是线性时不变时滞系统的情况, 来分析其稳定性.

定理 2 对于由时滞混杂自动机表示的一类混杂系统 H , 具有 n 个离散状态 ($n \in \mathbb{N}$), 在第 i 个离散状态, 连续动态行为由线性时滞微分方程 $\dot{x} = A_{0i}x + A_{1i}x(t - r_i)$ 表示, $i = 1, 2, \dots, n$, 并且 $|R(e, x)| \leq |x|$, $e \in E$, 如果存在对称正定矩阵 P, Q_0, Q_1 , s. t. 对于 $i = 1, 2, \dots, n$, 有线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} M_i & r_0 P A_{1i} A_{0i} & r_0 P A_{1i} A_{1i} \\ r_0 A_{0i}^T A_{1i}^T P & -r_0 Q_0 & 0 \\ r_0 A_{1i}^T A_{1i}^T P & 0 & -r_0 Q_1 \end{bmatrix} < 0 \quad (6)$$

成立, 其中

$$M_i = (A_{0i} + A_{1i})^T P + P(A_{0i} + A_{1i}) + r_0(Q_0 + Q_1),$$

则当时滞 $r_i \in [0, r_0]$, $i = 1, 2, \dots, n$ 时, 系统是稳定的, 并且与系统的警戒条件 G 和初始条件 Init 无关.

为证明上述定理, 先给出一个引理.

引理 1^[13] 对于线性时不变时滞系统

$$\dot{x} = A_0 x + A_1 x(t - r),$$

若存在对称正定矩阵 P, Q_0, Q_1 , s. t.

$$\begin{bmatrix} M & r_0 P A_1 A_0 & r_0 P A_1 A_1 \\ r_0 A_0^T A_1^T P & -r_0 Q_0 & 0 \\ r_0 A_1^T A_1^T P & 0 & -r_0 Q_1 \end{bmatrix} < 0, \quad (7)$$

其中 $M = (A_0 + A_1)^T P + P(A_0 + A_1) + r_0(Q_0 + Q_1)$, 则当时滞 $r \in [0, r_0]$ 时, 系统是渐近稳定的.

基于引理 1 来证明定理 2.

证 如果矩阵 P, Q_0, Q_1 满足线性矩阵不等式(7), 意味着对于时滞混杂自动机 H 的每一个离散状态, 存在一个公共的 Lyapunov 泛函, 当时滞 $r_i \in [0, r_0]$, $i = 1, 2, \dots, n$ 时, 满足推论 1 的条件, 由此可以推出混杂系统在 $r_i \in [0, r_0]$, $i = 1, 2, \dots, n$ 时是稳定的. 因为在构造 Lyapunov 泛函的过程中, 并不涉及到警戒条件 G 和初始条件 Init , 因此该系统的稳定性与 G 和 Init 无关. 定理得证.

应当指出, 在定理 2 中提到的线性矩阵不等式的形式并不只局限于上面一种形式, 在研究线性时不变时滞系统时, 有多种构造线性矩阵不等式的方法(参考文献[13~15]), 可将这些方法用于对多模式网络化控制系统稳定性的分析.

4 仿真(Simulation)

例 1 对图 3 中的时滞混杂自动机, 具有两个离散状态, 对应的连续动态特征如图所示, 其中

$$A_{01} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, A_{11} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A_{02} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

警戒条件为:

$$G(q_1, q_2) = \{x \in X : x_1 + x_2 \geq 0\},$$

$$G(q_2, q_1) = \{x \in X : x_1 + x_2 < 0\},$$

初始条件:

$$\text{Init} = \{q_1\} \times \{(x_1(t), x_2(t)) : (x_1(t) = e^t, x_2 = \sin t), -0.5 \leq t \leq 0\}.$$

利用 MATLAB 中的 LMI 求解工具箱, 可求出相应的正定矩阵和时滞上界, 这里求得时滞上界 $r_0 = 0.5649$. 当子系统时滞 $r_i \in [0, r_0]$, $i = 1, 2$ 时, 系统是稳定的. 利用 SMU 开发的时滞微分方程求解工具箱 DDE23^[16], 画出了 $r_1 = 0.5$, $r_2 = 0.55$ 时 x 的演化轨迹. 图 4 为前一个子系统的状态轨迹, 图 5 为后一个子系统的状态轨迹, 图 6 表示发生切换后整个

系统的状态轨迹,可以看出,当 $r_1 < r_0$, $r_2 < r_0$ 时,系统是稳定的。

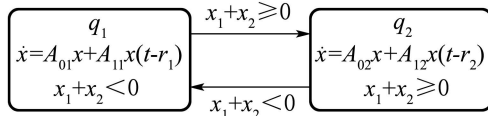


图3 时滞混杂自动机的例子

Fig. 3 Example of a hybrid automaton with delay

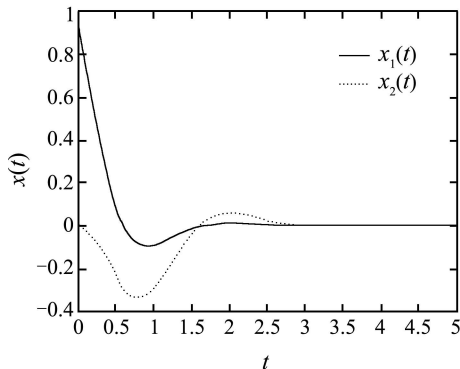


图4 第1个子系统的状态轨迹

Fig. 4 State trajectory of the first subsystem

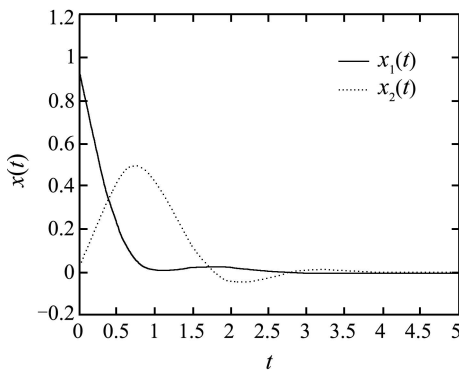


图5 第2个子系统的状态轨迹

Fig. 5 State trajectory of the second subsystem

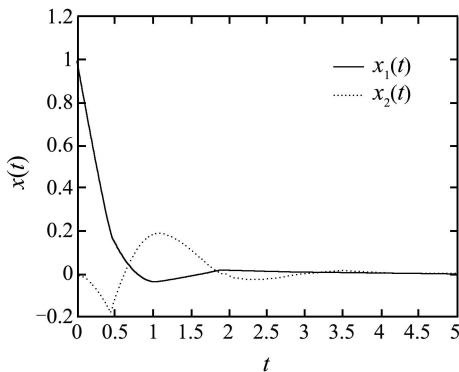


图6 时滞混杂自动机的状态轨迹

Fig. 6 State trajectory of the hybrid automaton with delay

时滞条件同上,改变系统的初始条件和警戒条件,令警戒条件为:

$$G(q_1, q_2) = \{x \in X : x_1^2 + x_2^2 \geq 0.4\},$$

$$G(q_2, q_1) = \{x \in X : x_1^2 + x_2^2 < 0.4\},$$

初始条件:

$$\text{Init} = \{q_1\} \times \{(x_1(t), x_2(t)) :$$

$$(x_1 = \sin t, x_2 = e^t), -0.5 \leq t \leq 0\},$$

在此条件下,系统的状态轨迹如图7所示,从图中看出系统仍是稳定的。

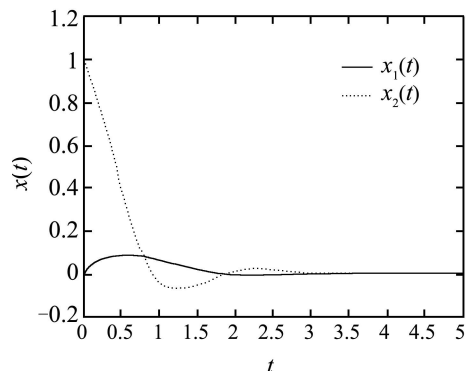


图7 Init和G改变后时滞混杂自动机的状态轨迹

Fig. 7 State trajectory of the hybrid automaton with delay after Init and G are changed

5 结论(Conclusion)

本文采用时滞混杂自动机模型描述存在多个运动模式的网络化控制系统,研究了系统的稳定性问题,分析这类系统稳定性的关键在于构造出与离散状态相关的Lyapunov泛函在离散状态的切换时刻为非增的.针对连续性子系统为线性时不变时滞系统的情况,寻找公共Lyapunov泛函的问题可以转化为线性矩阵不等式的求解问题,并可求出系统保持稳定的时滞上界,最后给出的仿真例子也验证了分析结果.应当指出,利用公共Lyapunov泛函来判断系统稳定性,条件显得太强,根据定理条件,如何构造在切换点非增的Lyapunov泛函并求解系统保持稳定的时滞上界,是需要进一步研究的工作。

参考文献(References):

- [1] ZHANG W, BRANICKY M S, PHILLIPS S M. Stability of networked control systems[J]. *IEEE Control Systems Magazine*, 2001, 21(1): 84 – 99.
- [2] 王成红. 关于自动化领域中若干基础科学问题的思考[J]. *自动化学报*, 2002, 28(增刊): 165 – 170.
(WANG Chenghong. Thinking about several problems of basic science in automation domain[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2002, 28(Suppl): 165 – 170.)

- [3] 王飞跃, 王成红. 基于网络控制的若干基本问题的思考和分析[J]. 自动化学报, 2002, 28(增刊): 171–176.
(WANG Feiyue, WANG Chenghong. On some basic issues in network-based direct control systems[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2002, 28(Suppl): 171–176.)
- [4] van der SCHAFT A, SCHUMACHER H. *An Introduction to Hybrid Dynamical Systems*[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2000.
- [5] ALUR R, COURCOUBETIC C, HENZINGER T A. Hybrid automaton: an algorithmic approach to the specification and verification of hybrid systems[C] // GROSSMAN R L, NERODE A, RAVN A P, et al. *Hybrid Systems, Lecture Notes in Computer Science*. Berlin: Springer-Verlag, 1993: 209–229.
- [6] BRANICKY M S. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1998, 43(4): 475–483.
- [7] YE H, MICHEL A N, HOU L. Stability theory for hybrid dynamical systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1998, 43(4): 461–474.
- [8] CHEN L, AIHARA K. Stability of genetic regulatory networks with time delay[J]. *IEEE Trans on Circuits System*, 2002, 49(5): 602–608.
- [9] DRIVER R D. *Ordinary and Delay Differential Equations*[M]. New York: Springer-Verlag, 1977.
- [10] HALE J K. *Theory of Functional Differential Equations*[M]. New York: Springer-Verlag, 1977.
- [11] YUAN R, JING Z, CHEN L. Uniform asymptotic stability of hybrid dynamical systems with delay[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2003, 48 (2): 344–348.
- [12] BOYD S, GHAOUI L E, FERON E, et al. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*[M]. Philadelphia, PA: SIAM, 1994.
- [13] BOUKAS E K, LIU Z K. *Deterministic and Stochastic Time Delay Systems*[M]. Boston: Birkhäuser, 2002.
- [14] KOLMANOVSKII V B, RICHARD J P. Stability of some linear systems with delays[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1999, 44(5): 984–989.
- [15] KHARITONOV V L. Robust stability analysis of time delay systems: A survey[J]. *Annual Reviews in Control*, 1999, 23(1): 185–196.
- [16] SHAMPINE L F, THOMPSON S. Solving DDEs in matlab[J]. *Applied Numerical Mathematics*, 2001, 37(4): 441–458.

作者简介:

郑 刚 (1974—), 男, 博士, 中国科学院软件研究所副研究员, 主要研究方向为网络控制与管理、混杂系统理论及应用, E-mail: gangzhengcn@yahoo.com.cn;

谭 民 (1962—), 男, 中国科学院自动化研究所研究员, 博士生导师, 主要研究方向为先进制造系统、多机器人系统、机器人控制、智能机器人, E-mail: tan@compsys.ia.ac.cn;

SONG Y H (1964—), 男, 英国皇家工程院院士, IEE Fellow, 中国科学院海外评审专家, Brunel大学电子与计算机工程系教授, 主要研究方向为电力系统控制、通信网络, E-mail: y.h.song@brunel.ac.uk.