

## 基于线性集结的预测控制器

张群亮, 席裕庚

(上海交通大学 自动化系, 上海 200240)

**摘要:** 针对一类受约束的线性离散系统, 研究了基于集结预测控制器的可行性问题. 通过一个列满秩的集结矩阵将维数较小的控制变量序列映射成在线优化变量序列, 在不缩短控制时域的情况下, 降低了在线优化变量的个数. 给出了优化变量可集结的充分条件, 当集结矩阵满足这个条件时, 在线求解优化问题总会得到可行解. 最后, 给出了一个仿真实例, 仿真结果很好地验证了本文的结论.

**关键词:** 集结; 预测控制; 可行性; 稳定性

**中图分类号:** TP13      **文献标识码:** A

## Predictive controller based on linear aggregation

ZHANG Qun-liang, XI Yu-geng

(Department of Automation, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

**Abstract:** For a class of constrained linear discrete-time systems, the feasibility problem of aggregation-based predictive controllers is investigated. Using an aggregation matrix with full column rank to map the on-line optimization variable sequence into a new one, the number of on-line optimization variables is cut down without reducing the control horizon. A sufficient condition is presented to check whether the control variable sequence can be aggregated. When the selected aggregation matrix satisfies this condition, a feasible solution can always be obtained by solving the on-line optimization problem. Finally, a simulation example is given to illustrate the proposed result.

**Key words:** aggregation; predictive control; feasibility; stability

### 1 引言(Introduction)

模型预测控制由于具有对模型要求低, 鲁棒性好, 易于处理约束等特点, 从而受到控制界的广泛关注<sup>[1]</sup>. 在实际中, 由于系统约束的存在, 预测控制器常常不能保证全局稳定性. 例如, 文[2]的可行域就是系统的初始不变集. 为了扩大系统的可行域, 常需要增加在线优化变量. 文[3]在状态反馈控制律的基础上增加了自由控制变量序列, 通过延长自由控制变量序列扩大了系统的可行域. 文[4]提出了一种根据系统实际状态在线优化终端约束变量来扩大可行域的预测控制算法. 然而, 无论是延长控制变量序列, 还是在线优化终端变量, 均需增加在线优化变量. 当系统维数较高或控制时域较长时, 在线优化变量的个数就会急剧膨胀, 再加上系统的各种约束条件, 在线求解的是一个大规模的非线性优化问题, 过重的在线计算量常常导致不可行问题.

针对上述问题, 文[5]提出了一种集结优化控制

变量的概念, 为解决上述矛盾提供了一种很好的思路. 集结优化变量的主要思想是: 将原优化变量序列以一定的方式映射到一个新的变量序列, 且后者未知变量的个数小于前者的未知变量个数. 当系统参数满足某种条件时, 通过在线优化映射后的变量序列也可以保证优化问题总存在可行解. 目前这项研究刚刚起步, 文[6]研究了一类衰减集结的预测控制器, 通过将原控制序列转化为一个具有等比性质的变量序列, 优化变量由原来的 $N$ 个减少为当前输入变量和一个衰减系数. 当控制时域较长时, 计算量可以大大减少. 本文要研究的是一种线性集结预测控制器, 利用一个列满秩的矩阵将原优化变量映射到一个含有较少未知变量的新序列, 从而达到降低优化变量个数的目的. 在实际应用中, 可以根据控制要求灵活地选取不同的集结矩阵, 既保证了系统的各种性能指标, 又降低了在线计算量.

## 2 预备知识(Preliminaries)

考虑如下的线性预测模型

$$x(k+i+1|k) = Ax(k+i|k) + Bu(k+i|k). \quad (1)$$

其中:  $x(k+i|k)$ 和  $u(k+i|k)$  分别为  $k$ 时刻对  $k+i$ 时刻的状态和输入预测值,  $A$ 和  $B$ 分别为具有适当维数的系统矩阵. 在实际应用中, 受执行机构物理特性的限制, 系统的输入常常需要满足一定约束, 在下面的分析过程中, 假定  $m$ 维控制输入满足约束

$$|u|_r \leq u_{r \max} \quad (r = 1, \dots, m). \quad (2)$$

其中:  $|\cdot|_r$ 代表向量第  $r$ 个元素的绝对值,  $u_{r \max}$ 代表相应向量元素的最大值.

对于上述预测模型, 文[6]研究了一类特殊形式的线性集结预测控制问题, 其集结策略选择为

$$u(k+i|k) = \rho^i(k)u(k|k). \quad (3)$$

在这种情况下, 优化变量序列减少为一个  $m$ 维控制变量  $u(k|k)$ 和一个衰减常数  $\rho(k)$ . 当控制时域  $N$ 较长时, 在线优化变量将大大减少, 计算量就会大大降低. 但是, 这种集结策略的结构已经固定, 而且形式非常特殊, 不能根据实际需要而进行灵活改变. 鉴于这种情况, 本文将研究更一般形式的线性集结问题, 给出一个线性集结框架. 本文在分析主要问题过程中, 会用到文[6]的一个假设, 下面首先给出:

**假设 1**<sup>[6]</sup> 假设  $\max |\lambda_i(A)| < 1$ ,  $\|A\| \triangleq \bar{\sigma}(A) < 1$ 成立.

## 3 线性集结预测控制器(Linear aggregation-based predictive controller)

对于系统(1), 在通常情况下, 一个稳定的预测控制算法需要在线求解如下优化问题:

$$\min_{U(k)} J(k) = \sum_{i=0}^{N-1} \{x^T(k+i|k)Qx(k+i|k) + u^T(k+i|k)Ru(k+i|k)\}, \quad (4)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x(k+i+1|k) = Ax(k+i|k) + Bu(k+i|k), \\ x(k|k) = x(k), u(k+i|k) \in U, \\ x(k+N|k) \in X, \\ U(k) = [u(k|k) \ \dots \ u(k+N-1|k)]. \end{cases} \quad (5)$$

其中:  $x(k)$ 为系统在  $k$ 时刻的状态,  $Q > 0$ 和  $R > 0$ 分别为权矩阵,  $U(k)$ 为一个在线优化的控制序列.  $U$ 表示输入约束的集合, 而  $X$ 是系统终端状态约束.

对于这种预测控制算法, 当系统的控制时域较长

时, 在线求解的约束就会急剧增加, 常造成过大的在线计算量, 从而导致单位采样时间内无法完成必要的计算. 而文[5]指出对优化变量序列进行集结可以直接减少在线优化变量的个数. 在本文当中, 考虑如下形式的控制变量集结:

$$U(k) = HV(k) = \begin{bmatrix} u(k|k) \\ u(k+1|k) \\ \vdots \\ u(k+N-1|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m^{11} & 0 & \dots & 0 \\ I_m^{12} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ I_m^{1m_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_m^{21} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & I_m^{2m_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_m^{pm_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(k) \\ v_2(k) \\ \vdots \\ v_p(k) \end{bmatrix}. \quad (6)$$

其中:  $I_m^{ij}$  ( $i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, m_i$ )均表示  $m$ 维的单位阵, 且有  $\sum_{i=1}^p m_i = N$ 成立. 经过集结后, 在线求解的优化问题为

$$\min_{V(k)} J(k) = \sum_{i=0}^{N-1} \{x^T(k+i|k)Qx(k+i|k) + U^T(k)\tilde{R}U(k)\}, \quad (7)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \begin{bmatrix} x(k+1|k) \\ \vdots \\ x(k+N|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ \vdots \\ A^N \end{bmatrix} x(k|k) + \begin{bmatrix} B & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A^{N-1}B & \dots & B \end{bmatrix} U(k), \\ x(k|k) = x(k), U(k) = HV(k), \\ v_j(k) \in U(j = 1, \dots, p), x(k+N|k) \in X. \end{cases} \quad (8)$$

其中  $\tilde{R}$ 代表以  $R$ 为对角元素的对角矩阵.

从式(6)可以看出, 当  $p = N$ 时, 映射前后的优化变量个数相等, 表示没有进行集结; 当  $p < N$ 时, 在线优化变量个数可以减少  $N - p$ 个, 降低了在线运算负担.

**注 1** 比较优化问题(4)(5)和问题(7)(8), 虽然二者在形式上几乎相同, 但前者的相关结论已不再适用于后者, 因为后者在线求解的不再是一个自由变量序列, 而是要满

足式(6)的一个结构化的变量序列. 因此, 必须重新对后者的可行性进行分析, 建立新的可行性条件.

在下面问题的分析过程中, 将会用到一些符号, 在此首先进行定义.

**定义 1** 设  $Y$  为一闭紧集,  $0 \in Y$ , 记  $\delta(Y)$  为  $Y$  的边界, 定义  $\bar{r}(Y) = \max_{y \in \delta(Y)} \|y\|$ ,  $\bar{r}(Y)$  可以理解为一闭集  $Y$  的最小外接超球半径.

**4 集结框架的可行性分析(Feasibility analysis of aggregation framework)**

针对上节式(7)(8)表示的集结预测控制器, 有如下可行性结论:

**定理 1** 对于式(6)表示的线性集结框架, 如果其结构常数和系统参数满足如下条件

$$(\|A\| - 1)\bar{r}(X) + (\|A^{N-m_1}B\| + \dots + \|A^{m_p}B\|)\bar{r}(2U) + \|B\|\bar{r}(U) \leq 0, \quad (9)$$

则在  $k$  时刻式(7)(8)存在可行解时, 在  $k + 1$  时刻也一定存在一个满足式(6)集结的可行解. 其中  $\bar{r}(X)$  和  $\bar{r}(2U)$  分别表示终端状态约束和控制输入约束的最小超球半径.

**证** 假定  $k$  时刻, 以  $x(k|k)$  为系统的初始状态, 在线求解式(7)(8)得到的一个满足式(6)的可行解为

$$U^*(k) = \underbrace{[v_1^*(k) \dots v_1^*(k)]}_{m_1} \dots \underbrace{[v_p^*(k) \dots v_p^*(k)]}_{m_p}. \quad (10)$$

将其作为输入代入到系统(1)当中, 得到相应的状态为:

$$x^*(k + 1|k) = Ax(k|k) + Bv_1^*(k), \quad (11)$$

$$\vdots$$

$$x^*(k + m_1 + m_2|k) = A^{m_1+m_2}x(k|k) + \sum_{j=m_2}^{m_1+m_2-1} A^j B v_1^*(k) + \sum_{j=0}^{m_2-1} A^j B v_2^*(k), \quad (12)$$

$$\vdots$$

$$x^*(k + N|k) = A^N x(k|k) + [A^{N-1}B \ A^{N-2}B \ \dots \ B]H(V^*(k))^T, \quad (13)$$

并且  $x^*(k + N|k) \in X$ , 而性能指标为  $J^*(k)$ . 在  $k + 1$  采样时刻, 如果取控制序列为

$$U(k + 1) = \underbrace{[v_1^*(k) \dots v_1^*(k)]}_{m_1-1} \underbrace{[v_2^*(k) \dots v_2^*(k)]}_{m_2} \dots \underbrace{[v_p^*(k) \dots v_p^*(k) \ 0]}_{m_p+1}. \quad (14)$$

则以  $x^*(k + 1|k)$  为初始状态, 以  $U(k + 1)$  为输入向量, 得到的状态序列为

$$[x^*(k + 2|k) \ \dots \ x^*(k + m_1|k) \ x^*(k + m_1 + 1|k) \ \dots \ x^*(k + N|k) \ Ax^*(k + N|k)]. \quad (15)$$

且有  $J(k + 1) \leq J^*(k)$ . 但是,  $U(k + 1)$  并不是式(7)(8)的一个可行解, 因为它不满足式(6)的集结结构. 假定一个满足式(6)集结的解为

$$U_f(k + 1) = \underbrace{[v_1^*(k) \dots v_1^*(k)]}_{m_1} \dots \underbrace{[v_p^*(k) \dots v_p^*(k)]}_{m_p}. \quad (16)$$

综合式(14)(16), 可以看出可行解  $U_f(k + 1)$  和  $U(k + 1)$  存在着如下的线性叠加关系

$$U(k + 1) + \underbrace{[0 \ \dots \ v_1^*(k) - v_2^*(k)]}_{m_1} \\ \underbrace{[0 \ \dots \ v_2^*(k) - v_3^*(k) \ \dots \ 0 \ \dots \ v_p^*(k) - 0]}_{m_2 \quad m_p} = U_f(k + 1). \quad (17)$$

由于  $U(k + 1)$  对应的状态序列是已知的, 且有  $\|Ax^*(k + N|k)\| \in X$ . 同时考虑到  $U_f(k + 1)$  和  $U(k + 1)$  存在式(17)的线性叠加关系, 那么笔者就希望将  $U_f(k + 1)$  对应的状态序列和式(15)序列建立联系, 以此来分析  $U_f(k + 1)$  作为可行解的条件.

在  $k + 1$  时刻, 假设以  $\hat{x}(k + 1|k + 1) = x^*(k + 1|k)$  为系统的初始状态, 以  $U_f(k + 1)$  为输入得到的状态序列为  $[\hat{x}(k + 2|k + 1) \ \dots \ \hat{x}(k + N + 1|k + 1)]$ , 则有:

$$\hat{x}(k + 2|k + 1) = Ax^*(k + 1|k) + Bv_1^*(k) = x^*(k + 2|k), \quad (18)$$

$$\vdots$$

$$\hat{x}(k + m_1 + m_2 + 1|k + 1) = A\hat{x}(k + m_1 + m_2|k + 1) + Bv_2^*(k) = Ax^*(k + m_1 + m_2|k) + A^{m_2}B(v_1^*(k) - v_2^*(k)) + Bv_2^*(k) = x^*(k + m_1 + m_2 + 1|k) + A^{m_2}B(v_1^*(k) - v_2^*(k)) + B(v_2^*(k) - v_3^*(k)), \quad (19)$$

$$\vdots$$

$$\hat{x}(k + N + 1|k + 1) = A\hat{x}(k + N|k + 1) + Bv_p^*(k) = Ax^*(k + N|k) + A^{N-m_1}B(v_1^*(k) - v_2^*(k)) +$$

$$A^{N-m_1-m_2} (v_2^*(k) - v_3^*(k)) + \dots + B(v_p^*(k) - 0). \quad (20)$$

注意到  $\hat{x}(k+i+1|k+1)$  和  $x^*(k+i+1|k)$  分别是由控制序列  $U_f(k+1)$  和  $U(k+1)$  序列中的元素作为输入得到的对应状态. 如果  $U_f(k+1)$  是  $k+1$  时刻的一个可行解, 那么由这个序列作为输入得到终端状态也应该满足终端状态约束条件. 因为  $k$  时刻的终端状态  $x^*(k+N|k)$  是满足终端约束  $X$  集合的, 所以只要让  $U_f(k+1)$  序列作为输入得到的终端状态也满足终端约束集合即可. 为此, 建立如下关系:

$$\begin{aligned} & \|\hat{x}(k+N+1|k+1)\| = \\ & \|Ax^*(k+N|k) + A^{N-m_1}B(v_1^*(k) - v_2^*(k)) + \dots + \\ & B(v_p^*(k) - 0)\| \leq \\ & \|Ax^*(k+N|k)\| + \|A^{N-m_1}B(v_1^*(k) - \\ & v_2^*(k))\| + \dots + \|B(v_p^*(k))\|. \end{aligned} \quad (21)$$

令

$$\|v_{i+1}^*(k) - v_i^*(k)\| \leq \bar{r}(2U), \quad \|v_i^*(k)\| \leq \bar{r}(U). \quad (22)$$

如果有下式成立:

$$\begin{aligned} & \|\hat{x}(k+N+1|k+1)\| \leq \\ & \|A\| \|x^*(k+N|k)\| + \\ & (\|A^{N-m_1}B\| + \dots + \|A^{m_p}B\|) \cdot \\ & \bar{r}(2U) + \|B\| \bar{r}(U) \leq \\ & \|A\| \bar{r}(X) + (\|A^{N-m_1}B\| + \dots + \\ & \|A^{m_p}B\|) \bar{r}(2U) + \|B\| \bar{r}(U) \leq \bar{r}(X), \end{aligned} \quad (23)$$

则  $\hat{x}(k+N+1|k+1) \in X$ , 即  $U_f(k+1)$  是  $k+1$  时刻的一个可行解. 定理1成立时保证了式(23)成立.

证毕.

**注2** 由定理1可以看出,  $U = HV$  集结策略是否可行与映射矩阵  $H$  关系密切. 实际上, 定理1具有两方面的功能: 第一, 判断给定的  $H$  矩阵是否可行, 第二, 当给定的  $H$  矩阵结构不存在可行解时, 可以根据定理1来调整它的结构参数以使得式(9)条件成立.

**注3** 由于  $\|A\| < 1$ , 因此  $\|A^{N-m_1}B\| \leq \|A^{N-m_1-m_2}B\| \leq \dots \leq \|A^{m_p}B\|$ , 当  $m_1, \dots, m_p$  选择适当时,  $\|A^{N-m_1}B\| + \dots + \|A^{m_p}B\|$  的值就会非常小, 因此, 对于满足假设1的系统来说, 总可以找到满足式(9)的集结矩阵  $H$ .

**注4** 定理1给出了分段线性集结可行性方面的结论. 如果在式(7)性能指标中, 令  $Q = \lambda I > 0$ ,  $N = N_s$ , 其中  $N_s$  满足  $x(k+N_s-1) \notin \bar{r}(X)$ , 且  $x(k+N_s) \in \bar{r}(X)$ , 控

制输入约束集取  $\min(\bar{r}(U), \frac{(1-\|A\|\bar{r}(X))}{2s\|AB\|+\|B\|})$ , 则优化可行解必能使得系统状态收敛于终端约束集.

证明略.

## 5 仿真算例(Simulation example)

假定受控系统为

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.7 & -0.5 \\ 0.45 & 0.5 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.2 \end{bmatrix} u(k),$$

$$|u(k)| \leq 0.5.$$

当控制时域  $N = 7$  时, 选择集结矩阵

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

当  $\bar{r}(X) = 0.15$  时, 将上述参数代入到定理1进行计算, 可知集结矩阵  $H$  是可行的. 假定系统的初始状态  $x(k) = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$ , 求解如下的优化问题:

$$\begin{aligned} \min_{U(k)} J(k) &= \sum_{i=0}^6 x^T(k+i|k) Q x(k+i|k) + \\ & U^T(k) \tilde{R} U(k), \end{aligned}$$

s.t.

$$x(k|k) = x(k),$$

$$U(k) = HV(k),$$

$$|v_j(k)| \leq 0.2 \quad (j = 1, 2, 3),$$

$$x(k+7|k) \in X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 0.15\},$$

$$\begin{bmatrix} x(k+1|k) \\ \vdots \\ x(k+7|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ \vdots \\ A^7 \end{bmatrix} x(k|k) + C_B H \begin{bmatrix} v_1(k) \\ v_2(k) \\ v_3(k) \end{bmatrix}.$$

将在线优化得到变量序列的第一项作为控制输入应用到系统当中, 系统轨迹如图1、图2所示, 其中实线和虚线分别表示系统的闭环和开环响应曲线.

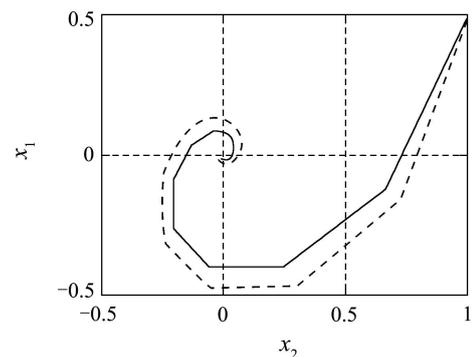
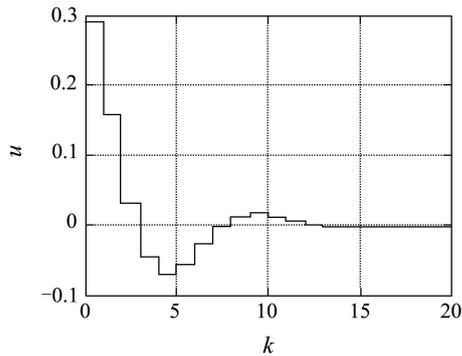


图1 状态  $x_1$  和  $x_2$  轨迹

Fig. 1 Trajectories of  $x_1$  and  $x_2$

图2 控制输入  $u$ Fig. 2 Control input  $u$ 

从图中可以看出, 当集结策略满足定理1时, 集结变量总存在可行解, 说明了定理1的有效性.

## 6 结论(Conclusion)

由于预测控制算法在线求解的常常是一个非线性优化问题, 计算负担很重. 特别是当控制时域较长时, 在线优化变量就会急剧增多, 单位采样时间内需要完成的计算量很大. 为了降低在线计算量, 本文直接从减少在线优化变量入手, 针对一类带有约束的离散系统, 给出了一类控制变量的线性集结框架. 通过将原优化变量序列乘以一个列满秩的非方阵, 从而得到一个维数较小的新变量序列. 当集结矩阵的结构常数满足一定的条件时, 在线优化新的变量序列总能得到满足结构的可行解.

## 参考文献(References):

- [1] 席裕庚. 预测控制[M]. 北京: 国防工业出版社, 1993.  
(XI Yugeng. *Predictive Control*[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1993.)
- [2] KOTHARE M V, BALAKRISHNAN V, MORARI M. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities[J]. *Automatica*, 1996, 32(10): 1361 – 1379.
- [3] LEE J W. Exponential stability of constrained receding horizon control with terminal ellipsoid constraints[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2000, 45(1): 83 – 88.
- [4] BLOEMEN H H J, van de BOOM T J J, VERBRUGGEN H B. Optimizing the end-point state-weighting matrix in model-based predictive control[J]. *Automatica*, 2002, 38(6): 1061 – 1068.
- [5] 杜晓宁. 预测控制新型优化策略的研究及分析[D]. 上海: 上海交通大学, 2001.  
(DU Xiaoning. *Study and analysis on new optimization strategy of predictive control*[D]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2001.)
- [6] LIU B, XI Y G. An aggregation based robust model predictive controller[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2003, 29(6): 801 – 808.

## 作者简介:

**张群亮** (1978—), 男, 上海交通大学自动化系博士研究生, 感兴趣的研究方向为约束预测控制理论及方法, E-mail: hbqlzhao@sjtu.edu.cn;

**席裕庚** (1946—), 男, 上海交通大学自动化系教授, 博士生导师, 主要研究领域包括预测控制理论与应用和智能机器人等.