

“小车-单摆”系统镇定设计的一种改进

叶华文¹, 钟守铭², 凌玉华¹, 戴冠中³

(1. 中南大学 信息与工程学院, 湖南 长沙 410083; 2. 电子科技大学 应用数学学院, 四川 成都 610054;

3. 西北工业大学 自动化学院, 陕西 西安 710072)

摘要: 为“小车-单摆”系统设计了一个新的镇定控制. 考察前人的前推迭代设计, 发现先期过程已经使部分子系统输入状态稳定, 特别是, 该子系统在有关反馈设计后仍然输入状态稳定. 因此, 在最后迭代时不必构造李雅普诺夫函数, 并设计出简单于前人的镇定控制. 给出了满意的仿真结果.

关键词: 镇定; 输入状态稳定; 倒立摆

中图分类号: TP202 **文献标识码:** A

Stabilization of the cart-pendulum system: an improved design

YE Hua-wen¹, ZHONG Shou-ming², DAI Yu-hua¹, DAI Guan-zhong³

(1. School of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha Hunan 410083, China;

2. College of Applied Mathematics, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu Sichuan 610054, China;

3. College of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an Shaanxi 710072, China)

Abstract: In this note, a new stabilizing control is presented for the cart-pendulum system. A previous design via the forwarding technique is reviewed, and the first two steps are found to result in an input-to-state stable (ISS) subsystem already. Especially, the subsystem remains ISS subject to a certain feedback design. Thus, in the final step, there is no need to construct a Lyapunov function any longer, and a stabilizer can be suggested which is simpler than the existing one. Finally, desirable simulation results are provided.

Key words: stabilization; input-to-state stability; inverted pendulum

1 引言(Introduction)

前馈型系统是较难镇定的一类系统, 本文考察的“小车-单摆”系统是一个典型的前馈型系统, 描述为^[1]

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = s_0, \dot{s}_0 = u_0, \dot{t}_0 = r_0, \\ \dot{r}_0 = \frac{2t_0 r_0^2}{1+t_0^2} + t_0 \sqrt{1+t_0^2} - u_0 \sqrt{1+t_0^2}. \end{cases} \quad (1)$$

其中 u_0 为控制输入.

关于系统 (1) 的镇定, 文献 [1] 运用李雅普诺夫前推方法给出过一种智巧的设计, 但由于在迭代设计的最后步骤中仍然依赖李雅普诺夫函数, 导致了较为复杂的镇定控制. 不同于文献 [1], 由于推算出迭代过程中的部分子系统具有输入状态稳定性, 特别是, 该子系统在某一反馈设计后仍然为输入状态稳定, 因此, 本文在迭代的最后步骤中不必继续构造李雅普诺夫函数, 并设计出相对简单的控制律.

下面的结论将在稳定性分析中用到.

引理 1^[2] 考察非线性控制系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}. \quad (2)$$

其中: $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$; $\mathbf{f}$ 关于 $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ 局部李普希茨. 系统 (2) 为输入状态稳定 (ISS) 当且仅当存在连续可微的正定径向无界函数 V 和函数 $\alpha_i \in \kappa_\infty (i=1, 2)$ 使得对任意 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$,

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \leq -\alpha_1(|\mathbf{x}|) + \alpha_2(|\mathbf{u}|).$$

引理 2^[3] 考察三角结构系统

$$\Sigma: \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_2).$$

其中: $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$; $\mathbf{f}_1(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{f}_2(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. 如果 $\mathbf{x}_1$ 子系统关于 $\mathbf{x}_2$ 为输入状态稳定, $\mathbf{x}_2$ 子系统全局渐近稳定 (GAS), 那么系统 Σ 为 GAS.

下面两个不等式在后面会多次用到^[4]:

$$\mu^{N-1}v \leq \frac{N-1}{N}\alpha^{N/(N-1)}\mu^N + \frac{v^N}{N\alpha^N},$$

$$\forall \mu, v, \alpha > 0, N > 1, \quad (3)$$

$$\mu v \leq 1/4L\mu^2 + Lv^2, \forall \mu, v, L > 0. \quad (4)$$

2 镇定新设计(New stabilization design)

现在给出镇定系统 (1) 的完整过程. 分为 3 步, 由下而上依次加进积分器.

Step 1 镇定 (t_0, r_0) 子系统. 初步设计

$$u_0 = 2t_0(1 + \frac{r_0^2}{(1+t_0^2)^{3/2}}) + r_0.$$

于是 (t_0, r_0) 子系统重写为

$$\begin{cases} \dot{t}_0 = r_0, \\ \dot{r}_0 = -(t_0 + r_0)\sqrt{1+t_0^2}. \end{cases} \quad (5)$$

设置李雅普诺夫函数

$$V_0 = \frac{1}{2}r_0^2 + \frac{1}{3}((1+t_0^2)^{3/2} - 1) + \frac{1}{2}r_0t_0.$$

该函数正定径向无界, 因为

$$V_0 \geq \frac{1}{2}(r_0 + \frac{1}{2}t_0)^2 + \frac{5}{24}t_0^2.$$

用 V_0 可检验系统 (5) 为 GAS, 即 $u_0 = 2t_0(1 + \frac{r_0^2}{(1+t_0^2)^{3/2}}) + r_0$ 为 (t_0, r_0) 子系统的镇定控制. 事实上, 计算 V_0 沿闭环 (5) 的解的时间微分有

$$\dot{V}_0 \leq -\frac{1}{4}(r_0^2 + t_0^2)\sqrt{1+t_0^2}.$$

Step 2 镇定 (s_0, t_0, r_0) 子系统. 此时令

$$u_0 = u_1 + 2t_0(1 + \frac{r_0^2}{(1+t_0^2)^{3/2}}) + r_0.$$

于是 (s_0, t_0, r_0) 子系统描述为

$$\begin{cases} \dot{s}_0 = u_1 + 2t_0(1 + \frac{r_0^2}{(1+t_0^2)^{3/2}}) + r_0, \\ \dot{t}_0 = r_0, \\ \dot{r}_0 = -(t_0 + r_0)\sqrt{1+t_0^2} - u_1\sqrt{1+t_0^2}. \end{cases}$$

为了简化系统形式, 令

$$s_1 = s_0 + \frac{2r_0}{\sqrt{1+t_0^2}} + t_0, \quad t_1 = t_0, \quad r_1 = r_0,$$

则 (s_0, t_0, r_0) 子系统重写为

$$\begin{cases} \dot{s}_1 = -u_1, \quad \dot{t}_1 = r_1, \\ \dot{r}_1 = -(t_1 + r_1)\sqrt{1+t_1^2} - u_1\sqrt{1+t_1^2}. \end{cases} \quad (6)$$

可验证 $u_1 = \frac{1}{10}s_1$ 为系统 (6) 的镇定控制. 事实上,

设置李雅普诺夫函数 $V_1 = 5s_1^2 + \frac{1}{6}|s_1|^3 + V_0$, 该函

数沿式 (6) 的解的时间微分为

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &\leq -s_1^2 - \frac{1}{20}|s_1|^3 - \frac{1}{4}(r_1^2 + t_1^2)\sqrt{1+t_1^2} - \\ &\quad \frac{1}{20}(2r_1 + t_1)s_1\sqrt{1+t_1^2} \leq \\ &\quad -s_1^2 - \frac{1}{20}|s_1|^3 - \frac{1}{5}r_1^2\sqrt{1+t_1^2} - \frac{9}{40}t_1^2\sqrt{1+t_1^2} + \\ &\quad \frac{3}{40}s_1^2 + \frac{3}{40}s_1^2|t_1|. \end{aligned}$$

运用不等式 (3) 可得

$$\begin{aligned} \frac{3}{40}s_1^2|t_1| &\leq \frac{3}{40}(\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times |s_1|^3 + \frac{1}{3} \times 4 \times |t_1|^3) = \\ &\quad \frac{1}{40}|s_1|^3 + \frac{1}{10}|t_1|^3. \end{aligned}$$

并注意到 $-\frac{1}{10}t_1^2\sqrt{1+t_1^2} \leq -\frac{1}{10}|t_1|^3$, 因此有

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &\leq \\ &\quad -\frac{17}{40}s_1^2 - \frac{1}{40}|s_1|^3 - \frac{1}{5}r_1^2\sqrt{1+t_1^2} - \frac{1}{8}t_1^2\sqrt{1+t_1^2} \triangleq \\ &\quad -W(s_1, t_1, r_1). \end{aligned} \quad (7)$$

Step 3 镇定 (x_0, s_0, t_0, r_0) 系统. (x_0, s_0, t_0, r_0) 系统现在描述为

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = s_1 - \frac{2r_1}{\sqrt{1+t_1^2}} - t_1, \\ \dot{s}_1 = -u_1, \quad \dot{t}_1 = r_1, \\ \dot{r}_1 = -(t_1 + r_1)\sqrt{1+t_1^2} - u_1\sqrt{1+t_1^2}. \end{cases}$$

为了简化系统形式, 也为了使 x_0 子系统明显可控, 令 $x_1 = x_0 + 2\ln(t_1 + \sqrt{1+t_1^2}) + 10s_1$, 于是有

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = s_1 - t_1 - 10u_1, \quad \dot{s}_1 = -u_1, \quad \dot{t}_1 = r_1, \\ \dot{r}_1 = -(t_1 + r_1)\sqrt{1+t_1^2} - u_1\sqrt{1+t_1^2}. \end{cases}$$

现在令 $u_1 = u_2 + \frac{1}{10}s_1$, 有

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -10u_2 - t_1, \quad \dot{s}_1 = -u_2 - \frac{1}{10}s_1, \quad \dot{t}_1 = r_1, \\ \dot{r}_1 = -(t_1 + r_1 + \frac{1}{10}s_1)\sqrt{1+t_1^2} - u_2\sqrt{1+t_1^2}. \end{cases} \quad (8)$$

式 (7) 启发笔者验证 (s_1, t_1, r_1) 子系统关于 u_2 的输入状态稳定性, 得到肯定的结果 (实际上, Step 1 和 Step 2 中的设计都使相应子系统为输入状态稳定), 这使笔者自然地想到运用引理 2, 但由于 x_1 子系统存在 $-t_1$ 项, 不可以简单设计 $u_2 = \frac{1}{10}x_1$. 尽管如此, 笔者并未就此止步, 仍然希望运用引理 2 得到简单控制, 于是设计

$$u_2 = \frac{1}{10}x_1 - \frac{1}{10}t_1, \quad (9)$$

使 x_1 子系统全局渐近稳定, 并大胆猜测下面的系统关于 v 为输入状态稳定:

$$\begin{cases} \dot{s}_1 = -\frac{1}{10}s_1 + \frac{1}{10}t_1 + v, \dot{t}_1 = r_1, \\ \dot{r}_1 = -(t_1 + r_1)\sqrt{1+t_1^2} - \frac{1}{10}s_1\sqrt{1+t_1^2} + \\ \frac{1}{10}t_1\sqrt{1+t_1^2} + v\sqrt{1+t_1^2}. \end{cases} \quad (10)$$

很显然, 如果猜测成立, 那么闭环

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1, \dot{s}_1 = -\frac{1}{10}s_1 + \frac{1}{10}t_1 - \frac{1}{10}x_1, \dot{t}_1 = r_1, \\ \dot{r}_1 &= -(t_1 + r_1)\sqrt{1+t_1^2} - \frac{1}{10}s_1\sqrt{1+t_1^2} + \\ &\frac{1}{10}t_1\sqrt{1+t_1^2} - \frac{1}{10}x_1\sqrt{1+t_1^2} \end{aligned}$$

为GAS, 即 $u_2 = \frac{1}{10}x_1 - \frac{1}{10}t_1$ 为系统(8)的镇定控制.

通过细致于Step2的不等式估计, 可证实系统(10)关于 v 为输入状态稳定. 下面是详细的推算过程.

仍然运用李雅普诺夫函数 V_1 , 沿着系统 (10) 的解计算 V_1 的时间微分得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &\leq [-s_1^2 - \frac{1}{20}|s_1|^3 + s_1t_1 + \frac{1}{20}s_1^2|t_1| - \\ &\frac{1}{2}(r_1^2 + t_1^2)\sqrt{1+t_1^2} - \frac{1}{2}t_1r_1\sqrt{1+t_1^2} - \\ &(\frac{1}{10}r_1s_1 - \frac{1}{10}r_1t_1 + \frac{1}{20}t_1s_1 - \frac{1}{20}t_1^2)\sqrt{1+t_1^2}] + \\ &10s_1v + \frac{1}{2}s_1^2|v| + (r_1 + \frac{1}{2}t_1)v\sqrt{1+t_1^2} \triangleq \\ &\Pi + 10s_1v + \frac{1}{2}s_1^2|v| + (r_1 + \frac{1}{2}t_1)v\sqrt{1+t_1^2}. \end{aligned}$$

首先简化方括号中的算式 (其间需要运用不等式 (3) (4)), 得到

$$\begin{aligned} \Pi &\leq -s_1^2 - \frac{1}{20}|s_1|^3 + s_1t_1 + \frac{1}{20}s_1^2|t_1| - \\ &(\frac{1}{400} + \frac{179}{400})r_1^2\sqrt{1+t_1^2} - \frac{17}{40}t_1^2\sqrt{1+t_1^2} - \\ &\frac{2}{5}t_1r_1\sqrt{1+t_1^2} + \frac{3}{40}s_1^2 + \frac{3}{40}s_1^2|t_1| \leq \\ &-\frac{1}{400}s_1^2 - \frac{1}{120}|s_1|^3 - \frac{1}{400}r_1^2\sqrt{1+t_1^2} - \frac{3}{7160} \\ &t_1^2\sqrt{1+t_1^2} - \frac{240}{716}t_1^2\sqrt{1+t_1^2} + \frac{100}{369}t_1^2 + \frac{1}{6}|t_1|^3 \leq \\ &-\frac{1}{400}r_1^2\sqrt{1+t_1^2} - \frac{3}{7160}t_1^2\sqrt{1+t_1^2} - \\ &\frac{1}{120}|s_1|^3 - \frac{1}{400}s_1^2. \end{aligned}$$

另外, 运用不等式 (4) 可得

$$(r_1 + 1/2t_1)v\sqrt{1+t_1^2} \leq$$

$$\frac{1}{800}r_1^2\sqrt{1+t_1^2} + \frac{1}{7160}t_1^2\sqrt{1+t_1^2} + \frac{1295}{2}(v^2 + v^2|t_1|).$$

于是得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &\leq -\frac{1}{800}r_1^2\sqrt{1+t_1^2} - \frac{1}{3580}t_1^2\sqrt{1+t_1^2} - \\ &\frac{1}{120}|s_1|^3 - \frac{1}{400}s_1^2 + 10s_1v + \frac{1}{2}s_1^2|v| + \\ &\frac{1295}{2}v^2 + \frac{1295}{2}v^2|t_1|. \end{aligned}$$

对 s_1v , s_1^2v , $v^2|t_1|$ 运用不等式 (3) (4), 使 v^2 , $|v|^3$ 的系数充分大 (从而使 s_1^2 , $|s_1|^3$, $|t_1|^3$ 的系数充分小), 并注意到 $-t_1^2\sqrt{1+t_1^2} \leq -|t_1|^3$, 必然存在正常数 $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6$ 使得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &\leq -n_1r_1^2\sqrt{1+t_1^2} - n_2t_1^2\sqrt{1+t_1^2} - \\ &n_3|s_1|^3 - n_4s_1^2 + n_5v^2 + n_6|v|^3. \end{aligned}$$

由引理 1 知道系统 (10) 关于 v 为输入状态稳定.

注 1 针对系统 (8) 中 $-t_1$ 造成的困难, 文献 [1] 不是如本文一样确定相应的输入状态稳定性, 而是继续进行坐标变换和构造相应的李雅普诺夫函数, 并在李雅普诺夫函数的指导下设计 u_2 . 为了比较, 下面介绍文献 [1] 对 u_2 的设计 (个别算式因为李雅普诺夫函数和估计的差异与原文稍有不同). 引入坐标变换

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + s_0 + \frac{r_0}{\sqrt{1+t_0^2}}, \\ s_2 &= s_1, \quad t_2 = t_1 = t_0, \quad r_2 = r_1 = r_0. \end{aligned}$$

系统 (8) 重写为

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = -10u_2 + \frac{t_2r_2^2}{(1+t_2^2)^{3/2}}, \\ \dot{s}_2 = -u_2 - \frac{1}{10}s_2, \quad \dot{t}_2 = r_2, \\ \dot{r}_2 = -(t_2 + r_2 + \frac{1}{10}s_2 + u_2)\sqrt{1+t_2^2} \end{cases} \quad (11)$$

注意到

$$\begin{aligned} |\frac{t_2r_2^2}{(1+t_2^2)^{3/2}}| &\leq \\ \frac{5}{3}W(s_2, t_2, r_2) &= \frac{5}{3}W(s_1, t_1, r_1), \end{aligned}$$

设置李雅普诺夫函数

$$\begin{aligned} V_2 &= 2V_1 + \int_0^{|x_2|} \sigma(s)ds, \\ \sigma(0) &= 0, \quad 0 < \sigma(s) \leq |s|, \quad \forall s \neq 0, \\ \liminf_{s \rightarrow +\infty} \sigma(s) &> 0. \end{aligned}$$

该函数沿着系统 (11) 的解的时间微分为

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &\leq -\frac{1}{3}W(s_2, t_2, r_2) - ((2r_2 + t_2)\sqrt{1+t_2^2} + \\ &20s_2 + s_2|s_2| + 10\sigma(x_2))u_2. \end{aligned}$$

为了使闭环 GAS, 一种方便的选择为

$$u_2 = (2r_2 + t_2)\sqrt{1 + t_2^2} + 20s_2 + s_2|s_2| + 10\sigma(x_2). \quad (12)$$

注2 本文前两步设计与文献[1]一致,第3步因为思考角度不同而得到不同的 u_2 控制.比较式(9)和(12),本文的设计显然简单于文献[1].

注3 不难看到,如果不从输入状态稳定的角度考察系统(8),将很难得到简单控制 $u_2 = \frac{1}{10}x_1 - \frac{1}{10}t_1$;同样可看到,不等式(3)(4)在输入状态稳定的估计中起了重要的作用.

最后,根据有关坐标变换计算系统(1)的完整的镇定控制,得到

$$u_0 = \frac{1}{10}(x_0 + 2\ln(t_0 + \sqrt{1 + t_0^2})) + (3t_0 + r_0) + \frac{11}{10}(s_0 + \frac{2r_0}{\sqrt{1 + t_0^2}}) + \frac{2t_0r_0^2}{(1 + t_0^2)^{3/2}}. \quad (13)$$

系统(1)(13)的状态变化见图1,此时所选初值为 $(x_0, s_0, t_0, r_0) = (19, 13, -29, 5)$.

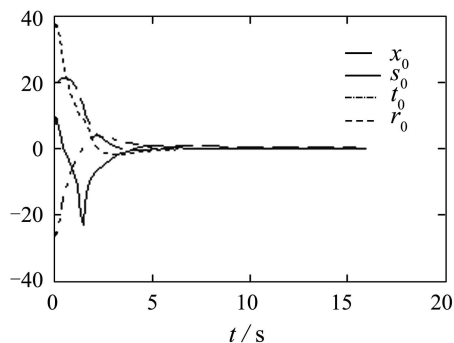


图1 系统(1)(13)的状态变化

Fig. 1 State histories of (1)(13)

3 结论(Conclusion)

充分运用迭代设计过程中子系统的输入状态稳定性,给出了“小车-单摆”系统的一个简单于文献[1]的镇定设计.设计表明,充分运用系统固有的鲁棒稳定性,可避免费力地构造李雅普诺夫函数,并可能简化控制.

参考文献(References):

- [1] MAZENC F, PRALY L. Adding integrators, saturated controls and stabilization for feedforward systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1996, 41(11): 1559 – 1578.
- [2] SONTAG E D, WANG Y. On characterizations of the input-to-state stability property[J]. *Systems & Control Letters*, 1995, 24(5): 351 – 359.
- [3] SONTAG E D. Further facts on input to state stabilization[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1990, 35(4): 437 – 442.
- [4] LIU W, CHITOUR Y, SONTAG E D. On finite-gain stabilizability of linear systems subject to input saturation[J]. *SIAM J of Control and Optimization*, 1996, 34(4): 1190 – 1219.

作者简介:

叶华文 (1968—),男,2004年博士后出站,现在中南大学信息与工程学院工作,主要研究机电系统的稳定控制, E-mail: yehuawen2001@yahoo.com.cn;

钟守铭 (1955—),男,教授,研究领域为稳定性理论及应用;

凌玉华 (1965—),女,教授,研究领域为智能控制理论及应用;

戴冠中 (1937—),男,教授,研究领域为大系统理论、非线性控制、智能控制和信息安全.