

分数阶控制器的数字实现及其特性

曹军义, 曹秉刚

(西安交通大学 机械工程学院, 陕西 西安 710049)

摘要: 针对分数阶控制器数值计算和应用难的问题, 研究了分数阶控制器的数字实现方法和控制特性. 取Grunwald-Letnikov定义有限项, 并直接离散化, 得到有限记忆数字实现法; 利用Tustin算子生成函数把分数阶微分由复频域变换到 Z 域, 然后用连分式展开式CFE (continued fraction expansion) 近似展开, 可得到Tustin+CFE数字实现法. 两种方法的频域对比分析表明Tustin+CFE法优于有限记忆法. 采用设计的分数阶控制器的数字实现方法, 对分数阶控制器和传统PID控制器的控制性能进行了对比实验分析. 研究结果表明: 分数阶控制器对非线性具有较强的控制能力.

关键词: 分数阶控制器; 分数阶微积分; 数字实现; 频域分析
中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Digital realization and characteristics of fractional order controllers

CAO Jun-yi, CAO Bing-gang

(School of Mechanical Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an Shanxi 710049, China)

Abstract: In order to overcome the difficulty of the discretization and application of fractional order controllers (FOC), the digital realization and control characteristic of FOC are studied in this paper. The limited memory method (LMM) is derived from the direct discretization of the truncated Grunwald-Letnikov formula. After Z transform with Tustin generating function, the fractional order calculus can be approximated by continued fraction expansion (CFE), which is called the Tustin+CFE method. The comparative frequency analysis between them verifies that the Tustin+CFE method dominates LMM in the sense that the Tustin+CFE method is close to the real fractional order system. Applying the proposed approximation, the control performance simulation is carried out to compare FOC with conventional PID controllers. The results show that FOC possesses more robust performance for the nonlinearity.

Key words: fractional order controller; fractional calculus; digital realization; frequency analysis

1 引言(Introduction)

分数微积分不是什么新概念, 1695 年分数微积分诞生. 随后数学家傅立叶、欧拉和拉普拉斯都进行了研究. 最著名的分数微积分的定义是由Riemann-Liouville 和 Grunwald-Letnikov 做的定义^[1], 分数微积分过去一直作为数学理论来研究的, 最近几年, 分数微积分在许多工程科技领域方面的应用研究逐渐增加^[2~5], 主要是由于许多物理对象具有分数阶特性, 像粘弹性、阻尼、混沌和声波扩散等. 分数阶微分方程可以更接近地描述物理对象.

分数微积分在控制中的应用还是个新兴的领域. 传统的整形PID控制器在工业控制应用中占主导地位, 而分数微积分在PID控制器中的应用将可能增强系统的控制性能. 分数阶控制就是控制系统或者控制器是用分数微分方程来描述的, 而传统的PID控制

器只是分数阶控制器的特例. 被控对象一般是分数阶的, 但通常分数阶部分比较低. 实际应用中往往用整数系统描述实际系统, 采用整数阶控制器主要是由于分数阶控制器没有很好的数值解决方法. 现在由于数字计算机的计算能力的提高, 这些已经得到很好的解决.

2 分数微积分(Fractional order calculus)

分数阶微积分是允许微积分的阶次是任意阶的, 是经典整数微积分的自然扩展. 经常用到的两个分数微积分的定义是 Riemann-Liouville 和 Grunwald-Letnikov 微积分定义.

对一连续可导函数 f 的 m 阶 Grunwald-Letnikov微积分定义如下:

$${}_a D_t^m f(t) = \lim_{h \rightarrow \infty} h^{-m} \sum_{j=0}^{[\frac{t-a}{h}] } (-1)^j \binom{m}{j} f(t-jh), \quad (1)$$

其中: m 为任意阶, $[\frac{t-m}{h}]$ 是取整, h 为步长, $\binom{m}{j}$ 是二项式系数, 二项式系数可以用伽马函数代替

$$\binom{m}{j} = \frac{\Gamma(m+1)}{j!\Gamma(m-j+1)}. \quad (2)$$

Riemann-Liouville微积分定义如下

$${}_a D_t^m f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-m)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{m-n+1}} d\tau. \quad (3)$$

其中: a , m 和 t 都是实数, $m < 0$, $n-1 < m < n$, a 和 t 是 ${}_a D_t^m f(t)$ 的积分上下限. $\Gamma(\cdot)$ 是著名的Euler伽马函数.

在实际物理系统和工程应用中, 上述两个微积分定义是等效的^[3]. 拉普拉斯变换可以解决用传统微分方程描述的工程问题, 同样拉普拉斯变换可以用于分数阶微积分. 根据 Riemann-Liouville 定义, 分数微分的拉普拉斯变换为

$$L\{{}_0 D_t^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - [{}_0 D_t^{\alpha-1} f(t)]_{t=0}. \quad (4)$$

分数积分的拉普拉斯变换为

$$L\{{}_0 D_t^{-\alpha} f(t)\} = s^{-\alpha} F(s). \quad (5)$$

3 分数阶控制器(Fractional order controllers)

像整数阶控制系统一样, 分数阶控制系统可以用分数阶微分方程来描述, 下面是用分数阶微分方程描述的分数阶单输入单输出系统模型

$$a_n D_t^{\alpha_n} y(t) + \dots + a_1 D_t^{\alpha_1} y(t) + a_0 D_t^{\alpha_0} y(t) = b_m D_t^{\beta_m} u(t) + \dots + b_1 D_t^{\beta_1} u(t) + b_0 D_t^{\beta_0} u(t). \quad (6)$$

其中: $\alpha_k, \beta_k (k = 0, 1, 2, \dots)$ 是任意实数, $\beta_m > \dots > \beta_1 > \beta_0$, $\alpha_n > \dots > \alpha_1 > \alpha_0$, $a_k, b_k (k = 0, 1, 2, \dots)$ 是常数. 通过拉普拉斯变换, 分数阶系统 (6) 的传递函数为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^{\beta_m} + \dots + b_1 s^{\beta_1} + b_0 s^{\beta_0}}{a_n s^{\alpha_n} + \dots + a_1 s^{\alpha_1} + a_0 s^{\alpha_0}}. \quad (7)$$

单输入单输出分数阶控制系统如图 1 所示, 被控对象可以用整数阶系统或分数阶控制系统, 分数阶控制器采用分数阶 $PI^\lambda D^\delta$ 控制器, 它的微分方程表达为

$$u(t) = ke(t) + T_i D_t^{-\lambda} e(t) + T_d D_t^\delta e(t). \quad (8)$$

其中: k 是比例常数, T_i 为积分时间常数, T_d 为微分时间常数, λ 是积分阶数, δ 是微分阶数. 控制

器 (8) 的连续传递函数为

$$G_c(s) = k + T_i s^{-\lambda} + T_d s^\delta. \quad (9)$$

从方程 (8)(9) 可以看出, 当 $\lambda = \delta = 1$ 时, $G_c(s)$ 就成为整数阶PID控制器; 当 $\lambda = 0, \delta = 1$ 时, $G_c(s)$ 就成为整数阶PD控制器; 当 $\lambda = 1, \delta = 0$ 时, $G_c(s)$ 就成为整数阶PI控制器; 当 $\lambda = 0, \delta = 0$ 时, $G_c(s)$ 就成为整数阶P控制器, 如图 2(a) 所示, 而分数阶控制器就是图 2(b) 所示阴影部分.

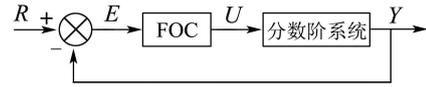


图 1 分数阶控制系统

Fig. 1 Fractional order system

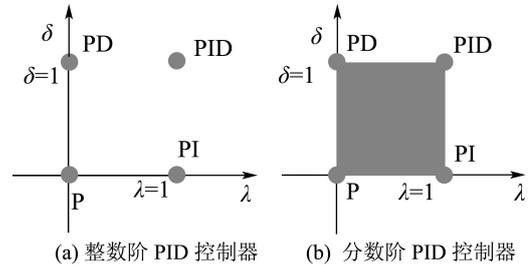


图 2 按微积分阶次分的控制器

Fig. 2 Controllers with fractional order

4 分数阶控制器的数字实现(Digital realization of FOC)

分数阶控制器的频域特性研究和实现与传统整数阶控制器一样方便, 而分数阶控制器时域的数字实现比较困难. 传统数字控制器的时域求解方法(如梯形法则、欧拉算子和龙格库塔等)很好地简化了其在不同控制领域的应用. 虽然 Podlubny 为分数阶微分方程提供了简单的几何插值方法^[6], 但它没能为分数阶控制器计算机实现得到很好的解决.

分数阶系统具有无限维, 必需用有限微分方程去近似逼近分数阶控制器的实现. 根据 Grunwald-Letnikov 微积分定义, 接近起点的二项式系数足够小时可以忽略或忘掉大量过去的时间序列, 分数阶微积分的数字实现可以只考虑最近的一段时间序列, 如下式

$${}_0 D_t^\alpha x(t) \approx {}_{t-L} D_t^\alpha x(t) \approx h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{N(t)} b_j x(t-jh). \quad (10)$$

其中: L 为记忆长度, $t > L$, h 为计算步长, $N(t) = \min \left\{ \left[\frac{t}{h} \right], \left[\frac{L}{h} \right] \right\}$, 二项式系数 b_j 可以通过公

式 (11) 计算

$$b_0 = 1, b_j = (1 - \frac{1 + \alpha}{j})b_{j-1}, j \geq 1. \quad (11)$$

通过采样时间 T 来近似步长 h , 式 (10) 的离散变换为

$$Z\{D^\alpha x(t)\} \approx (\frac{1}{T^\alpha} \sum_{j=0}^m b_j z^{-j})X(z). \quad (12)$$

式中 $m = [L/T]$ 为记忆长度, 式 (12) 被称为短记忆数字实现法. 可以看出分数阶微分有记忆功能, 与过去历史有关, 因此离散的分数阶控制器是传统整数阶控制器的内插结果.

一般分数微积分 s^α 可以通过生成函数 $s = w(z^{-1})$ 表示, 即可以通过不同的算子从复频域算子变换 Z 域^[7]. 利用著名的 Tustin 算子或梯形法则可以直接变换离散分数阶微积分为

$$Z\{D^\alpha x(t)\} \approx (\frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}})^\alpha X(z). \quad (13)$$

任何离散函数 $G(z)$ 可以用连分式展开式 (CFE) 近似展开, 形式如下

$$G(z) = a_0(z) + \frac{b_1(z)}{a_1(z) + \frac{b_2(z)}{a_2(z) + \frac{b_3(z)}{a_3(z) + \dots}}}, \quad (14)$$

其中系数 a_k, b_k 要么是常数, 要么是变量 z 的有理函数. 通过恰当的截断, 可以获得 $(\frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}})^\alpha$ 近似有理函数. 则式 (13) 可以近似离散为

$$Z\{D^\alpha x(t)\} \approx (\frac{2}{T})^\alpha CFE\{(\frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}})^\alpha\}X(z) = (\frac{2}{T})^\alpha \frac{P_p(z^{-1})}{Q_q(z^{-1})}X(z). \quad (15)$$

式 (15) 被称之为 Tustin+CFE 数字实现法, 其中 p 和 q 分别是多项式 P 和 Q 的自由度, 一般为计算方便, 取 $p = q = N, N$ 是数字实现的近似阶次. 例如: 按照 Tustin+CFE 数字实现法, $s^{0.5}$ 离散化的 1 阶和 3 阶的近似模型为

$$G_1(z) = \frac{89.44 - 44.72z^{-1}}{2 + z^{-1}},$$

$$G_3(z) = \frac{357.8 - 178.9z^{-1} - 178.9z^{-2} + 44.72z^{-3}}{8 + 4z^{-1} - 4z^{-2} - z^{-3}}.$$

其中采样周期 $T = 0.001$ s. 用 Tustin+CFE 数字实现法得到 $s^{0.5}$ 离散化的近似模型 1, 3, 5, 7, 9 阶的伯德图与 $s^{0.5}$ 的连续伯德图对比如图 3 所示, 图中实线为 $s^{0.5}$ 的连续伯德图, 其他为近似模

型的伯德图, 箭头方向为近似模型阶次增加方向. 图中可以看出模型阶次越高频率响应越接近实际系统. 图 4 为 $s^{0.5}$ 有限记忆数字离散法和 Tustin+CFE 法频域特性图, 其中有限记忆法的记忆长度为 9, Tustin+CFE 法的近似阶次也为 9, 采样周期 $T=0.001$ s. 图 4 可以看出同样阶次的数字实现, Tustin+CFE 法优于有限记忆法, 而且 Tustin+CFE 法时域离散模型是稳定的最小相位系统.

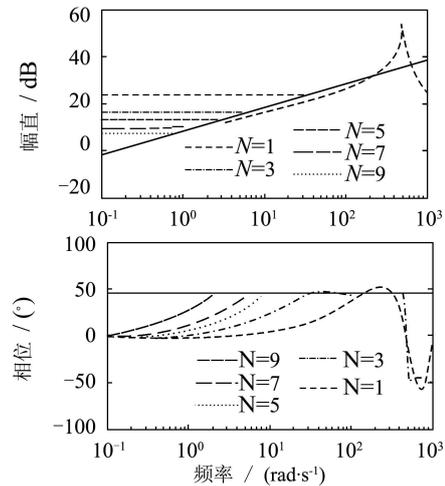


图 3 $s^{0.5}$ 的 Tustin+CFE 法离散模型伯德图
Fig. 3 Bode plots of $s^{0.5}$ and its different order approximation with Tustin+CFE

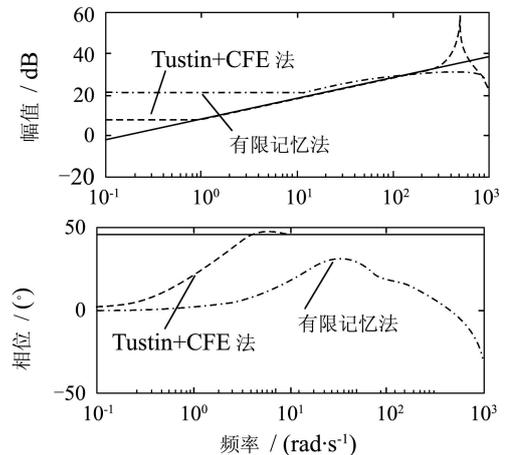


图 4 $s^{0.5}$ 有限记忆数字离散法和 Tustin+CFE 法频域特性对比
Fig. 4 Bode plots of $s^{0.5}$ with two discretization methods

5 特性仿真研究(Characteristics research of FOC)

由 Tustin+CFE 法直接离散分数阶控制器 (9) 为

$$G_c(z) = k_p + k_i w_i(z) + k_d w_d(z). \quad (16)$$

其中: $w_i(z)$ 为 $s^{-\lambda}$ 的分数阶积分的近似模型, $w_d(z)$ 为 s^δ 的分数阶微分的近似模型. 近似

模型的分子和分母有很多项,系统实现需要高性能计算机或数字信号处理器来完成多步乘法运算.分数阶PID控制器如图5所示,传统的PID控制器的积分和微分环节用分数阶近似模型代替.近似模型的阶次越高即相应的记忆长度越长,越接近真实系统.对于一般的控制系统要求,10阶的近似模型就可以了^[7],但在实际应用中,可以综合考虑系统计算能力和控制性能要求而选取.

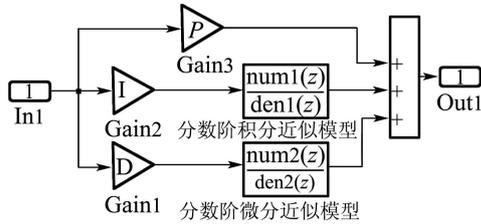


图5 分数阶PID控制器

Fig. 5 Fractional order controllers

一个分数阶控制系统如图6所示,系统中加了非线性饱和环节,饱和环节的上限为0.5,下限为-0.5.如果采用传统的PID控制器,有没有非线性环节控制效果差别大,如图7所示,其中 $k_p = 1, k_i = 0.05, k_d = 0$.如果采用分数阶控制器 $PI^{-\lambda}$, $\lambda = 0.4$,离散采样周期0.001s,采用第4部分介绍的Tustin+CFE法数字实现方法,近似模型的阶次为9,同样在图6中进行仿真实验.结果如图8所示,其中分数阶控制器的比例和分数积分的系数 $k_p = 1, k_i = 0.05$.

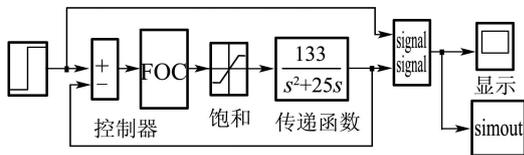


图6 分数阶控制系统

Fig. 6 Fractional order control system in simulink

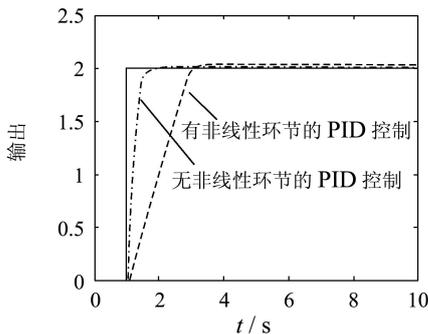


图7 整数阶PID控制性能

Fig. 7 Control performance of PID for nonlinearity

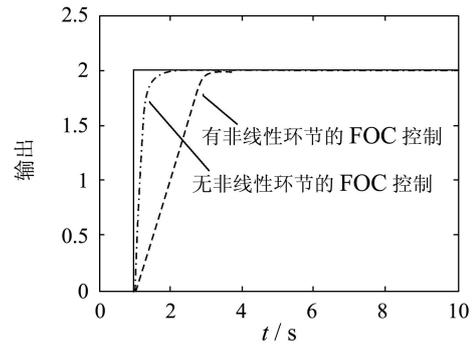


图8 FOC鲁棒控制性能

Fig. 8 Robust control performance of FOC for nonlinearity

图7和图8实验结果表明:控制对象无非线性环节,分数阶PID和整数阶PID的控制效果差不多;但当控制对象有非线性环节时,分数阶PID对非线性有很强的抑制力,而整数阶PID出现很大的控制偏差,因此分数阶PID即分数阶控制器可以通过改变分数阶次的系数实现对非线性较强的控制能力.

6 结论(Conclusion)

本文研究了基于分数阶微积分的分数阶控制器的数字实现及其特性研究.对分数阶控制器两种数字实现的方法做了频域对比分析,一种是根据分数微积分的定义,做有限项近似处理,然后直接离散化,此法为有限记忆法;另一种为Tustin+CFE法,采用Tustin算子生成函数把分数微积分由复频域变换到Z域,然后用连分式展开式近似展开,就可获得分数阶控制器的时域离散近似传递函数.对比分析结果表明,等同条件下离散分数阶控制器,Tustin+CFE法优于有限记忆法.最后运用数字实现方法进行仿真,实验结果表明了分数阶控制器数字实现有效性,同时证明分数阶控制器微积分阶次的调整,可以实现其对非线性的较好的控制.

参考文献(References):

- [1] OLDHAM K B, SPANIER J. *The Fractional Calculus: Theory and Application of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*[M]. New York : Academic Press, 1974.
- [2] VLADIMIR V K, JOSE L L. Application of fractional calculus to fluid mechanics[J]. *J of Fluids Engineering*, 2002, 124(3) : 803 – 806.
- [3] ENGHEIA N. On the role of fractional calculus in electromagnetic theory[J]. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 1997, 39(4) : 35 – 46.
- [4] HELESCHWITZ D, MATIGNON D. Diffusive realizations of fractional integrodifferential operators: structural analysis under approximation[C] // *Proc of IFAC Conf on System, Structure and Control*. Kidlington, UK: Elsevier, 1998 : 243 – 248.

- [6] XU J. On iterative learning from different tracking tasks in the presence of time-varying uncertainties[J]. *IEEE Trans on systems, Man, and cybernetics*, 2004, 34(1): 589 – 597.
- [7] DAROUACH M Z M, XU S J. Full-order observer for linear systems with unknown inputs[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(1): 606 – 609.
- [8] BLOKH A M. The set of all iterates is nowhere dense in $C([0, 1])$ [J]. *Trans on America Mathematics, Society*, 1992, 333(2): 787 – 798.
- [9] SUN M X, GE S S, MAREELS I. Adaptive Repetitive Learning Control of Robotic Manipulators Without the Requirement for Initial Repositioning[J]. *IEEE Trans on Robotics*, 2006, 22(3): 563 – 568.
- [10] 孙明轩, 黄宝健. 迭代学习控制[M]. 北京: 国防工业出版社, 1999.
(SUN Mingxuan, HUANG Baojian. *Iterative Learning Control* [M]. Beijing: Nation Defense Industry Press, 1999.)

附录(Appendix)

引理2的证明(反证法): 假设 $f_i(t)$ 在 t_0 处不收敛于0, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 存在 $i_n \in N$, 使得 $|f_{i_n}(t_0)| \geq \varepsilon_0$, 即 $f_{i_n}(t_0) \geq \varepsilon_0$, 又因为 $f_{i_n}(t)$ 等度连续, 因此对上述 $\frac{\varepsilon_0}{2}$, 存在 $\delta > 0$. 这里, $\delta \leq \min\{|a - t_0|, |b - t_0|\}$, 当 $|t - t_0| < \delta$ 时,

有 $|f_{i_n}(t) - f_{i_n}(t_0)| < \frac{\varepsilon_0}{2}$, 即 $f_{i_n}(t) \geq \frac{\varepsilon_0}{2}$, 因此

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T f_{i_n}(t) dt \right| &= \int_0^T f_{i_n}(t) dt \geq \\ \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} f_{i_n}(t) dt &\geq \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot 2\delta = \varepsilon_0 \cdot \delta \end{aligned} \quad (28)$$

与

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_a^b f_i(t) dt = 0 \quad (29)$$

矛盾, 因此 $f_i(t)$ 逐点收敛于0.

作者简介:

张冬梅 (1973—), 女, 讲师, 2000年毕业于东北师范大学, 获理学硕士学位, 现为浙江工业大学自动化所博士研究生, 主要研究领域为迭代学习控制、时滞系统、鲁棒控制, E-mail:meidzh@zjut.edu.cn;

孙明轩 (1961—), 男, 教授、博士生导师, 研究方向为学习控制与自适应信号处理;

俞立 (1961—), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为网络控制、先进控制策略、计算机控制系统的设计与集成.

(上接第794页)

- [5] MA C B, HORI Y. Backlash vibration suppression in torsional system based on the fractional order Q-filter of disturbance observer[C] // *Proc of the 8th IEEE Int Workshop on Advanced Motion Control*. Piscataway, USA: IEEE Press, 2004: 577 – 582.
- [6] PODLUBNY I. Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation[J]. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2002, 5(4): 367 – 386.
- [7] CHEN Y Q, MOORE K L. Discretization schemes for fractional-

order differentiators and integrators[J]. *IEEE Trans on Circuits and Systems*, 2002, 49(3): 363 – 367.

作者简介:

曹军义 (1977—), 男, 博士研究生, 研究方向为智能机电系统控制和优化, E-mail:caojy@mailst.xjtu.edu.cn;

曹秉刚 (1953—), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为机电系统控制和新能源变换控制, E-mail:inte-cao@mail.xjtu.edu.cn