

基于观测器跟踪非一致轨迹的迭代学习控制器设计

张冬梅^{1,2}, 孙明轩², 俞立²

(1. 浙江工业大学 理学院, 浙江 杭州 310032; 2. 浙江工业大学 信息工程学院, 浙江 杭州 310032)

摘要: 针对状态难以直接测量的一类不确定非线性系统, 基于状态观测器进行相应的迭代学习控制设计, 可实现现在给定区间上对变轨迹的全局精确跟踪. 当任意两次迭代的目标轨迹完全不同, 并且系统状态信息不完全已知时, 通过引入能量函数的方法, 可以证明随迭代次数增加, 跟踪误差渐近收敛至零. 仿真结果验证了结果的有效性.

关键词: 观测器; 迭代学习控制; 非线性系统; 时变参数不确定性

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Observer-based iterative learning control for non-identical trajectory tracking

ZHANG Dong-mei^{1,2}, SUN Ming-xuan², YU Li²

(1. College of Science, Zhejiang University of Technology, Hangzhou Zhejiang 310032, China;

2. College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou Zhejiang 310032, China)

Abstract: A new iterative learning controller with state estimation is developed for tracking different trajectories in a finite interval. A nonlinear system with uncertainties can be controlled by this scheme. By introducing an energy-like function, the proposed method can achieve asymptotic convergence along learning repetition horizon when the target trajectories of any two consecutive iterations are completely different, and the state information is not fully available. Simulation result demonstrates the effectiveness of the proposed results.

Key words: observer; iterative learning control; nonlinear systems; time-varying parameter uncertainties

1 引言(Introduction)

自从Arimoto等人^[1]率先提出迭代学习控制(ILC)以来, 已发表的相关文献大都要求期望轨迹不随迭代次数发生改变, 即要求期望轨迹在整个迭代学习过程中是一致的^[2,3]. 然而, 由于实际控制任务往往有所不同, 一旦期望轨迹发生变化, 学习到的输入信号将不再奏效, 系统必须从头学习, 从而导致学习效率很低. 因此对变轨迹跟踪问题的研究具有重要的理论意义和应用价值. 文[4]考虑了变轨迹的D-型、PD-型、PID型迭代学习算法. 文[5]针对不确定非线性系统, 基于观测器考虑了一类重复控制问题, 要求系统参数为时间的周期函数. 文[6]考虑了一类具有时变参数不确定性系统的变轨迹跟踪问题, 利用Lyapunov函数方法, 进行收敛性分析, 其中控制律是系统的状态反馈, 然而在实际控制中, 系统的状态往往难以直接测量得到, 应用系统的测量输出来设计迭代学习控制律更具实用价值. 本文针

对时变参数不确定非线性系统, 研究并提出了基于观测器的自适应迭代学习控制律设计方法, 使得闭环系统可在有限时间区间内实现对变轨迹的任意精度跟踪.

2 问题描述(Problem statement)

考虑多输入多输出不确定系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B[u(t) + \Theta^0(t)\Phi(x, t)], \\ y(t) = Cx(t). \end{cases} \quad (1)$$

其中: $t \in [0, T]$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ 分别是系统状态向量、输出向量和控制输入向量; A, B, C 为已知的适当维数定常矩阵; $\Theta^0(t) \in C\{\mathbb{R}^{m \times n_1}, [0, T]\}$ 为系统未知的参数向量; $\Phi(x, t) \in \mathbb{R}^{n_1}$ 为已知向量值函数. 在本文中, 假定系统(1)满足假设

A1) CB 正定, (A, C) 可检测, (A, B, C) 不变零点位于左半复平面;

A2) $\Phi(x, t)$ 满足一致全局Lipschitz条件, 即 $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, 有 $\|\Phi(x_1, t) - \Phi(x_2, t)\| \leq l\|x_1 - x_2\|$, 其中, l 是未知的Lipschitz常数;

A3) $\Theta = [\Theta_{j,k}]_{m \times n_1}$ 有界, $\Theta_{j,k} \leq \Theta^*$, $\Theta^* > 0$ 为已知参数;

针对系统的状态难以直接测量得到的情况, 考虑状态观测器^[7]

$$\begin{cases} \dot{v} = (FA - LC)v + [L(I_m + CD) - FAD]y, \\ \hat{x} = v - Dy. \end{cases} \quad (2)$$

其中: $\hat{x}$ 为状态的估计值, $D = -B(CB)^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $F = I_n + DC \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $v \in \mathbb{R}^n$. 定义估计误差 $\delta x = x - \hat{x}$, 则

$$\delta \dot{x} = (FA - LC)\delta x. \quad (3)$$

根据文[7], 存在矩阵 $L \in \mathbb{R}^{n \times m}$, 使得 $FA - LC$ 渐近稳定. 即对给定的正定矩阵 $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 存在唯一正定矩阵 $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 满足方程

$$(FA - LC)^T P + P(FA - LC) = -Q. \quad (4)$$

设 $e_i = y_{ri} - y_i$ 为第 i 次迭代输出误差, i 为迭代次数, $y_{ri} \in C^1[0, T]$ 为系统第 i 次期望输出, 对迭代次数 i , 假定 y_{ri} 一致有界, 这里, y_{ri} 随迭代次数发生改变. $\delta x_i = x_i - \hat{x}_i$ 为第 i 次迭代时的估计误差. 假定

$$A4) e_i(0) = e_{i-1}(T);$$

$$A5) \delta x_i(0) = \delta x_{i-1}(T);$$

则

$$\dot{e}_i = \dot{y}_{ri} - \dot{y}_i = \dot{y}_{ri} - CAx_i - CBu_i - CB\Theta^0\Phi_i. \quad (5)$$

其中 $\Phi_i = \Phi(x_i, t)$. 令 $G = [I - CA] \in \mathbb{R}^{m \times (m+n)}$, $\Theta = -\Theta^0$, $\varphi_i = [\dot{y}_{ri}^T \ x_i^T]^T \in \mathbb{R}^{(m+n)}$, 对应 φ_i 的估计为 $\hat{\varphi}_i = [\dot{\varphi}_{ri}^T \ \hat{x}_i^T]^T \in \mathbb{R}^{(m+n)}$. 而 $\varphi_i - \hat{\varphi}_i = [0 \ \delta x_i^T]^T$, 故

$$\dot{e}_i = G\varphi_i - CB(u_i - \Theta\Phi_i). \quad (6)$$

3 主要结果(Main results)

本文目的是设计一个基于状态观测器的控制律

$$u_i = Ke_i + \hat{\Theta}_i\Phi_i + (CB)^{-1}G\hat{\Phi}_i. \quad (7)$$

其中 $\hat{\Theta}_i \in \mathbb{R}^{m \times n_1}$ 为未知参数 Θ 的估计, 满足如下的自适应律

$$\dot{\hat{\Theta}}_i = \text{proj}(\hat{\Theta}_{i-1}) + \beta e_i \Phi_i^T. \quad (8)$$

对矩阵 $\alpha = [a_{j,k}]_{m \times n_1}$, 定义 $\text{proj}(\cdot)$ 如下:

$$\text{proj}(\alpha) = [\text{proj}(a_{j,k})]_{m \times n_1},$$

$$\text{proj}(\alpha_{j,k}) = \begin{cases} \alpha_{j,k}, & |\alpha_{j,k}| \leq \Theta^*, \\ \Theta^* \cdot \text{sgn}(\alpha_{j,k}), & |\alpha_{j,k}| > \Theta^*. \end{cases}$$

这里: $j = 1, 2, \dots, m, k = 1, 2, \dots, n_1$. $\hat{\Theta}_{-1} = 0$, K 为反馈增益矩阵, $\beta \geq 0$ 为学习增益, 使得系统迭代输出 $y_i(t)$ 在给定区间 $[0, T]$ 上渐近跟踪期望轨迹 $y_{ri}(t)$. 为叙述问题方便, 给出如下定义:

定义 1 设 $\{f_i(t)\}$ 定义在区间 $[a, b]$, 若存在 $M \geq 0$, 使得对任意自然数 i 和 $t \in [a, b]$, 都有

$$|f_i(t)| \leq M$$

成立, 则称 $\{f_i(t)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致有界.

定义 2 设 $\{f_i(t)\}$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的函数列, 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $t', t'' \in [a, b]$ 且 $|t' - t''| < \delta$ 时, 对任意自然数 i , 恒有

$$|f_i(t') - f_i(t'')| < \varepsilon,$$

则称函数列 $\{f_i(t)\}$ 在 $[a, b]$ 上等度连续.

注 1 等度连续是对函数列 $\{f_i(t)\}$ 一致连续性的一种刻画, 等价的说法是对任意 $i, \{f_i(t)\}$ 均是一致连续的.

下面的3条引理给出了等度连续的判定方法和相应的性质.

引理 1 设 $\{f_i(t)\}$ 为区间 $[a, b]$ 上可微函数列, 且 $\{\dot{f}_i(t)\}$ 在区间 $[a, b]$ 上一致有界, 则 $\{f_i(t)\}$ 在区间 $[a, b]$ 上等度连续

引理 2 已知 $\lim_{i \rightarrow \infty} \int_a^b f_i(t) dt = 0$, $f_i(t)$ 在区间 $[a, b]$ 等度连续, 并且对任意 i 及 $t \in [a, b]$, $f_i(t) \geq 0$, 则 $f_i(t)$ 逐点收敛至 0.

引理 3 设 $\{f_i(t)\}$ 在 $[a, b]$ 上逐点收敛于 $f(t)$, 则 $\{f_i(t)\}$ 在 $[a, b]$ 上等度连续的充要条件是 $\{f_i(t)\}$ 在 $[a, b]$ 一致收敛于 $f(t)$, 并且 $f(t)$ 为连续函数.

下面给出本文主要结果.

定理 1 设系统满足假设 A1)~A5), 并且

$$\frac{\|(CB)^{-1}G\|^2}{\lambda} \leq \lambda_{\min}(K). \quad (9)$$

采用学习律(7)和自适应律(8), 则系统所有变量一致有界, 并且当 $i \rightarrow \infty$ 时, $y_i(t)$ 在有限区间 $[0, T]$ 上一致收敛于期望轨迹 $y_{ri}(t)$, 这里, $\lambda = \lambda_{\min}(Q)$, $\lambda_{\min}(\cdot)$ 为矩阵最小特征值.

证 定义能量函数如下

$$\begin{aligned} E_i(t) = & \frac{1}{2} e_i^T(t) (CB)^{-1} e_i(t) + \delta x_i^T(t) P \delta x_i(t) + \\ & \frac{1}{2\beta} \int_0^T \text{tr}[(\Theta(\tau) - \hat{\Theta}_i(\tau)) \cdot \\ & (\Theta(\tau) - \hat{\Theta}_i(\tau))^T] d\tau. \end{aligned} \quad (10)$$

根据假设 A4) 及 (6)(7) 两式, 可得

$$\frac{1}{2} e_i^T(T) (CB)^{-1} e_i(T) - \frac{1}{2} e_{i-1}^T(T) (CB)^{-1} e_{i-1}(T) =$$

$$\begin{aligned} & \int_0^T e_i^T(\tau)(CB)^{-1}\dot{e}_i(\tau)d\tau = \\ & \int_0^T [e_i^T(CB)^{-1}G(\varphi_i - \hat{\varphi}_i) - e_i^TK e_i + \\ & e_i^T(\Theta - \hat{\Theta}_i)\varphi_i]d\tau. \end{aligned} \quad (11)$$

由于 $\varphi_i - \hat{\varphi}_i = [0 \ \delta x_i^T]^T$, 并且 $ab \leq ca^2 + \frac{1}{4c}b^2$ 对任意常数 a, b 及 $c > 0$ 均成立, 故

$$\begin{aligned} & \|e_i^T(CB)^{-1}G(\varphi_i - \hat{\varphi}_i)\| \leq \\ & \frac{\|(CB)^{-1}G\|^2}{\lambda} \|e_i\|^2 + \frac{\lambda}{4} \|\delta x_i\|^2. \end{aligned} \quad (12)$$

记 $\gamma = \frac{\|(CB)^{-1}G\|^2}{\lambda} - \lambda_{\min}(K)$, 根据定理条件(9)可知 $\gamma \leq 0$, 并记 $\zeta_i = e_i^T(\Theta - \hat{\Theta}_i)\Phi_i$, 将式(12)代入式(11)得到

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}e_i^T(T)(CB)^{-1}e_i(T) - \frac{1}{2}e_{i-1}^T(T)(CB)^{-1}e_{i-1}(T) \leq \\ & \int_0^T (\gamma \|e_i\|^2 + \frac{\lambda}{4} \|\delta x_i\|^2 + \zeta_i) d\tau. \end{aligned} \quad (13)$$

而根据假设A5)及式(4), 可知

$$\begin{aligned} & \delta x_i^T(T)P\delta x_i(T) - \delta x_{i-1}^T(T)P\delta x_{i-1}(T) = \\ & \int_0^T \delta x_i^T(-Q)\delta x_i d\tau \leq -\lambda \int_0^T \|\delta x_i\|^2 d\tau. \end{aligned} \quad (14)$$

由于参数估计 $\hat{\Theta}_i$ 满足自适应律(8), 根据文[6]可得

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{n_1} (\Theta_{j,k} - \text{proj}(\hat{\Theta}_{i-1,j,k}))^2 \leq \\ & \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{n_1} (\Theta_{j,k} - \hat{\Theta}_{i-1,j,k})^2. \end{aligned} \quad (15)$$

其中 $\Theta_{j,k}, \hat{\Theta}_{i-1,j,k}$ 分别为 $\Theta, \hat{\Theta}_{i-1}$ 的第 $\{j, k\}$ 个元素. 式(15)等价于

$$\begin{aligned} & \text{tr}(\Theta - \text{proj}(\hat{\Theta}_{i-1}))(\Theta - \text{proj}(\hat{\Theta}_{i-1}))^T \leq \\ & \text{tr}(\Theta - \hat{\Theta}_{i-1})(\Theta - \hat{\Theta}_{i-1})^T. \end{aligned} \quad (16)$$

即

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\beta} \int_0^T \text{tr}[(\Theta - \hat{\Theta}_i)(\Theta - \hat{\Theta}_i)^T - \\ & (\Theta - \hat{\Theta}_{i-1})(\Theta - \hat{\Theta}_{i-1})^T] d\tau \leq \\ & -\frac{1}{\beta} \int_0^T \text{tr}[(\hat{\Theta}_i - \text{proj}(\hat{\Theta}_{i-1}))(\Theta - \hat{\Theta}_i)^T + \\ & \frac{1}{2}(\hat{\Theta}_i - \text{proj}(\hat{\Theta}_{i-1}))(\hat{\Theta}_i - \text{proj}(\hat{\Theta}_{i-1}))^T] d\tau = \\ & -\int_0^T \zeta_i d\tau - \frac{\beta}{2} \int_0^T \text{tr}(e_i \Phi_i^T \Phi_i e_i^T) d\tau \end{aligned} \quad (17)$$

由式(12)(14)(17)可知

$$\Delta E_i(T) = E_i(T) - E_{i-1}(T) =$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}e_i^T(T)(CB)^{-1}e_i(T) - \frac{1}{2}e_{i-1}^T(T)(CB)^{-1}e_{i-1}(T) + \\ & \delta x_i^T(T)P\delta x_i(T) - \delta x_{i-1}^T(T)P\delta x_{i-1}(T) + \\ & \frac{1}{2\beta} \int_0^T \text{tr}[(\Theta - \hat{\Theta}_i)(\Theta - \hat{\Theta}_i)^T - \\ & (\Theta - \hat{\Theta}_{i-1})(\Theta - \hat{\Theta}_{i-1})^T] d\tau \leq \\ & \int_0^T (\gamma \|e_i\|^2 - \frac{3\lambda}{4} \|\delta x_i\|^2) d\tau - \\ & \frac{\beta}{2} \int_0^T \text{tr}(e_i \Phi_i^T \Phi_i e_i^T) d\tau \leq \int_0^T \gamma \|e_i\|^2 d\tau \leq 0. \end{aligned} \quad (18)$$

类似文[9], 易知 $E_i(T) \leq E_{i-1}(T) \leq \dots \leq E_0(T)$, 而

$$|E_0(T)| \leq |E_0(0)| + \left| \int_0^T \dot{E}_0 d\tau \right|. \quad (19)$$

可知存在 $M_1 > 0$, 使得

$$\begin{aligned} & \int_0^T \dot{E}_0(t) dt \leq \\ & \int_0^T [e_0^T(CB)^{-1}\dot{e}_0 + \delta x_0^T P\delta x_0 + \delta x_0^T P\delta \dot{x}_0 + \\ & \frac{1}{2\beta} \text{tr}(\Theta - \hat{\Theta}_0)(\Theta - \hat{\Theta}_0)^T - \\ & \frac{1}{2\beta} \text{tr}(\Theta - \hat{\Theta}_{-1})(\Theta - \hat{\Theta}_{-1})^T + \frac{1}{2\beta} \text{tr}\Theta\Theta^T] d\tau = \\ & \int_0^T [\gamma \|e_0\|^2 - \frac{3\lambda}{4} \|\delta x_0\|^2 - \\ & \frac{\beta}{2} \text{tr}e_0\Phi_0^T\Phi_0e_0^T] d\tau + \frac{\beta}{2} \text{tr}\Theta\Theta^T \leq M_1. \end{aligned} \quad (20)$$

上述最后一个不等式是根据 Θ^0 在闭区间 $[0, T]$ 上的连续有界性得到的. 又根据式(18)

$$\begin{aligned} & E_i(T) = E_0(T) + \sum_{j=1}^i \Delta E_j(T) \leq \\ & E_0(T) + \sum_{j=0}^i \int_0^T r \|e_j\|^2 d\tau. \end{aligned} \quad (21)$$

即, 存在 $M_2 > 0$, 使得

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^i \int_0^T -r \|e_j\|^2 d\tau \leq \\ & E_0(T) - E_i(T) \leq E_0(T) \leq M_2. \end{aligned} \quad (22)$$

故

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_0^T \|e_i\|^2 d\tau = 0. \quad (23)$$

同时, 由式(18)(22)易知

$$E_i(T) \leq E_0(T) \leq M_2. \quad (24)$$

根据式(24), 可知

$$\begin{aligned} & E_i(t) = \int_0^T \dot{E}_i(\tau) d\tau + E_i(0) \leq \\ & \int_0^T (r \|e_i\|^2 - \frac{3\lambda}{4} \|\delta x_i\|^2) d\tau - \frac{\beta}{2} \int_0^T \text{tr}(e_i \Phi_i^T \Phi_i e_i^T) d\tau + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\beta} \int_0^T \text{tr}[(\Theta - \hat{\Theta}_{i-1})(\Theta - \hat{\Theta}_{i-1})^T] + E_i(0) \leq \\ & \frac{1}{2\beta} \int_0^T \text{tr}[(\Theta - \hat{\Theta}_{i-1})(\Theta - \hat{\Theta}_{i-1})^T] + E_i(0) \leq \\ & M_2 + E_i(0). \end{aligned} \quad (25)$$

而根据式(24)

$$\begin{aligned} E_i(0) &= \\ & \frac{1}{2} e_i^T(0)(CB)^{-1}e_i(0) + \delta x_i^T(0)P\delta x_i(0) = \\ & \frac{1}{2} e_{i-1}^T(T)(CB)^{-1}e_{i-1}(T) + \\ & \delta x_{i-1}^T(T)P\delta x_{i-1}(T) \leq M_2, \end{aligned} \quad (26)$$

因此 $E_i(t)$ 一致有界。也即 $e_i(t), \delta_i(t), \int_0^t (\Theta - \hat{\Theta}_i)(\Theta - \hat{\Theta}_i)^T d\tau$ 一致有界。由 y_{ri} 的有界性可知 $x_i, \hat{x}_i$ 一致有界, 又根据式(8)可知 $\hat{\Theta}_i$ 一致有界, 代入式(7), 可知 u_i 一致有界, 代入式(6), 可知 $\dot{e}_i$ 一致有界。根据引理1, e_i 在区间 $[0, T]$ 等度连续, 根据引理2, e_i 逐点收敛至0, 根据引理3, e_i 一致收敛于0。即

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|e_i(t)\|^2 = 0. \quad (27)$$

也即, 随迭代次数充分增大, $y_i(t)$ 在有限区间 $[0, T]$ 一致收敛于期望轨迹 $y_{ri}(t)$ 。证毕。

4 例子(Examples)

考虑下面的电路模型^[5], 参数为 $R_1 = 1 \Omega, R_2 = 1 \Omega$, 电感 $L_1 = 0.36 \text{ H}, L_2 = 0.5 \text{ H}$, 互感 $M = 0.15 \text{ H}$, i_1, i_2 是回路电流, u 是输入电压, 定义 $x_1 = i_1, x_2 = i_2$, 电路可表示为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{-R_1 L_2}{L_1 L_2 - M^2} & \frac{R_2 M}{L_1 L_2 - M^2} \\ \frac{R_1 M}{L_1 L_2 - M^2} & \frac{-R_2 L_1}{L_1 L_2 - M^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} \frac{L_2 - M}{L_1 L_2 - M^2} \\ \frac{L_1 - M}{L_1 L_2 - M^2} \end{bmatrix} [u(t) + \Theta^0(t)\Psi(t)]. \end{aligned}$$

可测输出为 $y = x_1$, 目标轨迹为

$$y_{ri}(t) = \begin{cases} k_i \sin(\pi t), & i = 1, 3, 5, \dots, \\ 2\pi k_i(1-t)t, & i = 2, 4, 6, \dots. \end{cases}$$

对以上电路模型, 设计基于观测器的控制律(7), 使得系统迭代输出 $y_i(t)$ 在给定区间 $[0, T]$ 能渐近跟踪期望轨迹 $y_{ri}(t)$ 。这里: $t \in [0, 1]$, k_i 是每次迭代时从区间 $[-1, 0] \cup [0, 1]$ 中随机产生的随机数。设计观测器增益 $L = [3.5 \quad 4]^T$, $FA - LC$ 的特征值为 $-3.5, -2.86$, 参数真值为 $\Theta = [\theta_1, \theta_2]$, 这里, $q_1 = t^3 + 1, \theta_2 = 0.8t^2 + e^t, \theta^* = 4$ 。根

据式(9), K 只需满足 $\frac{\|(CB)^{-1}G\|^2}{\lambda_{\min}(Q)} \leq \lambda_{\min}(K)$, 故取 $K = 4, \beta = 1$, 系统初值为 $x_1 = 1, x_2 = 2, \delta_1 = 3, \delta_2 = 3.4, \Phi(t) = [\cos t, \sin t]^T$ 。利用MATLAB编程得到误差轨迹如图1所示, 状态 x_2 及状态估计 $\hat{x}_1$ 的比较如图2所示。

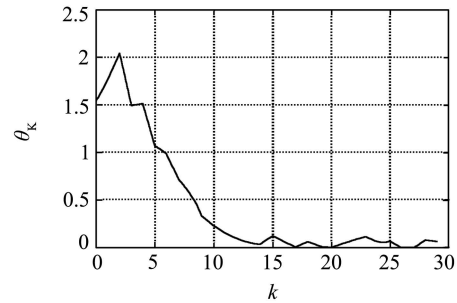


图1 收敛误差

Fig. 1 Convergence error

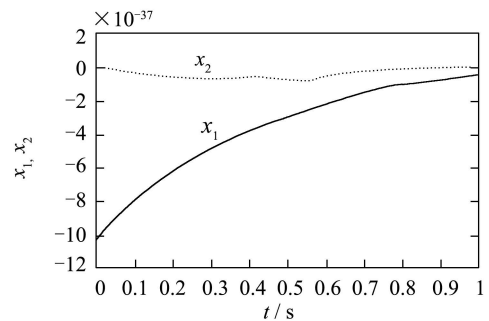


图2 状态及状态估计轨迹

Fig. 2 Trajectories of x_1 and x_2

5 结论(Conclusion)

本文针对一类参数不确定系统, 利用Lyapunov方法, 基于观测器给出相应的迭代学习控制律设计方法, 可实现在给定区间内对变轨迹的任意精度的跟踪。仿真结果验证了结果的有效性。

参考文献(References):

- [1] ARIMOTO S, KAWAMURA S, MIYAZAKI F. Bettering operation of robots by learning[J]. *J Robot Systems*, 1984, 1(2): 123 - 140.
- [2] MOORE K L. *Iterative Learning Control for Deterministic Systems*[M]. London: Springer-Verlag, 1993.
- [3] HEINZINGER D G, FENWICK D, PADEN B, et al. Stability of learning control with disturbances and uncertain initial conditions[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1992, 37(1): 110 - 114.
- [4] SAAB S S, VOGT W G, MICKLE M H. Learning control algorithms for tracking slowly varying trajectories[J]. *IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics*, 1997, 27(1): 657 - 670.
- [5] XU J X, XU J. Observer based learning control for a class of nonlinear systems with-varying parametric uncertainties[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2004, 49(2): 275 - 281.

- [6] XU J. On iterative learning from different tracking tasks in the presence of time-varying uncertainties[J]. *IEEE Trans on systems, Man, and cybernetics*, 2004, 34(1): 589 – 597.
- [7] DAROUACH M Z M, XU S J. Full-order observer for linear systems with unknown inputs[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(1): 606 – 609.
- [8] BLOKH A M. The set of all iterates is nowhere dense in $C([0, 1])$ [J]. *Trans on America Mathematics, Society*, 1992, 333(2): 787 – 798.
- [9] SUN M X, GE S S, MAREELS I. Adaptive Repetitive Learning Control of Robotic Manipulators Without the Requirement for Initial Repositioning[J]. *IEEE Trans on Robotics*, 2006, 22(3): 563 – 568.
- [10] 孙明轩, 黄宝健. 迭代学习控制[M]. 北京: 国防工业出版社, 1999.
(SUN Mingxuan, HUANG Baojian. *Iterative Learning Control* [M]. Beijing: Nation Defense Industry Press, 1999.)

附录(Appendix)

引理2的证明(反证法): 假设 $f_i(t)$ 在 t_0 处不收敛于0, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 存在 $i_n \in N$, 使得 $|f_{i_n}(t_0)| \geq \varepsilon_0$, 即 $f_{i_n}(t_0) \geq \varepsilon_0$, 又因为 $f_{i_n}(t)$ 等度连续, 因此对上述 $\frac{\varepsilon_0}{2}$, 存在 $\delta > 0$. 这里, $\delta \leq \min\{|a - t_0|, |b - t_0|\}$, 当 $|t - t_0| < \delta$ 时,

有 $|f_{i_n}(t) - f_{i_n}(t_0)| < \frac{\varepsilon_0}{2}$, 即 $f_{i_n}(t) \geq \frac{\varepsilon_0}{2}$, 因此

$$\begin{aligned} |\int_0^T f_{i_n}(t) dt| &= \int_0^T f_{i_n}(t) dt \geq \\ \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} f_{i_n}(t) dt &\geq \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot 2\delta = \varepsilon_0 \cdot \delta \end{aligned} \quad (28)$$

与

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_a^b f_i(t) dt = 0 \quad (29)$$

矛盾, 因此 $f_i(t)$ 逐点收敛于0.

作者简介:

张冬梅 (1973—), 女, 讲师, 2000年毕业于东北师范大学, 获理学硕士学位, 现为浙江工业大学自动化所博士研究生, 主要研究领域为迭代学习控制、时滞系统、鲁棒控制, E-mail:meidzh@zjut.edu.cn;

孙明轩 (1961—), 男, 教授、博士生导师, 研究方向为学习控制与自适应信号处理;

俞立 (1961—), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为网络控制、先进控制策略、计算机控制系统的设计与集成.

(上接第794页)

- [5] MA C B, HORI Y. Backlash vibration suppression in torsional system based on the fractional order Q-filter of disturbance observer[C] // *Proc of the 8th IEEE Int Workshop on Advanced Motion Control*. Piscataway, USA: IEEE Press, 2004: 577 – 582.
- [6] PODLUBNY I. Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation[J]. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2002, 5(4): 367 – 386.
- [7] CHEN Y Q, MOORE K L. Discretization schemes for fractional-

order differentiators and integrators[J]. *IEEE Trans on Circuits and Systems*, 2002, 49(3): 363 – 367.

作者简介:

曹军义 (1977—), 男, 博士研究生, 研究方向为智能机电系统控制和优化, E-mail:caojy@mailst.xjtu.edu.cn;

曹秉刚 (1953—), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为机电系统控制和新能源变换控制, E-mail:inte-cao@mail.xjtu.edu.cn