第 23 卷第 5 期　控 制 理 论 与 应 用　Vol. 23 No. 5
2006 年 10 月　Control Theory & Applications　Oct. 2006

文章编号：1000−8152(2006)05−0800−05

一类改进的输入时滞的线性时滞系统的H_∞控制

柴　琳, 费树岷

(东南大学 自动化学院, 江苏 南京 210096)

摘要: 针对一类带输入时滞的线性时滞系统, 基于LMI方法, 采用一种基于“descriptor form” 的Lyapunov-Krasovskii泛函和无记忆的状态反馈控制, 在放大过程中对未知矩阵减小限制并降低维数, 从而得到了该类系统的H_∞ 控制器的保守性较小、较为简便的充分条件解, 对以往的方法指出问题并提出改进思想, 得到了各种情况下如何选用保守性较小且简便实用的算法, 仿真实例验证了算法的可行性.

关键词: 输入时滞; 时滞系统; LMI; 基于“descriptor form”的Lyapunov-Krasovskii 泛函

中图分类号: TP13　　**文献标识码**: A

Improved method of H-infinity control for a class of linear time-delay systems with input delay

CHAI Lin, FEI Shu-min

(Department of Automation, Southeast University, Nanjing Jiangsu 210096, China)

Abstract: A method of LMI(linear matrix inequality)and a kind of Lyapunov-Krasovskii functional based on “descriptor form” are applied to design H-infinity controller for a class of linear time-delay systems with input delay, which is via the memoryless state feedback control. Less restrictions and low dimensions are realized on unknown matrices, resulting in a less conservative and simpler sufficient condition. Disadvantages and their improvement are also proposed for the old strategies, and proper algorithms under special situations are brought forward with some feasible numerical examples.

Key words: input delay; time-delay systems; LMI; Lyapunov-Krasovskii functional based on “descriptor form”

1　引言(Introduction)

近年来, 对于时滞系统的H_∞控制已经取得了较大发展[1~11], 文[1～3]给出了若干线性状态时滞系统H_∞ 无记忆或带记忆的状态反馈控制.而线性时滞且输入时滞的系统在文[4]中初次涉及, 但用的是基于传统的Lyapunov-Krasovskii函数, 虽然得到了依赖于时滞的状态反馈控制解, 但在推导过程中多次对矩阵不等式进行放大, 增加了保守性, 而且在求解时需要事先确定某些未知矩阵, 计算困难.近几年来, 一种能集中放大矩阵不等式的基于“descriptor form”的Lyapunov-Krasovskii泛函方法开始在时滞系统的研究中得到应用[5,7~11], 由于能一次集中放大不等式, 因此结论的保守性大大减小, 但是这些结论中大多要求维数较高的LMI, 而且在求解过程中为了能得到LMI往往需要使某些矩阵有特定的形式[7~10], 这也带来了保守性, 对于带输入时滞的系统为了能得到类似于不带输入时滞时的结果, 所引入的“等价子系统”由于需要事先确定一未知大参数不太实用, 而且结果与原系统有差别, 更有着不可忽略的矛盾(见注3).

针对状态时滞且输入时滞的线性时滞系统, 研究该类系统的H_∞控制问题, 不仅吸取了文[1～11]中时滞相关型控制及基于“descriptor form”的Lyapunov-Krasovskii泛函的优点, 把系统结构充分体现在Lyapunov-Krasovskii函数中, 从而克服以往Lyapunov函数在推导过程中由于矩阵不等式放大次数较多带来的保守性. 在此基础上, 矩阵不等式放大方式也采用了保守性较小的一种(见注1), 同时提出了改进的“等价子系统”思想, 并指出了在不同情况下应使用何种算法以达到保守性较小、实时性较高, 数值仿真例子相互比较验证了可行性.

2　问题的提出(Problem formulation and preliminary)

考虑如下带输入时滞的线性时滞系统

收稿日期: 2004−11−24; 收修改稿日期: 2005−11−15.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(69934010); 博士点基金资助项目(20030286013).

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A\boldsymbol{x}(t)+A_1\boldsymbol{x}(t-\tau_1)+\\ \qquad B_1\boldsymbol{w}(t)+B_2\boldsymbol{u}(t-\tau_2),\\ \boldsymbol{z}(t)=C\boldsymbol{x}(t)+D\boldsymbol{u}(t),\\ \boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\phi}(t),\ \ \forall t\in[-\tau,0],\ \tau=\max\{\tau_1,\tau_2\}.\end{cases}\tag{1}$$

式中: $\boldsymbol{x}(t)\in\mathbb{R}^n$是状态向量, $\boldsymbol{w}(t)\in\mathbb{R}^{n_1}$为干扰输入向量, $\boldsymbol{u}(t)\in\mathbb{R}^{n_2}$为控制输入向量, $\boldsymbol{z}(t)\in\mathbb{R}^{n_3}$为系统受控向量, A,A_1,B_1,B_2,C,D为具有适当维数的矩阵, $\tau_1>0$为系统状态时滞常数, $\tau_2>0$为系统输入时滞常数, ϕ为系统初始状态函数.

本文研究的目的: 对于给定的常数$\gamma>0$, 假定系统状态$\boldsymbol{x}$是可测的, 如何设计一个时滞相关型状态反馈控制

$$u(t)=K\boldsymbol{x}(t).\tag{2}$$

其中$K=K(\tau_1,\tau_2)$为待求的控制器增益矩阵, 使得系统(1)是渐近稳定的, 且满足$\|\boldsymbol{z}\|_2<\gamma\|\boldsymbol{w}\|_2$(其中$\|\cdot\|_2$为$L_2$范数).

引理 1[6] 对于适当维数的X,Y, 有

$$X^{\mathrm T}Y+Y^{\mathrm T}X\leqslant\alpha X^{\mathrm T}X+\frac{1}{\alpha}Y^{\mathrm T}Y,\ \forall\alpha>0.\tag{3}$$

对任意适当维数的矩阵M, 向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$有

$$-2\boldsymbol{a}^{\mathrm T}\boldsymbol{b}\leqslant\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{b}\end{bmatrix}^{\mathrm T}\begin{bmatrix}X & XM\\ M^{\mathrm T}X & (M^{\mathrm T}X+I)X^{-1}(XM+I)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{b}\end{bmatrix}.\tag{4}$$

3 主要结果(Main results)

由式(1)(2)可得系统闭环状态方程为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A\boldsymbol{x}(t)+A_1\boldsymbol{x}(t-\tau_1)+\\ \qquad B_1\boldsymbol{w}(t)+B_2K\boldsymbol{x}(t-\tau_2),\\ \boldsymbol{z}(t)=C\boldsymbol{x}(t)+DK\boldsymbol{x}(t).\end{cases}\tag{5}$$

用文[5]中"descriptor form"的方法, 令$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{y}(t)$, 则有

$$0=-\boldsymbol{y}(t)+(A+A_1+B_2K)\boldsymbol{x}(t)+B_1\boldsymbol{w}(t)-A_1\int_{t-\tau_1}^{t}\boldsymbol{y}(s)\mathrm{d}s-B_2K\int_{t-\tau_2}^{t}\boldsymbol{y}(\xi)\mathrm{d}\xi.\tag{6}$$

对系统(6), 取Lyapunov-Krasovskii函数为

$$V(\boldsymbol{x}_t,\boldsymbol{w}_t)=V_1(\boldsymbol{x}_t,\boldsymbol{w}_t)+\sum_{i=1}^{2}\int_{-\tau_i}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\boldsymbol{y}(s)^{\mathrm T}Q_i\boldsymbol{y}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta+\sum_{i=1}^{2}\int_{t-\tau_i}^{t}\boldsymbol{x}(s)^{\mathrm T}S_i\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s.\tag{7}$$

其中$V_1(\boldsymbol{x}_t,\boldsymbol{w}_t)=\boldsymbol{x}^{\mathrm T}P\boldsymbol{x}$, 则$V_1(\boldsymbol{x}_t,\boldsymbol{w}_t)$沿系统(6)的导数为

$$\begin{aligned}&\dot V_1(\boldsymbol{x}_t,\boldsymbol{w}_t)=2\boldsymbol{x}^{\mathrm T}P\boldsymbol{y}=\\ &2[\boldsymbol{x}^{\mathrm T}\ \ \boldsymbol{y}^{\mathrm T}]\begin{bmatrix}P & P_1\\ 0 & P_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}\\ 0\end{bmatrix}=\\ &2[\boldsymbol{x}^{\mathrm T}\ \boldsymbol{y}^{\mathrm T}]\begin{bmatrix}P & P_1\\ 0 & P_2\end{bmatrix}\Big\{\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}\\ \bar A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}+B_1\boldsymbol{w}\end{bmatrix}-\\ &\sum_{i=1}^{2}\begin{bmatrix}0\\ \bar A_i\end{bmatrix}\int_{t-\tau_i}^{t}\boldsymbol{y}(s)\mathrm{d}s\Big\}.\end{aligned}\tag{8}$$

其中: $\bar A=A+A_1+B_2K$, $\bar A_1=A_1$, $\bar A_2=B_2K$, 令$E=\begin{bmatrix}I & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $\bar P=\begin{bmatrix}P & P_1\\ 0 & P_2\end{bmatrix}$, 矩阵$P_1$, P_2只需满足$E\bar P^{\mathrm T}=\bar PE$就可使$\dot V_1(x_t,w_t)$与引入"descriptor form" 前相同, $V(\boldsymbol{x}_t,\boldsymbol{w}_t)$沿系统(6)的导数为

$$\begin{aligned}&\dot V(\boldsymbol{x}_t,\boldsymbol{w}_t)=\\ &\dot V_1(\boldsymbol{x}_t,\boldsymbol{w}_t)+\sum_{i=1}^{2}\{\int_{-\tau_i}^{0}[\boldsymbol{y}(t)^{\mathrm T}Q_i\boldsymbol{y}(t)-\\ &\boldsymbol{y}(t+\theta)^{\mathrm T}Q_i\boldsymbol{y}(t+\theta)]\mathrm{d}\theta+\\ &\sum_{i=1}^{2}[\boldsymbol{x}(t)^{\mathrm T}S_i\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}(t-\tau_i)^{\mathrm T}S_i\boldsymbol{x}(t-\tau_i)]\},\end{aligned}$$

代入式(8)得

$$\dot V(\boldsymbol{x}_t,\boldsymbol{w}_t)=\tilde{\boldsymbol{x}}(t)^{\mathrm T}\varXi_0\tilde{\boldsymbol{x}}(t)+\sum_{i=1}^{2}\eta_i-\sum_{i=1}^{2}\int_{t-\tau_i}^{t}\boldsymbol{y}(\theta)^{\mathrm T}Q_i\boldsymbol{y}(\theta)\mathrm{d}\theta.\tag{9}$$

其中:

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(t)^{\mathrm T}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}^{\mathrm T} & \boldsymbol{y}^{\mathrm T} & \boldsymbol{w}^{\mathrm T} & \boldsymbol{x}(t-\tau_1)^{\mathrm T} & \boldsymbol{x}(t-\tau_2)^{\mathrm T}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\eta}_i(t)=-2\int_{t-\tau_i}^{t}[\boldsymbol{x}^{\mathrm T}\ \ \boldsymbol{y}^{\mathrm T}]\bar P\begin{bmatrix}0\\ \bar A_i\end{bmatrix}\boldsymbol{y}(s)\mathrm{d}s,$$

$$\varXi_0=\begin{bmatrix}P_1\bar A+\bar A^{\mathrm T}P_1^{\mathrm T}+\sum_{i=1}^{2}S_i & P-P_1+\bar A^{\mathrm T}P_2^{\mathrm T} & P_1B_1 & 0 & 0\\ P-P_1^{\mathrm T}+P_2\bar A & \sum_{i=1}^{2}\tau_iQ_i-P_2-P_2^{\mathrm T} & P_2B_1 & 0 & 0\\ (P_1B_1)^{\mathrm T} & (P_2B_1)^{\mathrm T} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -S_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -S_2\end{bmatrix}.$$

由引理1的式(4)可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta}_i\leqslant&\tau_i\big[\boldsymbol{x}^{\mathrm T}\ \ \boldsymbol{y}^{\mathrm T}\big]\bar P\begin{bmatrix}0\\ \bar A_i\end{bmatrix}(M_i^{\mathrm T}R_i+I)R_i^{-1}(R_iM_i+I)\cdot\\ &\big[0\ \ \bar A_i^{\mathrm T}\big]\bar P^{\mathrm T}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{bmatrix}+\int_{t-\tau_i}^{t}\boldsymbol{y}^{\mathrm T}(s)R_i\boldsymbol{y}(s)\mathrm{d}s+\\ &2\int_{t-\tau_i}^{t}\boldsymbol{y}^{\mathrm T}(s)\mathrm{d}sR_iM_i\begin{bmatrix}0 & \bar A_i^{\mathrm T}\end{bmatrix}\bar P^{\mathrm T}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

注意到$\int_{t-\tau_i}^{t}\boldsymbol{y}(s)\mathrm{d}s=\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}(t-\tau_i)$, 因此

$$\boldsymbol{\eta}_i \leqslant \tau_i[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}]\bar{P}\begin{bmatrix}0\\ \bar{A}_i\end{bmatrix}(M_i^{\mathrm{T}}R_i+I)R_i^{-1}(R_iM_i+ I)[0\ \ \bar{A}_i^{\mathrm{T}}]\bar{P}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{bmatrix}+\int_{t-\tau_i}^{t}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(s)R_i\boldsymbol{y}(s)\mathrm{d}s+ 2(\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}(t-\tau_i))^{\mathrm{T}}R_iM_i\begin{bmatrix}0\ \ \bar{A}_i^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\bar{P}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{bmatrix}. \tag{10}$$

其中: $R_i\ (i=1,2)$, 为任一正定矩阵, $M_i\ (i=1,2)$, 为适当维数的矩阵.

取正定矩阵$R_i=Q_i$, 令$W_i=\bar{A}_iM_i^{\mathrm{T}}Q_i$,式(10)代入式(8)(9)得

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}_t,\boldsymbol{w}_t)\leqslant\ \tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)^{\mathrm{T}}\varXi\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t). \tag{11}$$

其中:

$$\varXi=\begin{bmatrix}\varSigma_1 & \varSigma_2 & P_1B_1 & -P_1W_1 & -P_1W_2 & P_1(W_1+\bar{A}_1) & P_1(W_2+\bar{A}_2)\\ * & \varSigma_3 & P_2B_1 & -P_2W_1 & -P_2W_2 & P_2(W_1+\bar{A}_1) & P_2(W_2+\bar{A}_2)\\ * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & -S_1 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & -S_2 & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & -\tau_1^{-1}Q_1 & 0\\ * & * & * & * & * & * & -\tau_2^{-1}Q_2\end{bmatrix},$$

$$\varSigma_3=\sum_{i=1}^{2}\tau_iQ_i-P_2-P_2^{\mathrm{T}},$$

$$\varSigma_1=P_1\bar{A}+\bar{A}^{\mathrm{T}}P_1^{\mathrm{T}}+\sum_{i=1}^{2}P_1W_i+\sum_{i=1}^{2}W_i^{\mathrm{T}}P_1+\sum_{i=1}^{2}S_i,$$

$$\varSigma_2=P-P_1+\bar{A}^{\mathrm{T}}P_2^{\mathrm{T}}+\sum_{i=1}^{2}W_i^{\mathrm{T}}P_2.$$

注 1 式(10)采用引理1的式(4)而不是式(3)进行放大, 虽然会产生新的未知矩阵$M_i\ (i=1,2)$, 但式(4)比式(3)的保守性要小[7]. 文[7, 8]中也采用了式(4)的放大方式, 但未知矩阵R_i, $M_i\ (i=1,2)$的维数均为$2n$, 给计算带来了不便. 本文注意到$\begin{bmatrix}0\\ \bar{A}_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ I\end{bmatrix}\bar{A}_i$, 在得到式(10)后把$[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}]\bar{P}\begin{bmatrix}0\\ \bar{A}_i\end{bmatrix}=[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}]\bar{P}\begin{bmatrix}0\\ I\end{bmatrix}\bar{A}_i=(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P_1+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}P_2)\bar{A}_i$, 使得$R_i$, $M_i\ (i=1,2)$的维数均为n, 大大简化了后面要求的LMI的维数.更值得注意的是, 文[7, 8]中$W_i=R_iM_iP$, 为了求解的方便令$W_i=\varepsilon_iP$, 其中ε_i为待定常数, 这样有一定保守性—矩阵乘积R_iM_i不一定就为一常数对角阵ε_iI. 而本文由于令$W_i=\bar{A}_iM_i^{\mathrm{T}}Q_i$, 和$\bar{A}_i, Q_i$看成不同的矩阵进行求解, 由于有适当维数矩阵$M_i^{\mathrm{T}}$的存在, $W_i, \bar{A}_i$, Q_i并不互相影响(只需M_i^{T}有解即可), 从而减小了保守性.

为研究系统(6)的H_∞特性, 令初始值$\phi(t)=0$, 则对$T>0$及给定的常数$\gamma>0$, 有

$$J_{\mathrm{T}}=\int_0^T(\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}-\gamma^2\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w})\mathrm{d}t\leqslant \int_0^T(\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}-\gamma^2\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}+\dot{V}(\boldsymbol{x}_t,\boldsymbol{w}_t))\mathrm{d}t= \int_0^T[(C\boldsymbol{x}(t)+DK\boldsymbol{x}(t))^{\mathrm{T}}(C\boldsymbol{x}(t)+DK\boldsymbol{x}(t))- \gamma^2\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}+\dot{V}(\boldsymbol{x}_t,\boldsymbol{w}_t)]\mathrm{d}t\leqslant\int_0^T\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\tilde{\varXi}\tilde{\boldsymbol{x}}(t)\mathrm{d}t. \tag{12}$$

其中

$$\tilde{\varXi}=\varXi+\mathrm{diag}((C+DK)^{\mathrm{T}}(C+DK)\ \ 0\ \ -\gamma^2I_{n_1\times n_1}\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0).$$

故当$\tilde{\varXi}<0$时可得$J_T<0$, 由式(11)(12)可得$\tilde{\varXi}<0$等价于求一个维数为$7n$的矩阵不等式$\hat{\varXi}<0$, 对式$\hat{\varXi}<0$两边同乘以矩阵$\mathrm{diag}(X_1\ \ X_2\ \ I\ \ X\ \ X\ \ X\ \ X)$, 其中$X_1=P_1^{-1}$, $X_2=P_2^{-1}$, 由于式(8)中对矩阵P_1, P_2只需满足$E\bar{P}^{\mathrm{T}}=\bar{P}E$即可, 考虑到计算简便和不影响保守性, 可令$P_1=n_1/n_2P$, $P_2=1/n_2P$, 其中的n_1, n_2为待定正常数.因此$P^{-1}=X=n_1/n_2X_1=1/n_2X_2$, 再由Schur补引理$\tilde{\varXi}<0$等价于

$$\breve{\varXi}=\begin{bmatrix}\bar{\varSigma}_1 & \bar{\varSigma}_2 & B_1 & -\bar{W}_1 & -\bar{W}_2 & \bar{W}_1+A_1X & \bar{W}_2+B_2U & \frac{n_2}{n_1}(CX+DU)^{\mathrm{T}}\\ * & \bar{\varSigma}_3 & B_1 & -\bar{W}_1 & -\bar{W}_2 & \bar{W}_1+A_1X & \bar{W}_2+B_2U & 0\\ * & * & -\gamma^2I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & -\bar{S}_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & -\bar{S}_2 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & -\tau_1^{-1}\bar{Q}_1 & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & * & -\tau_2^{-1}\bar{Q}_2 & 0\\ * & * & * & * & * & * & * & -I\end{bmatrix}<0. \tag{13}$$

其中:

$$\bar{\varSigma}_1=(A+A_1)\frac{n_2}{n_1}X+\frac{n_2}{n_1}B_2U+\frac{n_2}{n_1}X(A+A_1)^{\mathrm{T}}+\frac{n_2}{n_1}(B_2U)^{\mathrm{T}}+\frac{n_2}{n_1}\sum_{i=1}^{2}\bar{W}_i+\frac{n_2}{n_1}\sum_{i=1}^{2}\bar{W}_i^{\mathrm{T}}+(\frac{n_2}{n_1})^2\sum_{i=1}^{2}\bar{S}_i,$$

$$\bar{\varSigma}_2=n_2\frac{n_2-n_1}{n_1}X+\frac{n_2}{n_1}X(A+A_1)^{\mathrm{T}}+\frac{n_2}{n_1}(B_2U)^{\mathrm{T}}+\frac{n_2}{n_1}\sum_{i=1}^{2}\bar{W}_i^{\mathrm{T}},$$

$\bar{\Sigma}_3 = n_2^2 \sum\limits_{i=1}^{2} \tau_i \bar{Q}_i - 2n_2 X, \bar{S}_i = X S_i X,$

$\bar{Q}_i = X Q_i X, \bar{W}_i = W_i X, i = 1, 2, U = KX,$

由此可得如下结论.

定理 1　对于输入时滞的线性时滞系统(1), 如果存在矩阵U, $\bar{W}_i$ $(i = 1, 2)$, 正定矩阵X, $\bar{Q}_i$, $\bar{S}_i$ $(i = 1, 2)$, 及正常数n_i $(i = 1, 2)$, 使得线性矩阵不等式(13)成立, 则采用控制器(2)是可镇定的, 且H$_\infty$性能指标小于给定的界γ. 控制器增益矩阵为$K = UX^{-1}$.

证　可以看出, 如果存在矩阵U, $\bar{W}_i$ $(i = 1, 2)$, 正定矩阵X, $\bar{Q}_i$, $\bar{S}_i$ $(i = 1, 2)$, 及正常数n_1, n_2, 使得式(13)成立, 则线性时滞系统(1)内部是渐近稳定的, 且式(12)可以满足. 用MATLAB软件中的LMI工具箱可算得矩阵U、正定矩阵X, 即可算得$K = UX^{-1}$.　　证毕.

注 2　在求解LMI(13)时可先定$n_1 = 1$, 然后不断调整n_2的值直至式(13)可行.另外, 由LMI(13)可得到$Q_i = X^{-1}\bar{Q}_i X^{-1}$及$W_i = \bar{W}_i X^{-1}$, 即得$\bar{A}_i M_i^{\mathrm{T}} = W_i Q_i^{-1}$, 而$\bar{A}_1 = A_1$已知, $\bar{A}_2 = B_2 K = B_2 U X$, 这样由$\bar{A}_i M_i^{\mathrm{T}} = W_i Q_i^{-1}$可按MATLAB线性方程组的算法得到$M_i^{\mathrm{T}}$的解(一般很容易得到有解), 如果经检验无解则再调整n_1, n_2的值直至LMI(13)可行且检验M_i^{T}有解为止.

4　仿真实例、改进方案及各种情况下使用不同算法的分析(Simulation examples, improved approaches, and analysis for how to use appropriate algorithms under special situations)

1)　一般带输入时滞系统的例子. 与传统的Lyapunov-Krasovskii泛函方法相比, 考虑如下与系统(1)相符的系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t-0.4) + \\ \qquad \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix} \boldsymbol{w}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0.03 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}(t-0.9), \\ z(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + 0.1\boldsymbol{u}(t). \end{cases}$$

如果用文[4]中的方法, 将很难计算所要求的LMI, 因为要事先确定9个未知正定矩阵P_i $(i = 1, \cdots, 9)$的值, 以至于无法确定该方法是否能得到系统满足H$_\infty$特性的稳定解.如果用定理1, 取$\gamma = 0.0009$, $K = [-0.0000 \quad -10.0000]$, 且经检验$M_i^{\mathrm{T}}$ $(i = 1, 2)$有解, 因此本文的方案具有明显小的保守性、实用性.

注 3　对于带输入时滞的系统,文[7～9]没有研究, 但其中的$u = K\boldsymbol{x}(t-\tau)$可看成是本文中$\tau_1 = \tau_2 = \tau$, 即状态时滞与输入时滞参数相等的特例.文[7, 9]都采用了基于“descriptor form” Lyapunov-Krasovskii泛函, 且都使用了“等价子系统方法”(构造一子系统$\dot{\bar{u}} = -\rho\bar{\boldsymbol{u}}(t) + \rho\boldsymbol{u}(t)$, 在$\rho \gg 1$时$\bar{\boldsymbol{u}} \to \boldsymbol{u}$, 再令$\xi = \mathrm{col}\{\boldsymbol{x} \;\; \bar{\boldsymbol{u}}\}$为新状态变量与原系统联立后通过新系统的控制矩阵$\tilde{K}$反求原系统的控制矩阵$K$)—显然用这样的方法不仅大常数$\rho \gg 1$很难确定, 而且在[7, 9]中都指出所得$K$与原系统有误差, 因此该方法并不十分实用；还有一点值得注意—如把$\bar{\boldsymbol{u}}$当成$\boldsymbol{u}$使用, 则有$\dot{\boldsymbol{u}} = \dot{\bar{\boldsymbol{u}}} = -\rho\bar{\boldsymbol{u}}(t) + \rho\boldsymbol{u}(t) = -\rho\boldsymbol{u}(t) + \rho\boldsymbol{u}(t) = 0$即控制输入$\boldsymbol{u}$的变化律是趋于零的(注意$\rho \to \infty$而不是$t \to \infty$时的变化律), 这与文[7～9]中所说的$\boldsymbol{u} = K\boldsymbol{x}(t)$即有$\dot{\boldsymbol{u}} = K\dot{\boldsymbol{x}}(t)$不等于0相矛盾, 因此文[7～9]中的结论存在问题.

2)　不带输入时滞(即$\tau_2 = 0$)且$\boldsymbol{z}(t) = \mathrm{col}\{C\boldsymbol{x}(t) \;\; D\boldsymbol{u}(t)\}$的例子. 与传统的及现有的基于“descriptor form”的Lyapunov-Krasovskii泛函方法相比, 考虑如下不带入输入时滞的系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t-0.999) + \\ \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{w}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}(t), \\ \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t) = \{[0 \;\; 1]\boldsymbol{x}(t)^{\mathrm{T}} \;\; 0.1\boldsymbol{u}(t)^{\mathrm{T}}\}. \end{cases}$$

用传统Lyapunov-Krasovskii泛函的结论[11]可得$\gamma = 1.8822$, $K = -[0.10452 \quad 749058]$, 用引理1中式(3)进行放大推导得到的结论[9] $\gamma = 0.22844$, $K = [0 \quad -182194]$, 在应用基于“descriptor form”的Lyapunov-Krasovskii泛函并使用引理1中式(4)进行放大, 但令$W_i = Q_i M_i \bar{P} = \varepsilon_i \bar{P}$[7,8]得到的结果为取$\varepsilon = -0.3$, $\gamma = 0.1287$, $K = [0 \quad -1028500]$. 用定理1可得$\gamma = 0.6840$, $K = [-0.0000 \quad -3.4994]$, 且经检验$M_1^{\mathrm{T}}$有解.

注 4　尽管定理1具有注1中所述优点, 但值得注意的是本文由于W_i的存在, 不能像文[7～9]那样把$\bar{P}$当成一个整体进行计算(否则会有W_i的矛盾解), 特别是文[7, 8]中令$W_i = R_i M_i \bar{P} = \varepsilon_i \bar{P}$虽然$R_i$有局限性但整体求$\bar{P}$, 且$\varepsilon_i$一般取负值, 其保守性显然比使用式(3)的文[9]要小, 因此本文令$P_1 = n_1/n_2 P$, $P_2 = 1/n_2 P$—限制了P_1, P_2的取法因此也带来一定保守性.可见, 当系统不带输入时滞时, 采用文[7, 8]中的方案保守性最小, 因此结论的保守性不仅受到放大方式的影响, 而且要受到计算取值的影响, 对于体

现"descriptor form"的$\bar{P}$应尽量当成一个整体进行计算.

由此可以想到有没有一种方法既可以整体求解$\bar{P}$以减小保守性, 又能不出现文[7, 9]中$\dot{\boldsymbol{u}}=0$的矛盾呢？可有如下两种改进方案(这里是思想介绍, 其具体结果将在其它文章中推导):

1) 构造一子系统$m\dot{\bar{\boldsymbol{u}}}=-\bar{\boldsymbol{u}}(t)+\boldsymbol{u}(t)$, 显然这样的系统在$\dot{\bar{\boldsymbol{u}}}$为有限值的情况下满足在$m\to 0$时$\bar{\boldsymbol{u}}\to\boldsymbol{u}$, 不会产生文[7, 9]中把$\boldsymbol{u}$用$\bar{\boldsymbol{u}}$代入却产生$\dot{\boldsymbol{u}}=0$的矛盾. 令$\xi=\mathrm{col}\{\boldsymbol{x}\ \ \tau\bar{\boldsymbol{u}}\}$, 然后再用类似于[7]中的推导.值得注意的是如果采用带记忆状态反馈控制, 且带记忆的状态反馈控制的时滞参数不止一个时, 有$\boldsymbol{u}(t-\tau_{l+1})=\sum\limits_{i=0}^{l}K_i\boldsymbol{x}(t-\tau_{l+1+i})(\tau_{l+1+i}=\tau_i+\tau_{l+1},\tau_{l+1}$为输入时滞参数, $\tau_i\ (i=1,\cdots,l)$为状态时滞参数), 应有$\xi=\mathrm{col}\{\boldsymbol{x}\ \ \tau\bar{\boldsymbol{u}}_1\ \ \cdots\ \ \tau\bar{\boldsymbol{u}}_{l+1}\}$, 其中$\bar{\boldsymbol{u}}_i=K_i\boldsymbol{x}$, 新构成的系统维数更高, 但可以整体求$\bar{P}$, 保守性小.

2) 对于小时滞系统, 构造$\tau_i\dot{\bar{\boldsymbol{u}}}=-\bar{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{u}$可得到$\bar{\boldsymbol{u}}\approx\boldsymbol{u}(t-\tau_i)$, 这样采用无记忆反馈控制就以$\xi=\mathrm{col}\{\boldsymbol{x}\ \ \tau_{l+1}\bar{\boldsymbol{u}}\}$(采用带记忆反馈控制就用$\xi=\mathrm{col}\{\boldsymbol{x}\ \ \tau_{l+1}\bar{\boldsymbol{u}}_1\ \ \cdots\ \ \tau_{2l+1}\bar{\boldsymbol{u}}_{l+1}\}$)为向量重新构造与原系统等价的新系统的状态方程, 而且不用像1)要估计一极小的参数$m\to 0$, 给求解带来了方便.

注 5 由注3、注4综述:当系统的状态变量为单时滞时, 采用形式为式(2)的无记忆状态反馈控制器的保守性最小的结论是文[7, 8]中的结果—基于"descriptor form"的Lyapunov-Krasovskii泛函所引入的$\bar{P}$当成一个整体进行计算；当系统在含有状态时滞的同时还带有输入时滞, 这时如系统维数较高或实时性要求较高应采用本文定理1的结论, 只有系统维数较低且保守性要求极高才可采用注4中改进的"等价子系统"方法(特别对于小时滞系统, 尽量采用其改进的方案2))；一般情况下还是倾向于使用定理1(简便实用, 且控制矩阵没有误差).因此, 任何结论的保守性、实用性都不是绝对的, 对于具体问题应具体分析.

5 结论(Conclusion)

本文的主要目的是针对一类带输入时滞的线性时滞系统, 研究该系统的H_∞控制问题, 利用一种基于"descriptor form" 的Lyapunov-Krasovskii泛函和依赖于时滞的线性矩阵不等式(LMI)方法, 在此基础上进行改进使结果更简便、保守性更小, 得到了使闭环系统稳定且满足H_∞性能指标的充分条件.

参考文献(References):

[1] 姜偕富, 费树岷, 冯纯伯. 线性时滞系统H_∞控制—线性矩阵不等式方法[J]. 安庆师范学院学报(自然科学版), 1999, 5(1): 8 – 11.
(JIANG Xiefu, FEI Shumin, FENG Chunbo. A type of H_∞ control for linear time-delay system: a LMI approach[J]. *J of Anqing Teachers College (Natural Science)*, 1999, 5(1): 8 – 11.)

[2] 姜偕富, 费树岷, 冯纯伯. 时滞线性系统的H_∞控制[J]. 控制与决策, 1999, 14(6): 712 – 715.
(JIANG Xiefu, FEI Shumin, FENG Chunbo. The H_∞ control of linear time-delay systems[J]. *Control and Decision*, 1999, 14(6): 712 – 715.)

[3] 姜偕富, 徐立文. 不确定输入时滞系统的滞后相关型鲁棒H_∞控制[J]. 清华大学学报(自然科学版), 2003, 43(7): 912 – 915.
(JIANG Xiefu, XU Wenli. Delay-dependent robust H_∞ feedback control for uncertain systems with input delay[J]. *J of Tsinghua University (Sci & Tech)*, 2003, 43(7): 912 – 915.)

[4] 姜偕富, 费树岷, 冯纯伯. 线性时滞系统依赖于时滞的H_∞状态反馈控制[J]. 自动化学报, 2001, 27(1): 109 – 114.
(JIANG Xiefu, FEI Shumin, FENG Chunbo. Delay-dependent feedback control for linear time-delay system with input delay[J]. *Acta Automatic Sinica*, 2001, 27(1): 109 – 114.)

[5] FRIDMAN E. New Lyapunov-Krasovskii functionals for stability of linear retarded and neutral type systems[J]. *Systems & Control Letters*, 2001, 43(4): 309 – 319.

[6] PETERSEN I R, HOLLOT V. A Riccati equation to the stabilization of uncertain linear systems[J]. *Automatica*, 1986, 22(4): 397 – 411.

[7] FRIDMAN E, SHAKED U. A descriptor system approach to H_∞ control of linear time-delay systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 47 (2): 253 – 270.

[8] FRIDMAN E, SHAKED U. An improved stabilization method for time-delay systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2003, 47 (11): 1931 – 1937.

[9] FRIDMAN E, SHAKED U. New bounded real lemma representations for time-delay systems and their applications[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2001, 46 (12): 1973 – 1979.

[10] CHEN W H, GUAN Z H, LU X. Delay-dependent guaranteed cost control for uncertain discrete-time systems with both state and input delays[J]. *J of the Franklin Institute*, 2004, 341(5): 419 – 430.

[11] 陈东彦, 刘伟华. 多时滞Lurie控制系统的时滞相关鲁棒稳定性[J]. 控制理论与应用, 2005, 22(3): 499 – 502.
(CHEN Dongyan , LIU Weihua. Delay-dependent robust stability for Lurie control systems with multiple time-delays [J]. *Control Theory & Applications*, 2005, 22(3): 499 – 502.)

作者简介:

柴 琳 (1978—), 女, 博士研究生, 主要研究兴趣为时滞系统控制、自适应控制、H_∞控制等研究, E-mail: chailin_1@163.com;

费树岷 (1961—), 男, 工学博士, 教授, 博士生导师, 主要研究兴趣为非线性控制系统设计与综合、鲁棒控制、自适应控制、时滞系统分析与综合等.