第 23 卷第 5 期　　控 制 理 论 与 应 用　　Vol. 23 No. 5
2006 年 10 月　　Control Theory & Applications　　Oct. 2006

文章编号：1000−8152(2006)05−0819−04

考虑鲁棒性的生产调度期望值模型

丁　然, 李歧强, 孙同景, 杨加敏

(山东大学 控制科学与工程学院, 山东 济南 250061)

摘要: 对于含有随机因素的生产调度过程, 期望值模型不能保证调度的鲁棒性. 本文借鉴机会约束规划思想, 根据随机参数概率分布的两种不同情况, 提出了使期望值模型可行解满足鲁棒性能指标的充分条件, 并据此构造了鲁棒性约束, 使解空间收缩, 提高模型的鲁棒性. 仿真实验结果表明该模型在解决调度鲁棒性的问题方面是有效的.

关键词: 生产调度; 鲁棒性; 随机规划; 期望值; 机会约束规划

中图分类号: TB114　　**文献标识码**: A

Expected value model of production schedule by considering robustness constraints

DING Ran, LI Qi-qiang, SUN Tong-jing, YANG Jia-min

(School of Control Science and Engineering, Shandong University, Jinan Shangdong 250061, China)

Abstract: Stochastic phenomenon is prevalent in production processes, but expected value model cannot ensure the robustness. Based on the chance constraints programming, the sufficient conditions according to two different kind of probability distribution of the stochastic parameters are proposed and proved in this paper, under which the feasible solutions can satisfy the robust index. The robustness constraints are then constructed to contract the feasible region and improve the robustness of expected value model. Finally, the simulation results illustrate the validity of the improved model.

Key words: production scheduling; robustness; stochastic programming; expected value; chance constraints programming

1 引言(Introduction)

生产调度过程中的各种不确定因素, 使得由确定性模型得到的优化调度难以达到预期的效果, 甚至不再可行. 如何处理这种不确定性问题, 提高调度的鲁棒性, 引起了越来越多的关注[1~3]. 优化后分析是一种常用的方法[4~5], 也有很多学者认为应该采取更为主动的方法, 使调度模型在一定程度上吸收不确定因素, 对模型的数据不那么敏感, 解自然可以保证一定鲁棒性[6~8]. 通过建立适当的模型来提高调度的鲁棒性是一种有效的手段.

随机因素是一种常见且典型的不确定因素, 一般用随机规划模型取代传统的数学规划模型来处理带有随机因素的生产调度问题[9,10], 但处理起来十分复杂. 因此在实际生产中, 经常采用期望值模型, 甚至直接对随机参数取均值, 这样建模和求解都相对简单, 但是不能保证鲁棒性.

本文针对含有随机参数的生产调度问题, 根据约束中随机参数的概率分布, 构造了两种新的鲁棒性约束, 改进了原有的期望值模型, 使解空间收缩, 满足一定的鲁棒性要求.

2 模型的鲁棒性(Robustness of model)

John M.Mulvey 在文献 [11]中针对大规模系统建立了鲁棒优化模型, 对解的鲁棒性做了如下定义: 如果最优解对于不确定参数的任何实现都保持接近 (close) 最优, 则称其为解鲁棒 (solution robust); 如果几乎 (almost) 总是可行的, 则称为模型鲁棒. 说明解的鲁棒性有两种含义, 一种是指最优性, 一种是指可行性. 在此基础上, 本文对模型的鲁棒性做了相似的定义.

定义 1　模型的鲁棒性. 对于含有不确定参数的

收稿日期: 2004−12−01; 收修改稿日期: 2005−09−22.
基金项目: 山东省自然科学基金资助项目 (Y2003G01).

优化问题, 如果确定性模型的可行解对参数的任何实现几乎(almost)总是可行的, 则称模型是鲁棒的.

其中"几乎总是可行的"是指当参数随机变化时, 在一定的概率条件下保证是可行解.

3 期望值模型的鲁棒性约束(Robustness constraints of expected value model)

由于调度主要涉及一定时间内共享资源的可用性和设备分配等问题, 因此大都形成混合整数线性规划模型(MILP)或混合整数非线性规划模型(MINLP)[12,13]. 对含有随机参数的线性问题, 期望值模型可表示为

$$\begin{cases}\max z=\sum\limits_{j=1}^{r}[c_j+E(\zeta_j)]x_j+\sum\limits_{j=r+1}^{n}[c_j+E(\zeta_j)]x_j+\\ \qquad [c_0+E(\zeta_0)],\\ \text{s.t.}\\ \sum\limits_{j=1}^{r}[a_{ij}+E(\eta_{ij})]x_j+\sum\limits_{j=r+1}^{n}[a_{ij}+E(\eta_{ij})]x_j-\\ b_i+E(\xi_i)\leqslant 0,\ i=1,2,\cdots,m,\\ x_j\geqslant 0,\ j=1,2,\cdots,n,\\ x_j\ \text{取整数},\ j=1,2,\cdots,r.\end{cases}\tag{1}$$

其中: x_j为决策变量, c_j,a_{ij},b_i为基本线性规划模型中的价值系数、技术系数和右端常数. ζ_j、η_{ij}和ξ_i为随机参数, 概率密度函数已知, 分别为$\theta_j(\zeta_j)$, $\phi_{ij}(\eta_{ij})$和$\varphi_{ij}(\xi_i)$, 所有的随机参数互相独立. 假设所求得的最优(或者满意)解为x^*, 相应的目标z^*. 为了描述方便, 本文后面的公式中将连续变量和整数变量的求和项合并.

参照机会约束规划, 对解的鲁棒性指标有如下的定义.

定义 2 鲁棒性指标. 设x^*为预选用的解, 则$\Pr\{[\sum\limits_{j=1}^{n}(a_{ij}+\eta_{ij})x_j^*-(b_i+\xi_i)]\leqslant 0\}=\gamma_i$, $i=1,2,\cdots,m$称γ_i为x^*对约束i的鲁棒性指标. 令$\gamma=\min\limits_i\gamma_i$, 称$\gamma$为$x^*$对模型的鲁棒性指标.

参照式(1)中的约束和定义2, 对随机变量相对其期望值进行平移, 则相应的约束方程的可行机会见式(2):

$$\Pr\{[\sum_{j=1}^{n}(\eta_{ij}-E(\eta_{ij})_{ij})x_j-(\xi_i-E(\xi_i)_i)]\leqslant\\ [(b_i+E(\xi_i))-\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+E(\eta)_{ij})x_j]\}.\tag{2}$$

忽略原约束方程中边界上的点, 则式(2)可转化为式(3):

$$\Pr\left\{\frac{(\sum\limits_{j=1}^{n}(\eta_{ij}-E(\eta_{ij})_{ij})x_j-(\xi_i-E(\xi_i)_i))}{((b_i+E(\xi_i))-\sum\limits_{j=1}^{n}(a_{ij}+E(\eta_{ij}))x_j)}\leqslant 1\right\}.\tag{3}$$

如果在原期望值模型中增加鲁棒性约束, 使得式(3)大于等于给定的鲁棒性能指标γ_i^*, 则修改后的期望值模型可以满足鲁棒性要求. 下面分两种情况进行讨论.

3.1 随机参数独立有界(Independent stochastic parameter with finite bound)

Hoeffding 定理[14] 假设$Y_1,\cdots,Y_n$是拥有零均值的随机变量序列, 且$a_i\leqslant Y_i\leqslant b_i$, $1\leqslant i\leqslant n$, 对任意的$\delta\geqslant 0$, 有不等式$\Pr(|\sum\limits_{i=1}^{n}Y_i|\geqslant\delta)\leqslant 2\exp\{-2\delta^2/\sum\limits_{i=1}^{n}(b_i-a_i)^2\}$成立.

定理 1 对于MILP模型(见式(1))中的约束i, 如果随机参数独立有界, 则其满足鲁棒性指标的充分条件为

$$1–2\exp\left(\frac{-2[(b_i+E(\xi_i))-\sum\limits_{j=1}^{n}(a_{ij}+E(\eta_{ij}))x_j]^2}{\sum\limits_{j=1}^{n}(d_{ij}-c_{ij})^2x_j^2+(h_i-l_i)^2}\right)\geqslant\gamma_i^*.\tag{4}$$

证 由Hoeffding定理可得

$$\Pr(\sum_{i=1}^{n}Y_i\leqslant\delta)\geqslant\Pr(\left|\sum_{i=1}^{n}Y_i\right|\leqslant\delta)\geqslant\\ 1-2\exp\{-2\delta^2/\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)^2\}.\tag{5}$$

分析式(3), 对于某一特定的x, 式中的随机变量可以认为是

$$\frac{(\eta_{ij}-E(\eta_{ij})_{ij})x_j}{((b_i+E(\xi_i))-\sum\limits_{j=1}^{n}(a_{ij}+E(\eta_{ij}))x_j)},\ j=1,\cdots,n,\tag{6}$$

$$\frac{-(\xi_i-E(\xi_i)_i)}{((b_i+E(\xi_i))-\sum\limits_{j=1}^{n}(a_{ij}+E(\eta_{ij}))x_j)}.\tag{7}$$

如果原系统中的随机参数独立, 且满足$c_{ij}\leqslant\eta_{ij}\leqslant d_{ij}$, $j=1,\cdots,r,r+1,\cdots,n$, $l_i\leqslant\xi_i\leqslant h_i$. 可知, 对于某一特定的$x$, 式(6)(7)所对应的随机变量满足Hoeffding定理的条件. 令$\delta=1$, 将其代入式(5), 可得:

$$\Pr\left\{\frac{(\sum\limits_{j=1}^{n}(\eta_{ij}-E(\eta_{ij})_{ij})x_j-(\xi_i-E(\xi_i)))}{((b_i+E(\xi_i))-\sum\limits_{j=1}^{n}(a_{ij}+E(\eta_{ij}))x_j)}\leqslant 1\right\}\geqslant$$

$$1-2\exp\left(\frac{-2[(b_i+E(\xi_i))-\sum\limits_{j=1}^{n}(a_{ij}+E(\eta_{ij}))x_j]^2}{\sum\limits_{j=1}^{n}(d_{ij}-c_{ij})^2x_j^2+(h_i-l_i)^2}\right). \quad (8)$$

显然, 如果式 (8) 右端 $\geqslant\gamma_i^*$, 左端必然也 $\geqslant\gamma_i^*$, 即满足系统的关于约束 i 的鲁棒性指标. 证明完毕.

因此, 式 (4) 可以作为随机参数有界时期望值模型的鲁棒性约束.

3.2 随机参数单边有界(Independent stochastic parameter with one-side bound)

Andreas 定理[15] 令 $\{Y_i\}_{i=1}^m$ 为独立的随机变量, $E(Y_i^2)<\infty$. 设 $S=\Sigma_i Y_i$, 且 $\delta>0$, 若 $Y_i\leqslant b_i$, 记 $\sigma_i^2=E(Y_i^2)-[E(Y_i)]^2$, 则有不等式 $\Pr\{S-E(S)\geqslant\delta\}\leqslant\exp(-\delta^2/(2\Sigma_i\sigma_i^2+2\Sigma_i[b_i-E(Y_i)]^2))$ 成立.

定理 2 对于 MILP 模型 (见式 (1)) 中的约束 i, 随机参数独立, 且 $E(\eta_{ij}^2)\leqslant\infty$, $\eta_{ij}\leqslant d_{ij}$, $j=1,\cdots,r,r+1,\cdots,n$, $E(\xi_i^2)\leqslant\infty$, $-\xi_i\leqslant h_i$, 则其满足鲁棒性指标的充分条件为

$$1-2\exp\left\{\frac{-[(b_i+E(\xi_i))-\sum\limits_{j=1}^{n}(a_{ij}+E(\eta_{ij}))x_j]^2}{2(\sum\limits_{j=1}^{n}D(\eta_{ij})x_j^2+D(\xi_i)+\sum\limits_{j=1}^{n}(d_{ij}-E(\eta_{ij}))^2x_j^2+(h_i-E(h_i))^2)}\right\}\geqslant\gamma_i^*. \quad (9)$$

证明过程与定理1类似, 这里省略. 同理, 式 (9) 可以作为随机参数单边有界时期望值模型的鲁棒性约束.

4 应用举例(Example)

采用文献 [10]提供的例子. 某炼油厂冶炼两种原油 x_1 和 x_2, 提供两种产品 y_1 和 y_2, 需提前制定一周的生产计划. 假定相应的原料与产品的投入产出比例关系为

$$\pi(x_1,y_1)=2+\eta_1,\ \pi(x_1,y_2)=3,$$
$$\pi(x_2,y_1)=6,\ \pi(x_2,y_2)=3.4-\eta_2.$$

相应产品的需求随机变化, $r_1=180+\xi_1$, $r_2=162+\xi_2$. 其中随机变量 η_1 服从均匀分布 $U(-0.8, 0.8)$, η_2 服从指数分布 $\exp(0.4)$, ξ_1 和 ξ_2 分别服从正态分布 $N(0,\ 12)$ 和 $N(0,\ 9)$. 根据概率论中的"3σ 规则", 取 ξ_1 的上下界为 $[-10.464, 10.464]$, ξ_2 的下届为 -9. 两种原油的最大供应量为 100. 求满足需求的原油的使用量, 目标为总费用最低. 则期望值模型为

$$\begin{cases}\min f(X)=2x_1+3x_2,\\ \text{s.t.}\\ E\{(2+\eta_1)x_1+6x_2-(180+\xi_1)\}\geqslant 0,\\ E\{3x_1+(3.4-\eta_2)x_2-(162+\xi_2)\}\geqslant 0,\\ x_1+x_2\leqslant 100,\ x_1,x_2\geqslant 0.\end{cases} \quad (10)$$

根据模型中随机参数的概率分布情况, 在模型 (10) 的基础上, 分别为两个含有随机参数的约束方程添加形如式 (4) 和 (9) 的鲁棒性条件约束式 (11) (12), 设相应的鲁棒性能指标为 $\gamma_1^*\geqslant 0.8$, $\gamma_2^*\geqslant 0.7$, $\gamma^*\geqslant 0.7$, 得到改进的鲁棒期望值模型. 采用遗传算法进行求解:

$$1-\exp(\frac{-2\times(2\times x_1+6x_2-180)^2}{(0.8+0.8)^2x_1^2+(10.464+10.464)^2})\geqslant 0.8, \quad (11)$$

$$1-\exp(\frac{-(3x_1+3.4x_2-162)^2}{2[(0.4^2x_2^2+3^2)+(0-0.4)^2x_2^2+(9-0)^2]})\geqslant 0.7. \quad (12)$$

如果直接把 $\gamma_1=\Pr\{(2+\eta_1)x_1+6x_2-(180+\xi_1)\geqslant 0\}\geqslant 0.8$, $\gamma_2=\Pr\{3x_1+(3.4-\eta_2)x_2-(162+\xi_2)\geqslant 0\}\geqslant 0.7$ 作为约束, 取代式 (10) 中第 1 至第 2 条约束建立模型, 即成为机会约束规划模型, 采用基于随机模拟的遗传算法求解[10]. 对 3 个模型的运算结果见表 1.

对结果进行比较, 可知由期望值模型得到的这个解虽然目标值较好, 但鲁棒性指标低, 不具备实际应用价值. 机会约束规划模型计算时间较长, 而且随着模型规模的增大和随机参数的增多, 计算时间将令人难以忍受, 这对于调度问题来说比较重要. 本文所提出的加入鲁棒性约束的期望值模型, 鲁棒性能指标从 0.12 提高到 0.89, 而且计算速度快, 与机会约束规划相比, 从 133.514 s 缩短为 1.126 s, 弥补了基本期望值模型和机会约束规划模型的缺点. 如果难以找到可行解或者所得解的性能指标难以满足决策者的要求时, 则可以将鲁棒性指标略微降低然后重新计算.

表1 计算结果比较

Table 1 Comparison of computation results

模型	最优解(x_1, x_2)	目标值	γ_1	γ_2	γ	计算时间/s
基本期望值模型	(32.14,19.28)	122.15	0.50	0.12	0.12	
鲁棒期望值模型	(32.32,25.91)	142.37	1	0.89	0.89	1.126
机会约束规划模型	(31.92,22.65)	131.85	0.88	0.70	0.70	133.514

5 结论(Conclusion)

本文从模型鲁棒性的角度出发, 提出了收缩期望值模型解空间的方法, 借助机会约束规划的思想, 以及Hoeffding不等式和Andreas不等式, 针对随机参数的不同分布情况, 得到了使可行解满足鲁棒性能指标的充分条件, 并以此作为附加鲁棒性约束改进模型, 可保证满足系统的鲁棒性指标. 虽然改进后的模型比基本期望值模型复杂, 但在实际生产过程中, 模型中的参数不太可能同时变化, 因此实际模型要比理论分析的结果简单, 并可以借助各种现代智能优化算法, 计算时间也相对较短, 具备一定的实际应用价值.

参考文献(References):

[1] LUH P B, FENG W D. From manufacturing scheduling to supply chain coordination: the control of complexity and uncertainty[C] //*Proc of the Fourth Int Conf on Control and Automation*. New York: IEEE Press, 2003, 6: 29 – 37.

[2] AYTUG H, LAWLEY M A, MCKAY K, et al. Executing production schedules in the face of uncertainties: a review and some future directions[J/OL]. *European J of Operational Research*. http://www.bilkent.edu.tr/∼akturk/ie573.htm.

[3] 顾幸生. 不确定条件下的生产调度[J]. 华东理工大学学报, 2000, 26(5): 441 – 446.
(GU Xingsheng. A survey of production scheduling under uncertainty[J]. *J of East China University of Science and Technology*, 2000, 26(5): 441 – 446.)

[4] 李建更. 某些调度问题区间摄动鲁棒性的研究[J]. 自动化学报, 2001, 27(1): 24 –30.
(LI Jiangeng. Robustness studies on interval perturbation for some scheduling problems[J]. *Acta Automatic Sinica*, 2001, 27(1): 24 – 30.)

[5] 丁然, 李歧强, 孙同景. Job-shop调度问题满意解的鲁棒性分析[C]//第五届全球智能控制与自动化大会. 杭州: 浙江大学出版社, 2004.
(DING Ran, LI Qiqiang, SUN Tongjing. Robustness Analysis of the Satisfied Solution of Some Job-shop Schedule Problems[C]//*Proc of the 5th World Congress on Intelligent Control and Automation*. Hangzhou: Zhejiang University Press, 2004.)

[6] PARASKEVOPOULOS D, KARAKITSOS E, RUSTEM B. Robust capacity planning under uncertainty[J]. *Management Science*, 1991, 37(7): 787 – 800.

[7] VIN J P, IERAPETRITOU M G.. Robust Short-Term Scheduling of Multiproduct Batch Plants under Demand Uncertainty[J]. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 2001, 40(21), 4543 – 4554.

[8] 王全勇, 姜启源. 随机批量问题的两种新模型及其算法[J]. 系统工程理论与实践, 2001, 21(6): 1 – 6.
(WANG Quanrong, JIANG Qiyuan, Two new models and the algorithm for stochastic lot-sizing problems[J]. *System Engineering Theory and Application*, 2001, 21(6): 1 – 6.)

[9] KALL P, WALLACE S W. *Stochastic Programming*[M]. Chichester: Wiley, 1994.

[10] 刘宝碇, 赵瑞清. 随机规划与模糊规则[M]. 北京: 清华大学出版社, 1998.
(LIU Baoding, ZHAO Ruiqing. *Stochastic Programming and Fuzzy Programming*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1998.)

[11] MULVEY J M, VANDERBEI R J, ZENIOS S A. Robust optimization of large-scale systems[J]. *Operations Research*, 1995, 43(2): 264 – 281.

[12] 马振华. 现代应用数学手册—运筹学与最优化理论卷[M]. 北京: 清华大学出版社, 1998.
(MA Zhenhua. *Modern Application Mathematics Manual-Operations Research and Optimization Theory*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1998.)

[13] 李歧强. 生产过程的智能决策与调度[D]. 杭州: 浙江大学, 1998.
(LI Qiqiang. *Intelligent decision and scheduling of production process*[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 1998.)

[14] HOEFFDING W. Probability inequalities for sums of bounded random variables[J]. *J of American Statistical Association*, 1963, 58(1): 13 – 30.

[15] MAURER A. A bound on the deviation probability for sums of non-negative random variables[J/OL]. *J of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 2003, 4(1). http://jipam.vu.edu.au/v4n1/145_02_www.pdf.

作者简介:

丁 然 (1974—), 女, 博士研究生, 研究方向为智能控制理论及应用技术, E-mail: dingrr@sdu.edu.cn;

李歧强 (1964—), 男, 1998年获浙江大学博士学位, 教授, 博士生导师, 研究方向为智能控制, 生产调度与决策、优化理论;

孙同景 (1948—), 男, 山东大学控制科学与工程学院教授, 博士生导师, 主要研究方向为智能控制技术;

杨加敏 (1977—), 男, 主要研究方向为智能计算.